

有向图中网络 Euler-Lagrange 系统的自适应协调跟踪

梅杰¹ 张海博¹ 马广富¹

摘要 基于一致性理论, 在有向图中研究网络 Euler-Lagrange 系统的协调跟踪控制. 所有跟随智能体的动力学模型均为 Euler-Lagrange 方程. 在仅有部分跟随智能体获取领航智能体信息的情形下, 同时考虑系统模型的参数不确定性, 设计分布式自适应控制律实现所有跟随智能体对领航智能体的跟踪. 针对领航智能体的运动状态, 考虑以下两种情形: 1) 领航智能体为固定点; 2) 领航智能体为动态点. 对第一种情形, 设计的控制律使得所有跟随智能体渐近交会于固定点; 对第二种情形, 首先对每个跟随智能体设计分布式连续估计器, 然后提出了分布式自适应控制律. 当每个跟随智能体均能获取领航智能体的加速度信息时, 设计的控制律能实现对领航智能体的渐近跟踪, 当跟随智能体不能获取领航智能体的加速度信息时, 跟踪误差是有界的. 最后通过仿真分析验证设计的控制算法是合理有效的.

关键词 多智能体系统, 协调跟踪, 分布式控制, 自适应控制, Euler-Lagrange 系统

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00596

Adaptive Coordinated Tracking for Networked Euler-Lagrange Systems under a Directed Graph

MEI Jie¹ ZHANG Hai-Bo¹ MA Guang-Fu¹

Abstract In this paper, we study a distributed coordinated tracking problem for networked Euler-Lagrange systems under a directed graph based on consensus theory. The purpose is for a team of followers modeled by Euler-Lagrange equations in the presence of parametric uncertainties to track a leader under the constraint that only a subset of the followers can receive the information of the leader. We consider two cases: 1) the leader is a stationary point; 2) the leader is a moving point. In the first case, we propose a distributed adaptive control algorithm, by which all followers can rendezvous at the stationary point asymptotically. In the second case, we propose a distributed continuous estimator and a distributed adaptive control algorithm. We show that with the proposed control algorithm, all followers can track the dynamic leader asymptotically if the acceleration of the leader is known to each follower, and we give a bound of the tracking error if the acceleration of the leader is unknown. Simulation results are provided to show the effectiveness of the proposed control algorithms.

Key words Multi-agent systems, coordinated tracking, distributed control, adaptive control, Euler-Lagrange systems

随着网络通讯和计算机的快速发展, 多智能体系统的协调控制问题引起了国内外广泛的关注, 包括一致性^[1]、编队^[2-3]和聚集^[4]等. 对多智能体系统分布式协调控制的研究往往集中在两个方面, 即不存在领航智能体或期望轨迹^[5-6]和存在领航智能体或期望轨迹^[7-8].

大部分现有文献中智能体的动力学均为一阶或二阶积分系统^[1-8], 本文则研究动力学为 Euler-Lagrange 方程的多智能体系统. 该系统在实际中有着广泛的应用, 很多机械系统都可以用 Euler-Lagrange 方程进行建模, 如操作机器人、自动车辆

以及步行机器人等. 因此, 对网络 Euler-Lagrange 系统 (Networked Euler-Lagrange systems, NELS) 分布式协调控制的研究有着很重要的意义. 但由于 Euler-Lagrange 方程是非线性的, 因此也带来了更大的挑战. 下面对现有结果进行简单的介绍.

在不存在领航智能体或期望轨迹的情形下, Ren^[9]提出了分布式一致算法, 使得整个 NELS 的广义速度趋于零, 广义坐标达到一致, 并考虑了控制输入饱和以及无需广义速度的情况. Cheng 等^[10]提出了考虑系统参数不确定性的一致性算法, 使得系统达到一致. Chopra 等^[11]考虑了无领航智能体情形下 NELS 的聚集问题, 设计分布式控制算法使得系统速度达到一致, 并利用势能函数保证在此过程中避免碰撞, 同时考虑了时变拓扑和通信时滞的影响.

在存在领航智能体或期望轨迹的情形下, 基于完全的通信拓扑结构, Rodriguez-Angeles 等^[12]研究了 NELS 的同步跟踪控制. 文献 [12] 假设每个智能体均知道期望轨迹和其他智能体的状态, 在速度

收稿日期 2010-09-15 录用日期 2010-11-24
Manuscript received September 15, 2010; accepted November 24, 2010
国家自然科学基金 (60774062, 61004072), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20102302110031) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60774062, 61004072) and Doctoral Program Foundation of Institutions of Higher Education of China (20102302110031)
1. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150001
1. Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

不可获取的情形下, 设计了基于模型的非线性估计器, 使得每个智能体的状态均收敛到期望轨迹. 基于环形的通信拓扑结构, Sun 等^[13] 在不依赖模型的情形下给出了 PD 型的同步控制算法实现跟踪. 利用非线性压缩理论, Chung 等^[14-15] 基于环形的拓扑结构提出了分布式控制算法, 系统状态最终指数收敛到期望轨迹, 并分别应用于操作机器人^[14] 和编队飞行航天器^[15]. 在一般无向拓扑结构下, 基于无源性方法, Spong 和 Chopra^[16] 研究了 NELS 的输出同步控制问题, 并讨论了固定拓扑和切换拓扑的情形, 同时考虑了通信中时滞的影响. 在上述文献中, 整个 NELS 都要跟踪某个领航智能体或者期望轨迹, 但都要求每个智能体都能获取领航智能体的状态信息. 但是, 这种假设过于严格, 而且往往是不实际的. Cheng 等^[17] 在仅有部分跟随智能体能获取领航智能体的广义坐标的情形下, 提出考虑系统不确定性的自适应控制算法, 实现了对领航智能体的协调跟踪, 但每个跟踪智能体均需完全知道领航智能体的广义速度和加速度信息. Hokayem 等^[18] 假设仅有部分跟随智能体能获取领航智能体的状态, 在存在时滞和数据误差等通信限制的情形下, 指出整个闭环系统是输入到状态稳定的. 但是其领航智能体的角色相当于某个受到外部干扰的跟随智能体, 并不是真正意义上的领航者. 因此, 文献 [18] 的结论并不能用于对动态领航智能体的精确跟踪. 在仅有部分跟随智能体能获取领航智能体的状态的情形下, Mei 等^[19] 在无向拓扑结构下实现了对动态领航智能体的精确跟踪.

本文在有向拓扑结构中研究 NELS 系统的协调跟踪控制. 领航智能体具有到所有跟随智能体的有向路径, 即仅有部分跟随智能体能获取领航智能体信息, 同时考虑系统参数的不确定性. 与文献 [9-11] 相比, 本文考虑的是 NELS 系统的协调跟踪; 与文献 [12] (全拓扑)、文献 [13-15] (环形拓扑) 和文献 [16-19] (无向拓扑) 相比, 本文考虑的是有向拓扑结构.

1 数学背景与问题描述

假设 $n+1$ 个智能体, 由 n 个为跟随智能体 (记为 $1, \dots, n$) 和 1 个领航智能体 (记为 0) 组成. 跟随智能体 i 的动力学模型由如下 Euler-Lagrange 方程表示

$$M_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i \quad (1)$$

其中, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^p$ 为广义坐标, $\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbf{R}^p$ 为广义速度, $M_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为对称正定的惯量矩阵, $C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbf{R}^p$ 为 Coriolis 力和偏心力, $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$ 为广义有势力, $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbf{R}^p$ 为作用在跟随智能体 i 上的广义控制力.

在本文的分析中, 假设式 (1) 所示的 Euler-Lagrange 方程具有如下的性质^[20]:

性质 1. 有界性: 对任意 i , 存在正常数 $k_m, k_{\bar{m}}$ 和 k_C , 使得 $k_m I_p \leq M_i(\mathbf{q}_i) \leq k_{\bar{m}} I_p$, $\|C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\| \leq k_C \|\dot{\mathbf{q}}_i\|$, 其中 I_p 为 $p \times p$ 阶单位矩阵;

性质 2. 反对称性: $\dot{M}_i(\mathbf{q}_i) - 2C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ 是反对称的, 即对任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p$, $\mathbf{x}^T [M_i(\mathbf{q}_i) - 2C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)] \mathbf{x} = 0$;

性质 3. 参数线性化: 对任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$, $M_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{x} + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{y} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y})\boldsymbol{\Theta}_i$, 其中, $Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为回归矩阵, $\boldsymbol{\Theta}_i$ 为跟随智能体 i 的常值未知参数.

本文利用有向图来描述智能体间的拓扑关系. 首先对文中涉及的图论相关知识进行简单的介绍, 关于图论的详细内容读者可参考文献 [21]. 有向图是由若干给定的顶点及连接两顶点的边所构成的图形, 记为 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为所有顶点组成的集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是所有边组成的集合, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是带权的邻接矩阵. 本文中 v_i 表示智能体 i . 边 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 j 能够获取智能体 i 的信息, j 为 i 的子节点, i 为 j 的父节点. 邻接矩阵的元素 a_{ij} 如下定义: 当 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 时, $a_{ij} > 0$; 否则, $a_{ij} = 0$. 一般假设顶点与自身没有连通性, 即 $a_{ii} = 0$. 有向图的路径为一个有限的顶点序列 v_{i_1}, \dots, v_{i_k} , 满足 $(v_{i_s}, v_{i_{s+1}}) \in \mathcal{E}$. 如果有向图中除了一个节点 (称为根节点) 外, 其余每个节点均有且仅有一个父节点, 且存在根节点到其余任何节点的路径, 则称该有向图为有向树. 有向图的有向生成树为包含该有向图所有节点的有向树. 如果有向图存在一个为有向生成树的子图, 称该有向图具有有向生成树. 图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵 L_A 定义为

$$L_A = \mathcal{D} - \mathcal{A} \quad (2)$$

其中, $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. 对有向图来说, L_A 一般是不对称的.

对有向图的 Laplacian 矩阵, 有以下结论:

引理 1^[1]. 有向图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵只有一个特征值为零当且仅当 \mathcal{G} 具有有向生成树.

为方便之后的讨论, 假设如下的记号: $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_n^T)^T$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}_1^T, \dots, \dot{\mathbf{q}}_n^T)^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{q})^T, \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{q})^T)^T$, $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1^T, \dots, \boldsymbol{\tau}_n^T)^T$, $M(\mathbf{q}) = \text{diag}\{M_1(\mathbf{q}_1), \dots, M_n(\mathbf{q}_n)\}$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{diag}\{C_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1), \dots, C_n(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n)\}$.

2 控制律设计

在仅有部分跟随智能体知道领航智能体信息的情形下, 设计分布式自适应控制律, 使得所有跟随智

能体实现对领航智能体的跟踪,同时考虑模型的参数不确定性. 设 $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0$ 分别表示领航智能体的广义坐标、广义速度和广义加速度. 针对领航智能体不同的运动轨迹,考虑以下两种情形: 1) 领航智能体为固定点; 2) 领航智能体为动态点.

2.1 领航智能体为固定点

本节考虑领航智能体为固定点的情形,即所有跟随智能体最终交会于某固定点, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$.

首先,提出以下的辅助变量:

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} = -\alpha \sum_{j=0}^n a_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \quad (3)$$

$$\mathbf{s}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} = \dot{\mathbf{q}}_i + \alpha \sum_{j=0}^n a_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \quad (4)$$

式中, α 为正常数, $a_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, 为邻接矩阵 \mathcal{A} 的第 i 行、第 j 列元素, 如果跟随智能体 i 可以获取领航智能体的信息, $a_{i0} > 0$; 否则, $a_{i0} = 0$. 记 $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_n^T)^T$, 则式 (4) 可以写成如下向量形式

$$\dot{\mathbf{q}} = -\alpha(H \otimes I_p)(\mathbf{q} - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{q}_0) + \mathbf{s} \quad (5)$$

上式中, $H = L_A + \text{diag}\{a_{10}, \dots, a_{n0}\}$, \otimes 表示 Kronecker 积, $\mathbf{1}_n$ 为元素全为 1 的 n 维列向量.

将领航智能体 0 看作第 $n+1$ 个智能体, 智能体间的拓扑关系记作图 $\bar{\mathcal{G}}$. 很显然, 当存在领航智能体到所有跟随智能体的有向路径时, 图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树.

引理 2. 如果 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 那么 H 的所有特征值均具有正实部.

证明. 图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵 \bar{L} 可以写为如下分块矩阵的形式

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} H & -\mathbf{a}_0 \\ \mathbf{0}_n^T & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{a}_0 = [a_{10}, \dots, a_{n0}]^T$, $\mathbf{0}_n$ 为元素全为零的 n 维列向量.

如果 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 由引理 1 可知, \bar{L} 有且仅有一个特征值为零, 注意到式 (6), \bar{L} 最后一行所有元素均为零, 因此可得矩阵 H 没有为零的特征值. 注意到 $a_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, n$, 由 Gersgorin 圆盘定理^[22] 和 H 的定义可知, H 的特征值为零点或位于虚轴的右半平面. 注意到 H 没有为零的特征值, 因此 H 的所有特征值均具有正实部. \square

引理 3. 对系统 (4), 如果图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$, 那么当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{\mathbf{q}}_i \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_0, i = 1, \dots, n$.

证明. 由引理 2 可知, $(H \otimes I_p)$ 的所有特征值均有正实部, 注意到 $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}, \alpha > 0$, 这表明 $\mathbf{q} - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ 为系统 $\dot{\mathbf{q}} = -\alpha(H \otimes I_p)(\mathbf{q} - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{q}_0)$ 的全局指数稳定平衡点. 由文献 [23] 引理 4.6 可知, 将 \mathbf{s} 看作输入, $\mathbf{q} - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{q}_0$ 看作状态, 系统 (5) 是输入到状态稳定的. 那么, 当 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{q} - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{q}_0 \rightarrow \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_0, i = 1, \dots, n$. 代入到式 (5) 可知, $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0}$, 即 $\dot{\mathbf{q}}_i \rightarrow \mathbf{0}, i = 1, \dots, n$. \square

由性质 3 可得

$$M_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_{ri} + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{ri}, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\Theta_i$$

对系统 (1), 在存在参数不确定性的情形下, 设计如下所示的分布式控制算法

$$\boldsymbol{\tau}_i = -K_i \mathbf{s}_i + Y_i \hat{\Theta}_i \quad (7)$$

式中, $K_i \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为对称正定增益矩阵, $\hat{\Theta}_i$ 为未知参数 Θ_i 的估计值, 按以下自适应控制律进行更新

$$\dot{\hat{\Theta}}_i = -\Lambda_i Y_i^T \mathbf{s}_i \quad (8)$$

式中, Λ_i 为对称正定矩阵, $Y_i = Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{ri}, \dot{\mathbf{q}}_{ri})$. 记 $\hat{\Theta}_i = \Theta_i - \hat{\Theta}_i$. 令 $\tilde{\Theta}, \Theta, \hat{\Theta}$ 和 \mathbf{q}^r 分别为 $\tilde{\Theta}_i, \Theta_i, \hat{\Theta}_i$ 和 $\mathbf{q}_i^r (i = 1, \dots, n)$ 拼成的列向量, 则在控制算法 (7) 的作用下, 系统 (1) 可写成下列的向量形式

$$M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} = -C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - K\mathbf{s} - Y\tilde{\Theta} \quad (9)$$

式中, $Y = \text{diag}\{Y_1, \dots, Y_n\}, K = \text{diag}\{K_1, \dots, K_n\}$.

定理 1. 对系统 (1), 在控制算法 (7) 和自适应律 (8) 的作用下, 如果图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 那么当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_i \rightarrow \mathbf{0}, i = 1, \dots, n$.

证明. 考虑如下所示的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \Xi \tilde{\Theta} \quad (10)$$

式中, $\Xi = \Lambda^{-1} = \text{diag}\{\Lambda_1^{-1}, \dots, \Lambda_n^{-1}\}$ 对称正定. 对 V 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \tilde{\Theta}^T \Xi \dot{\tilde{\Theta}} = \\ &= \mathbf{s}^T K \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{s} - \\ &= \mathbf{s}^T Y \tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^T \Xi \dot{\tilde{\Theta}} \quad (\text{由式 (9) 以及 } \dot{\tilde{\Theta}} = -\dot{\hat{\Theta}}) = \\ &= -\mathbf{s}^T K \mathbf{s} \quad (\text{由性质 2 和式 (8)}) \end{aligned} \quad (11)$$

注意到 K 对称正定, 上式表明 $\dot{V} \leq 0$, 即对任意 $t \geq 0, V(t) \leq V(0)$. 由式 (10) 可知, \mathbf{s} 和 $\tilde{\Theta}$ 均有界. 由引理 3 和性质 1, $\dot{\mathbf{q}}, C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), M(\mathbf{q})$ 都是有界

的. 由式 (9) 可得 $\dot{\mathbf{s}}$ 是有界的, 因此 $\dot{V} = -2\mathbf{s}^T K \dot{\mathbf{s}}$ 是有界的, 这表明 \dot{V} 是一致连续的. 由 Barbalat 引理^[23] 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{V} \rightarrow 0$, 即 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$. 注意到图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 由引理 3 可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_i \rightarrow \mathbf{0}, i = 1, \dots, n$. \square

2.2 领航智能体为动态点

本节考虑领航智能体为动态点的情形. 假设领航智能体的动力学如下式所示:

$$\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = \mathbf{a}_0(t) + \boldsymbol{\delta}(t) \quad (12)$$

式中, $\mathbf{a}_0(t), \boldsymbol{\delta}(t) \in \mathbf{R}^p$. 在文献 [7] 的框架下, 假设每个跟随智能体只能获取 $\mathbf{a}_0(t)$ 的信息, 而无法获取 $\boldsymbol{\delta}(t)$ 的信息, 但是 $\boldsymbol{\delta}(t)$ 是有界的, 记为 $\|\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\delta}(t)\| \leq \bar{\delta}$.

首先对每个跟随智能体设计如下的估计器

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_i = \mathbf{a}_0 - \beta \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(\hat{\mathbf{v}}_i - \hat{\mathbf{v}}_j) + a_{i0}(\hat{\mathbf{v}}_i - \dot{\mathbf{q}}_0) \right] \quad (13)$$

式中, β 为正常数, $\hat{\mathbf{v}}_i$ 为跟踪智能体 i 对领航智能体广义速度的估计值. 记 $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{v}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n^T)^T$. 定义 $\bar{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{1}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}_0$, 则式 (13) 可写成如下向量形式

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = -\beta(H \otimes I_p)\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\delta}(t) \quad (14)$$

引理 4. 对系统 (14), 如果图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 那么存在取决于 $\bar{\delta}$ 的常数 C_1 , 使得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{v}}(t)\| \leq C_1$. 当每个跟随智能体均能获取领航智能体的加速度信息时, 即 $\bar{\delta} = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{v}}(t)\| = 0$.

证明. 如果图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 由引理 2 可知, H 的所有特征值均具有正实部, 那么存在对称正定矩阵 P , 使得 $H^T P + P H = Q$ 为对称正定矩阵. 记 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小和最大特征值, 则有 $\lambda_{\min}(Q) > 0$. 考虑 Lyapunov 函数 $V_1 = \bar{\mathbf{v}}^T (P \otimes I_p) \bar{\mathbf{v}}$, 对其求导, 由式 (14) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\beta \bar{\mathbf{v}}^T (Q \otimes I_p) \bar{\mathbf{v}} - 2\bar{\mathbf{v}}^T (P \otimes I_p) (\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\delta}(t)) \leq \\ & -\beta \lambda_{\min}(Q) \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \bar{\delta} \|\bar{\mathbf{v}}\| \leq \\ & -\frac{\beta \lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} V_1 + \frac{2\lambda_{\max}(P) \bar{\delta}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \sqrt{V_1} \leq \\ & \text{(因为 } \lambda_{\min}(P) \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 \leq V_1 \leq \lambda_{\max}(P) \|\bar{\mathbf{v}}\|^2) \\ & -\frac{\beta \lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} V_1 + \frac{2[\lambda_{\max}(P)]^3 \bar{\delta}^2}{\beta \lambda_{\min}(P) \lambda_{\min}(Q)} \end{aligned} \quad (15)$$

求解上式可得

$$V_1(t) \leq V_1(0) e^{-\frac{\beta \lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} t} + \frac{4[\lambda_{\max}(P)]^4 \bar{\delta}^2 (1 - e^{-\frac{\beta \lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} t})}{\beta^2 \lambda_{\min}(P) [\lambda_{\min}(Q)]^2}$$

注意到 $\beta \lambda_{\min}(Q) / 2\lambda_{\max}(P) > 0$, 对上式求极限可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V_1(t) \leq \frac{4[\lambda_{\max}(P)]^4 \bar{\delta}^2}{\beta^2 \lambda_{\min}(P) [\lambda_{\min}(Q)]^2}$$

即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{v}}(t)\| \leq \frac{2[\lambda_{\max}(P)]^2 \bar{\delta}}{\beta \lambda_{\min}(P) \lambda_{\min}(Q)} = C_1$$

显然, 当 $\bar{\delta} = 0$ 时, $C_1 = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{v}}(t)\| = 0$. \square

针对领航智能体为动态点的情形, 设计如下辅助变量

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} = \hat{\mathbf{v}}_i - \alpha \sum_{j=0}^n a_{ij} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \quad (16)$$

$$\mathbf{s}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} = \dot{\mathbf{q}}_i - \hat{\mathbf{v}}_i + \alpha \sum_{j=0}^n a_{ij} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \quad (17)$$

式中 α 为正常数.

设计如下所示的自适应控制律

$$\boldsymbol{\tau}_i = -K_i \mathbf{s}_i + Y_i \hat{\boldsymbol{\Theta}}_i \quad (18a)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}_i = -\Lambda_i Y_i^T \mathbf{s}_i \quad (18b)$$

式中, K_i, Λ_i 为对称正定增益矩阵. 上式与自适应控制律 (7) 和 (8) 形式相同, 只是 \mathbf{q}_{ri} 和 \mathbf{s}_i 如式 (16) 和 (17) 所示.

记 $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{q}_0$, 则式 (17) 可以写成如下的向量形式

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = -\alpha(H \otimes I_p)\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{s} + \bar{\mathbf{v}} \quad (19)$$

定理 2. 对系统 (1), 当领航智能体为动态点时, 在自适应控制算法 (18) 的作用下, 如果图 $\bar{\mathcal{G}}$ 具有有向生成树, 那么存在取决于 $\bar{\delta}$ 的常数 C_2 , 使得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{q}}(t)\| \leq C_2$. 当每个跟随智能体均能获取领航智能体的加速度信息时, 即 $\bar{\delta} = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{q}}(t)\| = 0$.

证明. 考虑如下所示的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^T \Xi \tilde{\boldsymbol{\Theta}}$$

对 V 求导可得

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T K \mathbf{s}$$

根据定理 1 的证明可知, 在定理 2 的条件下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$. 考虑 Lyapunov 函数 $V_2 = \bar{\mathbf{q}}^T(P \otimes I_p)\bar{\mathbf{q}}$, 仿照引理 4 的证明可得

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{\alpha\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}V_2 + \frac{2[\lambda_{\max}(P)]^3\|\mathbf{s} + \bar{\mathbf{v}}\|^2}{\alpha\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)}$$

求解上式并求极限可得

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{q}}(t)\| &\leq \\ \frac{2[\lambda_{\max}(P)]^2 \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{s} + \bar{\mathbf{v}}\|}{\beta\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)} &\leq \\ \frac{2[\lambda_{\max}(P)]^2 \limsup_{t \rightarrow \infty} (\|\mathbf{s}\| + \|\bar{\mathbf{v}}\|)}{\beta\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)} &\leq \\ \frac{2[\lambda_{\max}(P)]^2 C_1}{\beta\lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q)} &= C_2 \end{aligned}$$

显然, 当 $\bar{\delta} = 0$ 时, $C_2 = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{q}}(t)\| = 0$. \square

注 1. 当领航智能体为动态点时, 跟随智能体间除了相互传递广义坐标和广义速度外, 同时也传递对领航智能体广义速度的估计值. 本节控制律设计中需要每个跟随智能体获取领航智能体的部分加速度信息, 但从上述分析中可以看出, 只要领航智能体的加速度是有界的, 总可以选取足够大的 α, β 使得跟踪误差足够小.

3 仿真分析

本节通过仿真分析验证控制算法的有效性. 考虑 6 个三连杆转动机械臂组成的系统. 为简单计, 假设所有机械臂的动力学为相同的 Euler-Lagrange 方程, 如式 (20) 所示 (见文献 [24]), $\mathbf{q}_i = [q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}]^T$ 为机械臂 i 的各杆转角, $\Theta_{ij}, j = 1, \dots, 9$, 为机械臂 i 的未知常值参数, 如式 (21) 所示, 回归矩阵如式 (22) 所示. 其中, (m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}) 为三连杆机械

臂 i 的各杆质量, (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}) 为各杆长度, $(l_{ic1}, l_{ic2}, l_{ic3})$ 为各杆连接点到质心的距离, (J_{i1}, J_{i2}, J_{i3}) 为各杆转动惯量, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, $q_{i(jk)} = q_{ij} - q_{ik}$. 机械臂的各项参数如表 1 所示.

表 1 三连杆转动机械臂参数

Table 1 Parameters of the three-link revolute joint arms

参数	杆 1	杆 2	杆 3
质量 (kg)	10	8	6
杆长 (m)	1.0	0.8	0.6
连接点到质心距离 (m)	0.5	0.4	0.3
转动惯量 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0.8333	0.4267	0.1800

仿真中, 机械臂 i 的初始转角和初始角速度分别为 $\mathbf{q}_i(0) = [\frac{\pi}{6}i, \frac{\pi}{7}i, \frac{\pi}{8}i]^T$ (rad), $\dot{\mathbf{q}}_i(0) = [0.05i - 0.2, -0.05i, -0.05i + 0.2]^T$ (rad/s), $i = 1, \dots, 6$. 图 1 为 6 个机械臂与领航者之间的拓扑关系, 如果 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 机械臂 3 和 6 能获得领航者的信息, 即 $a_{30} = a_{60} = 1$.

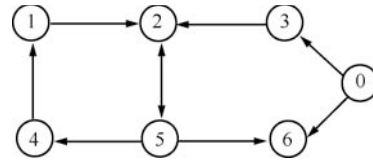


图 1 机械臂与领航者之间的拓扑关系

Fig. 1 The networked topology associated with the six followers and the leader

当领航智能体为固定点时, 设 $\mathbf{q}_0 = [0.6, 0.8, 1.0]^T$ (rad). 控制器参数分别为 $K_i = \Lambda_i = 10I_3, i = 1, \dots, 6, \alpha = 4$. 图 2 表示机械臂 1, 3, 5 与领航智能体转角之差, 图 3 表示机械臂 1, 3, 5 的角速度. 可以看出, 所有机械臂的转角均收敛到领航智能体的转角, 而转动角速度则收敛到 0.

$$\begin{aligned} M_i(\mathbf{q}_i) &= \begin{bmatrix} \Theta_{i1} & \Theta_{i4} \cos(q_{i2} - q_{i1}) & \Theta_{i5} \cos(q_{i3} - q_{i1}) \\ \Theta_{i4} \cos(q_{i2} - q_{i1}) & \Theta_{i2} & \Theta_{i6} \cos(q_{i3} - q_{i2}) \\ \Theta_{i5} \cos(q_{i3} - q_{i1}) & \Theta_{i6} \cos(q_{i3} - q_{i2}) & \Theta_{i3} \end{bmatrix} \\ C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) &= \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_{i4} \sin(q_{i2} - q_{i1})\dot{q}_{i2} & -\Theta_{i5} \sin(q_{i3} - q_{i1})\dot{q}_{i3} \\ \Theta_{i4} \sin(q_{i2} - q_{i1})\dot{q}_{i1} & 0 & -\Theta_{i6} \sin(q_{i3} - q_{i2})\dot{q}_{i3} \\ \Theta_{i5} \sin(q_{i3} - q_{i1})\dot{q}_{i1} & \Theta_{i6} \sin(q_{i3} - q_{i2})\dot{q}_{i2} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) &= \begin{bmatrix} \Theta_{i7}g \cos(q_{i1}) \\ \Theta_{i8}g \cos(q_{i2}) \\ \Theta_{i9}g \cos(q_{i3}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{i1} &= m_{i1}l_{ic1}^2 + J_{i1} + (m_{i2} + m_{i3})l_{i1}^2, \Theta_{i2} = m_{i2}l_{ic2}^2 + J_{i2} + m_{i3}l_{i2}^2, \Theta_{i3} = m_{i3}l_{ic3}^2 + J_{i3} \\ \Theta_{i4} &= m_{i2}l_{i1}l_{ic2} + m_{i3}l_{i1}l_{i2}, \Theta_{i5} = m_{i3}l_{i1}l_{ic3}, \Theta_{i6} = m_{i3}l_{i2}l_{ic3} \\ \Theta_{i7} &= m_{i1}l_{ic1} + (m_{i2} + m_{i3})l_{i1}, \Theta_{i8} = m_{i2}l_{ic2} + m_{i3}l_{i2}, \Theta_{i9} = m_{i3}l_{ic3} \end{aligned} \quad (21)$$

$$Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \\ x_2 \cos(q_{i(21)}) - y_2 \dot{q}_{i2} \sin(q_{i(21)}) & x_1 \cos(q_{i(21)}) + y_1 \dot{q}_{i1} \sin(q_{i(21)}) & 0 \\ x_3 \cos(q_{i(31)}) - y_3 \dot{q}_{i3} \sin(q_{i(31)}) & 0 & x_1 \cos(q_{i(31)}) + y_1 \dot{q}_{i1} \sin(q_{i(31)}) \\ 0 & x_3 \cos(q_{i(32)}) - y_3 \dot{q}_{i3} \sin(q_{i(32)}) & x_2 \cos(q_{i(32)}) + y_2 \dot{q}_{i2} \sin(q_{i(32)}) \\ g \cos(q_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & g \cos(q_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & g \cos(q_{i3}) \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

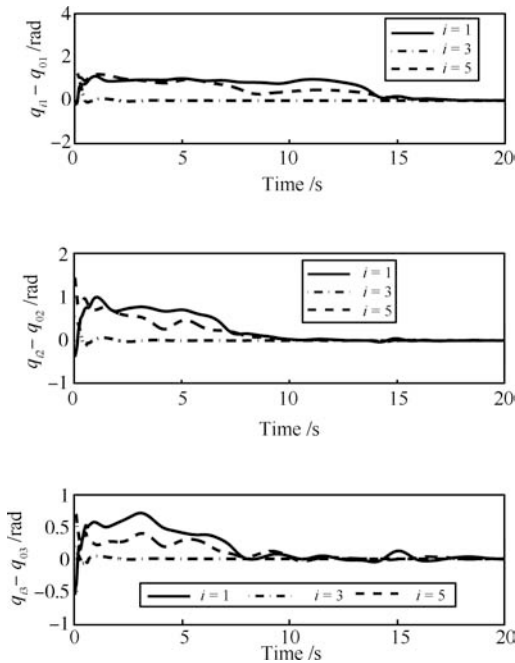


图2 领航智能体为固定点时机械臂 1, 3, 5 与领航智能体的转角之差

Fig. 2 Differences between the joint angles of arms 1, 3, and 5 and the stationary leader

当领航智能体为动态点时, 设 $\mathbf{q}_0(t) = [\sin(\pi/5t), \cos(\pi/5t), \sin(\pi/5t)]^T$ (rad), $\mathbf{a}_0(t) = -\frac{\pi^2}{25}[\sin(\pi/5t), \cos(\pi/5t), \sin(\pi/5t)]^T$ (rad/s²). 控制器参数分别为 $K_i = \Lambda_i = 10I_3, i = 1, \dots, 6, \alpha = 4, \beta = 4$. 图 4 表示机械臂 1, 3, 5 与领航智能体转角之差, 图 5 表示机械臂 1, 3, 5 与领航智能体转动角速度之差. 可以看出, 所有机械臂的转角均收敛

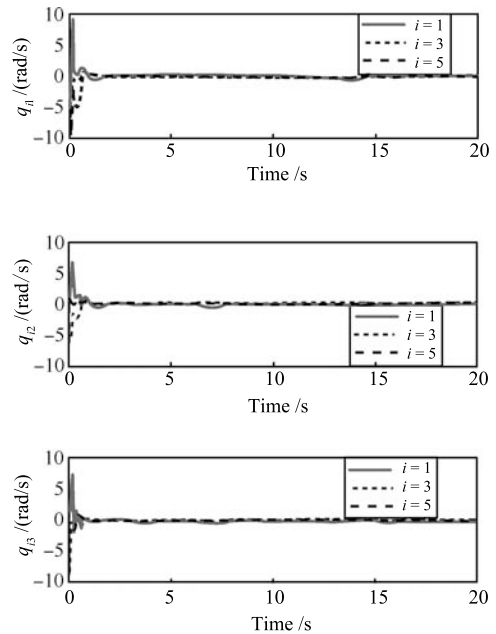


图3 领航智能体为固定点时机械臂 1, 3, 5 的转动角速度

Fig. 3 The joint angle derivatives of arms 1, 3, and 5

到领航智能体的转角, 而转动角速度则收敛到领航智能体的转动角速度, 即实现对领航智能体的跟踪.

4 结论

在有向拓扑结构下, 研究了网络 Euler-Lagrange 系统的协调跟踪控制, 分别考虑了领航智能体为固定点和动态点两种情形. 对领航智能体为固定点的情形, 在系统存在模型参数不确定时, 设计了分布式自适应控制律, 使得整个 NELS 系统渐近交会于固定点; 对领航智能体为动态点的情形, 首

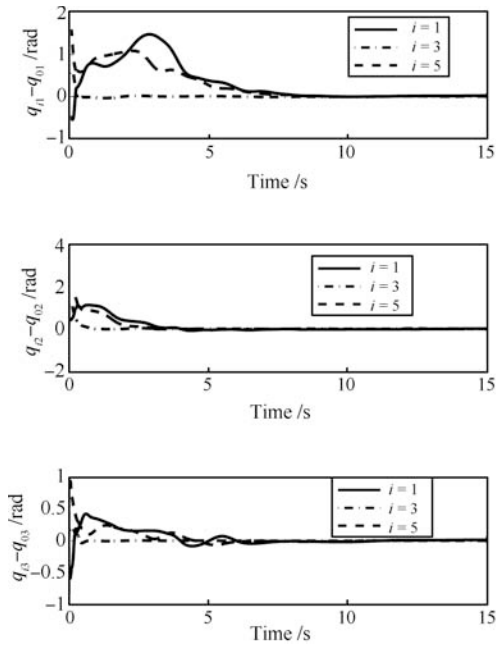


图 4 领航智能体为动态点时机械臂 1, 3, 5 与领航智能体的转角之差

Fig. 4 Differences between the joint angles of arms 1, 3, and 5 and the dynamic leader

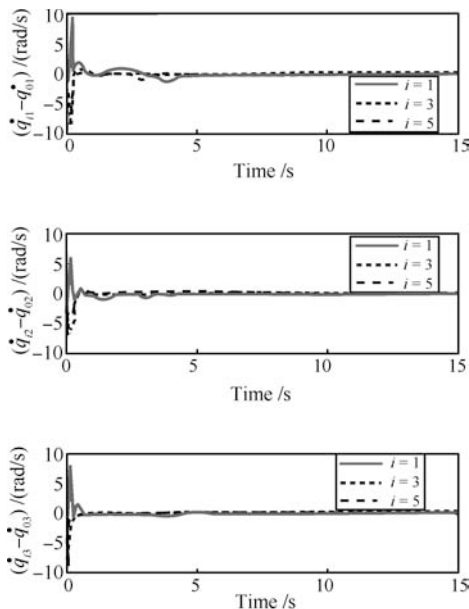


图 5 领航智能体为动态点时机械臂 1, 3, 5 与领航智能体的转动角速度之差

Fig. 5 Differences between the joint angle derivatives of arms 1, 3, and 5 and the dynamic leader

先对每个跟随智能体设计分布式连续估计器, 对领航智能体的速度进行估计, 然后设计了分布式自适应控制律. 当每个跟随智能体均能获取领航智能体加速度信息时, 设计的控制律能实现对领航智能体

的渐近跟踪, 当跟随智能体不能获取领航智能体加速度信息时, 跟踪误差是有界的, 并且能通过选取控制增益, 使得跟踪误差足够小. 下一步的工作是考虑无需任何领航智能体加速度信息的跟踪控制.

References

- 1 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661
- 2 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1465–1476
- 3 Chen Yang-Yang, Tian Yu-Ping. Directed coordinated control for multiagent formation motion on a set of given curves. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(12): 1541–1549 (陈杨杨, 田玉平. 多智能体沿多条给定路径编队运动的有向协同控制. *自动化学报*, 2009, **35**(12): 1541–1549)
- 4 Su H S, Wang X F, Lin Z L. Flocking of multi-agents with a virtual leader. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 293–307
- 5 Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, **27**(2): 71–82
- 6 Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215–233
- 7 Hong Y G, Hu J P, Gao L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 2006, **42**(7): 1177–1182
- 8 Cao Y, Ren W. Distributed coordinated tracking via a variable structure approach — Part I: consensus tracking. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore, USA: IEEE, 2010. 4744–4749
- 9 Ren W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems. *International Journal of Control*, 2009, **82**(11): 2137–2149
- 10 Cheng L, Hou Z G, Tan M. Decentralized adaptive consensus control for multi-manipulator system with uncertain dynamics. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Washington D. C., USA: IEEE, 2008. 2712–2717
- 11 Chopra N, Stipanovic D M, Spong M W. On synchronization and collision avoidance for mechanical systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, USA: IEEE, 2008. 3713–3718
- 12 Rodriguez-Angeles A, Nijmeijer H. Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: a cooperative approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, **12**(4): 542–554
- 13 Sun D, Shao X Y, Feng G. A model-free cross-coupled control for position synchronization of multi-axis motions: theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2007, **15**(2): 306–314
- 14 Chung S J, Slotine J J E. Cooperative robot control and concurrent synchronization of Lagrangian systems. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, **25**(3): 686–700

- 15 Chung S J, Ahsun U, Slotine J J E. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, **32**(2): 512–526
- 16 Spong M W, Chopra N. Synchronization of networked Lagrangian systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, New York: Springer-Verlag, 2007. 47–59
- 17 Cheng L, Hou Z G, Tan M. Decentralized adaptive leader-follower control of multi-manipulator system with uncertain dynamics. In: Proceedings of the 34th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics. Orlando, USA: IEEE, 2008. 1608–1613
- 18 Hokayem P F, Stipanovic D M, Spong M W. Semiautonomous control of multiple networked Lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, **19**(18): 2040–2055
- 19 Mei J, Ren W, Ma G. Distributed coordinated tracking for multiple Euler-Lagrange systems. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, USA: IEEE, 2010. 3208–3213
- 20 Spong M W, Hutchinson S, Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2006
- 21 Godsil C, Royle G. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer, 2001
- 22 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 23 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002
- 24 Frangos C, Yavin Y. Inverse control of a three-link manipulator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(40–41): 5311–5324



梅杰 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生。2007 年获吉林大学信息与计算科学专业学士学位。主要研究方向为非线性多智能体系统的协调控制。本文通信作者。

E-mail: jmei@hit.edu.cn

(**MEI Jie** Ph.D. candidate in the Department of Control Science and En-

gineering, Harbin Institute of Technology. He received his

bachelor degree in information and computational science from Jilin University in 2007. His main research interest is coordination of nonlinear multi-agent systems. Corresponding author of this paper.)



张海博 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生。2007 年获哈尔滨理工大学自动化专业学士学位, 2009 年获哈尔滨工业大学控制科学与工程系硕士学位。主要研究方向为航天器编队及无拖曳控制。E-mail: zhanghb@hit.edu.cn

(**ZHANG Hai-Bo** Ph.D. candidate in the Department of Control Science

and Engineering, Harbin Institute of Technology. He received his bachelor degree in automation from Harbin University of Science and Technology in 2007, and his master degree in control science and engineering from Harbin Institute of Technology in 2009. His research interest covers spacecraft formation and drag-free control.)



马广富 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授。分别于 1983 年、1987 年、1993 年在哈尔滨工业大学自动控制专业、控制理论及应用专业、飞行器控制、制导与仿真学科获学士、硕士、博士学位。主要研究方向为航天器姿态控制, 编队卫星飞行控制及非线性控制理论。

E-mail: magf@hit.edu.cn

(**MA Guang-Fu** Professor in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. He received his bachelor degree in automatic control, his master degree in control theory and application, and his Ph.D. degree in control, guidance and simulation from Harbin Institute of Technology, in 1983, 1987 and 1993, respectively. His research interest covers spacecraft attitude control, satellite formation flying, and nonlinear control theory.)