

PI 控制下开环不稳定对象可行 稳定裕度范围的研究

孙明玮¹ 焦纲领² 杨瑞光¹ 陈增强¹

摘要 针对一阶不稳定加延迟对象, 基于传统稳定裕度定义的 PI 控制整定方法缺乏对幅值裕度下边界的考虑, 使得结果与实际有一定偏差. 通过对延迟环节的逼近, 得到更精细的可达稳定裕度区域. 利用多项式方程数值求解算法, 同时获得了另一种以幅值裕度下边界为基准的控制参数整定方法. 所得结果显示, 按照严格稳定裕度定义所得到的可达区域明显减小. 数值实例验证了本文方法的有效性.

关键词 稳定裕度, PI 控制, PM 法, 整定规则

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00385

Feasible Stability Margin Region for Unstable Process with PI Control

SUN Ming-Wei¹ JIAO Gang-Ling² YANG Rui-Guang¹
CHEN Zeng-Qiang¹

Abstract For an unstable-first-order-plus-dead-time plant, the PI tuning formulae based on the conventional stability margin specifications can obtain the feasible stability margin region, however, only the increasing gain margin has been considered. The decreasing gain margin is obtained by Pade approximation of the delay in the framework of the previous tuning rules. The numerical polynomial solving approach is employed to seek the feasible stability margin region. At the same time, a novel tuning rule based on the decreasing gain margin is proposed. The results demonstrate that the feasible region is a small portion of the original one. Finally, some numerical examples are presented to validate the results.

Key words Stability margin, PI control, PM method, tuning rule

时至今日, PID 控制依然在实际工程中占据绝对主导地位, 这主要是由于它的简单、成熟、可靠和有效. 工程中普遍应用的低阶的固定阶次控制器, 重新引起研究人员的重点关注, 得到了一些深入的定量研究结果^[1], 而 PID 控制器则是其中的典型代表. 最近几年, 各种新的 PID 控制参数整定方法依然不断涌现^[2-4]. 稳定裕度, 包括幅值裕度和相位裕度, 在工程中往往被作为重要考核指标, 并与鲁棒性相对应, 具有丰富的工程指导经验. 尽管一些自适应的思想被引入 PID 控制的参数整定中^[5], 但是传统的依据于鲁棒性分析的固定参数控制器还是被普遍使用. 从经典控制理论中可知, 相位裕度还与系统阻尼相关, 直接牵涉到动态响应, 文献 [6]

指出相位裕度指标相对更为重要, 这也与工程实践中的一些经验相吻合. 针对指定的幅值裕度和相位裕度, 进行 PID 控制参数的整定, 在近 20 年来比较热门^[7]. 最经典的方法是在 Nyquist 曲线上通过继电反馈等方式进行图形化数值整定^[8-9]. 实际工程中存在一些开环不稳定对象, 因此针对不稳定对象的 PID 控制参数整定十分有价值^[10-13]. 涉及稳定裕度指标的文献 [11] 直接将 PID 控制形成的零点对消被控对象的极点多项式, 这使得回路传递函数简化为积分延迟环节, 从而可以将幅值裕度和相位裕度配置到特定关系的组合, 这种方法只能实现小概率事件的稳定裕度. 许多实际不稳定对象都可以用一阶不稳定加延迟环节 (Unstable-first-order-plus-dead-time, UFOPDT) 表示, 参数整定也多是围绕这一模型进行的^[10, 12-13]. 一个整定方法如果既能以直观的方式宏观地给出可达性能区域, 从而为控制系统的配置提供参考, 又能以简洁的解析方式给出控制参数的整定公式, 则更容易被工程技术人员所接受. 文献 [14-15] 中利用的 Tester 虽然以图形化的方式给出控制参数的可行区域, 但是难以直接给出可达性能的极限边界. 文献 [10] 通过对反正切函数的近似, 可以得到数值解析解, 不仅形式简单, 而且能够得到可行的性能区域范围, 具有十分重要的参考价值. 但是正如文献 [13] 指出的, 开环不稳定对象存在幅值向上和向下扰动两个边界, 文献 [10] 只研究了上边界, 而在很多情形下, 下边界对于控制性能的约束更为明显. 文献 [13] 采用了迭代的方式来同时考虑幅值裕度上、下边界, 但是算法又略显复杂, 丧失了文献 [10] 中方法直观简洁的优点.

本文通过对延迟环节的近似, 得到对应文献 [10] 中整定方法的幅值裕度下边界, 并通过一系列多项式方程数值求根算法, 得到真正可行的稳定裕度区域, 并针对幅值裕度是在上边界还是下边界实现, 分别给出了不同的整定方法, 具有应用参考价值. 最后的数值实例验证了本文方法的有效性.

1 UFOPDT 基于稳定裕度的 PI 控制参数整定

假设被控对象为

$$G_p(s) = \frac{k_p}{\tau s - 1} e^{-sL} \quad (1)$$

控制器选用传统的 PI 控制:

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \quad (2)$$

假设 A_r 和 ϕ_m 分别是期望的幅值裕度上边界和相位裕度, 并利用如下的近似公式^[10]:

$$\arctan(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases} \quad (3)$$

数值解实例显示涉及到稳定裕度计算的几个反正切函数都可以用式 (3) 中的第 2 式代替^[10], 得到:

$$k_c = \frac{\omega_p \tau}{A_r k_p} \quad (4)$$

$$T_i = \left(\frac{\pi}{2} \omega_p - \omega_p^2 L - \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \quad (5)$$

$$\omega_p = A_r \frac{\phi_m + \frac{\pi}{2}(A_r - 1)}{(A_r^2 - 1)L} \quad (6)$$

收稿日期 2010-06-04 录用日期 2010-10-08
Manuscript received June 4, 2010; accepted October 8, 2010
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2009AA04Z132), 国家自然科学基金 (60774088), 高校博士点基金 (20090031110029) 资助
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2009AA04Z132), National Natural Science Foundation of China (60774088), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20090031110029)
1. 南开大学信息技术科学学院自动化系 天津 300071 2. 海军装备研究院 北京 100161
1. Department of Automation, School of Information Technology, Nankai University, Tianjin 300071 2. Naval Academy of Armament, Beijing 100161

进一步, 通过约束控制器参数的极性^[10], 也就是保证

$$T_i > 0 \quad (7)$$

得到不同的延迟时间与惯性时间比 $r = L/\tau$ 可以实现的稳定裕度区域. 对于确定的 $A_r > 1$, 可行的 ϕ_m 区间为

$$\phi_m \leq \frac{A_r^2 - 1}{A_r} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 4r} \right) - \frac{\pi}{2} (A_r - 1) \quad (8)$$

显然随着这个比例的增大, 可行区域的范围不断减小. 这种近似只能针对幅值裕度上边界, 没有考虑下边界, 而对于不稳定对象, 两个边界都需要兼顾.

2 幅值裕度下边界分析

为了得到幅值裕度下边界, 对于延迟环节进行 Pade 一阶近似:

$$e^{-Ls} \approx \frac{1}{Ls + 1} \quad (9)$$

保证低频部分尽量逼近. 后面的数值实例将说明这种近似的可行性.

按照 Pade 近似, 对象 (1) 转换为

$$G_p(s) \approx \frac{k_p A}{(\tau s - 1)(Ls + 1)} \quad (10)$$

其中, k_p 是对象增益的标称值, 而 A 是增益摄动系数.

经过简单推导, 可以得到闭环特征多项式稳定的充要条件为

$$(\tau - L)(-1 + k_c k_p A) > L\tau \frac{k_c}{T_i} k_p A \quad (11)$$

由式 (5) 和式 (7), 易知

$$T_i > \frac{\tau L}{\tau - L} \quad (12)$$

因此可以解出

$$A > \frac{\tau - L}{k_c k_p \left(\tau - L - \frac{\tau L}{T_i} \right)} = A_l < 1 \quad (13)$$

其中, A_l 就是幅值裕度下边界.

3 可行稳定裕度区域的研究

由于不稳定对象存在幅值裕度上、下两个边界 $A_r > 1$ 和 $A_l < 1$, 考虑到对称性, 幅值裕度取为

$$A_m = \min \left(\frac{1}{A_l}, A_r \right) > 1 \quad (14)$$

利用第 2 节得到的 PI 控制情况下的幅值裕度下边界, 下面分两种情况对所得到的结果进行分析.

3.1 幅值裕度上边界临界

在这种情况下, $A_m = A_r$ 取为上边界, 根据式 (13), 结合整定式 (4)~(6), 有

$$f(\omega_L) = \omega_L^3 - \frac{\pi}{2} \omega_L^2 + \omega_L + A_r^2 r(r-1) \geq 0 \quad (15)$$

其中

$$\omega_L = A_r \frac{\phi_m + \frac{\pi}{2} (A_r - 1)}{A_r^2 - 1} \quad (16)$$

容易看出 $f(\omega_L)$ 严格递增, 有且只有一个正实根. 固定 A_r , 对于 $f(\omega_L) = 0$, 利用数值方法求实根 x_f , 并解出对应 ϕ_m 的最小值:

$$\phi_m \geq (A_r - 1) \left(\frac{A_r + 1}{A_r} x_f - \frac{\pi}{2} \right) \quad (17)$$

综合式 (8) 与式 (17), 就可以得到对应于 A_r 的可行相位裕度区间. 当 A_r 扫过一定范围时, 这些区间包络就构成可行稳定裕度区域.

3.2 幅值裕度下边界临界

在这种情况下, $A_m = 1/A_l$ 取为下边界, 需要满足

$$A_l > \frac{1}{A_r} \quad (18)$$

考虑到幅值裕度的定义, 在这种情况下, 一个设计状态点 (A_m, ϕ_m) 可行当且仅当: $A_m = 1/A_l$, $A_r > 1/A_l$. 换句话说, 就是当 ϕ_m 固定时, 存在 $A_r > A_m$, 使得

$$\frac{\omega_L \tau^2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \omega_L + \omega_L^2 \right)}{A_r L(\tau - L)} = A_m \quad (19)$$

如果记

$$g(A_r) = \frac{\omega_L \tau^2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \omega_L + \omega_L^2 \right)}{A_r L(\tau - L)} \quad (20)$$

则对于固定的 ϕ_m , 满足式 (19) 的 A_m 范围就是函数 $y = g(x)$ 位于直线 $y = x$ 下面部分的值域, 取其与式 (8) 可行解 (固定 ϕ_m , 而把 A_m 作为变量) 的交集. 该值域范围可以采取数值方法进行求解: 首先得到方程的所有实根, 确定满足在直线 $y = x$ 下方部分的区间; 随后在每个区间对 $g(x)$ 求导, 得到所有的极值点, 加上边界点; 对所有上述点求取函数值 $g(x)$, 挑选出最大值和最小值, 就可以得到相应的值域.

下面给出具体的方程求解形式. 根据式 (16), 关系 $x = g(x)$ 可以转化为方程

$$\sum_{i=0}^7 a_i x^i = 0 \quad (21)$$

而

$$g(x) = \frac{\sum_{i=0}^5 b_i x^i}{r(1-r)(x^2-1)^3} \quad (22)$$

和

$$g'(x) = \frac{\sum_{i=0}^{10} c_i x^i}{r(1-r)(x^2-1)^6} \quad (23)$$

这里的 a_i, b_i, c_i 分别是 r 和 ϕ_m 的函数, 参见附录.

对于下边界小于上边界的可行点 (A_m, ϕ_m) , 下面给出另一种控制参数整定方法. 由前面的分析可知, 只需要解方程 (19), 得到满足 $A_r > A_m$ 的解即可. 由可行区域的生成算法可知, 这样的 A_r 存在. 方程 (19) 可以转换为

$$\sum_{i=0}^6 d_i x^i = 0 \quad (24)$$

其中, d_i 是 A_m, r 和 ϕ_m 的函数, 参见附录. 解出相应的 A_r 后, 直接套用整定式 (4)~(6) 即可.

4 数值验证

按照本文的算法, 分别研究了 $r = 0.1, 0.3, 0.5$ 几种情形的可行稳定裕度范围. 图 1 给出了相关结果, 不考虑幅值裕度下边界的可行区域为钟形曲线下方部分, 而考虑后为箭头所示的窄条区域, 仅仅为原来区域的很小一部分, 有明显的压缩. 随着 r 的减小, 可行稳定裕度区域不断扩大. 另外, 结果表明, 在上边界和下边界实现指定的幅值裕度的可行区域完全相同, 但控制参数不同.

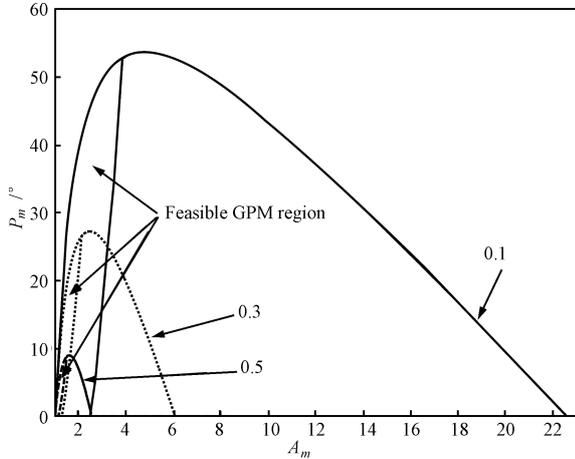


图 1 可行稳定裕度区域
Fig. 1 Feasible GPM region

为了验证本文所采用的 Pade 近似方法和基于幅值裕度上、下边界的两种整定方法的有效性, 以及所得到边界的准确性, 下面给出几个具体数值实例. 其中, 除了例 1 的 $r = 0.3$, 以验证 Pade 近似的有效性外 (从图 1 可见, 当 r 超过 0.3 时, PI 控制的可行稳定裕度范围已经无法保证工程经验上的基本性能), 其他的例子 r 都统一取为 0.1. 所有例子的 k_p 都固定为 1. 控制参数整定结果如表 1 所示 (其中, A_m^* 的符号表示幅值裕度上或下边界临界), 其中, A_m 和 ϕ_m 是设定的幅值和相位裕度, k_c 和 T_i 是整定出来的控制参数, A_m^* 和 ϕ_m^* 是实际的幅值和相位裕度, ω_g (rad/s) 和 A_l 是原系统幅值裕度下边界所对应的穿越频率和裕度, 而 ω_g^* (rad/s) 和 A_l^* 则是近似系统幅值裕度下边界所对应的穿越频率和裕度. 由表 1 的最后 4 列数据可见, 采用 Pade 近似可以很精确地获取幅值裕度下边界的相关信息. 例 1 在文献 [10] 的可行区域内, 但不在图 1 的考虑幅值裕度下边界的可行区域内, 结果也说明了这点. 对于同样的稳定裕度组合, 例 2 和例 3 分别在上、下边界实现幅值裕度, 得到不同的参数整定结果. 例 4 与例 1 类似, 说明了考虑幅值裕度下边界的重要性, 避免对于性能指标可达性的错误判断.

5 结论

本文针对文献 [10] 中没有考虑幅值裕度下边界的不足, 通过对延迟环节的 Pade 近似, 得到了比较准确的下边界数值解析解, 并通过多项式数值求解算法, 得到了可行的稳定裕度区域范围, 所得区域比原区域有明显压缩, 也更准确地反应了实际情况, 避免了对于可达性能的错误估计. 研究发现, 通过幅值裕度上边界和下边界可实现的稳定裕度区域是完全重合的, 但所整定出来的控制参数有明显差异, 同时也给出了以下边界整定控制参数的数值解法. 对于含有一个不稳定模态的二阶不稳定加延迟对象, 可以直接采用对消稳定模态的方法, 在本文的基础上设计 PID 控制器, 与文献 [10] 及类似文献完全相同, 不再赘述. 图形化显示不稳定对象在 PI 控制下的可达性能对于工程研究具有十分重要的参考价值, 避免了指定性能指标的盲目性. 这个结果不仅可以为一些重要设备的选择, 比如, 执行机构特性的确定提供依据, 而且在确认 PI 控制方法确实无法达到设计目标时, 也会主动考虑其他先进控制算法.

附录

$$a_7 = r(1 - r) \tag{A1}$$

$$a_6 = 0 \tag{A2}$$

$$a_5 = \frac{-3a_7 - \pi}{2} \tag{A3}$$

$$a_4 = \left(\frac{\pi^2}{4 + 1} \right) \left(\frac{\pi}{2 - \phi_m} \right) \tag{A4}$$

$$a_3 = 3a_7 + \pi - 3\frac{\pi^3}{8} - \pi\phi_m^2 + \pi^2\phi_m \tag{A5}$$

$$a_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \phi_m \right) \left(\left(\frac{\pi}{2} - \phi_m \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} - 2 \right) \tag{A6}$$

$$a_1 = -a_7 - \frac{\pi}{2} - \pi \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \phi_m \right)^2}{2} \tag{A7}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2} - \phi_m \tag{A8}$$

$$b_5 = -a_5 - 3a_7 \tag{A9}$$

$$b_4 = -a_4 \tag{A10}$$

$$b_3 = -a_3 + 3a_7 \tag{A11}$$

$$b_2 = -a_2 \tag{A12}$$

$$b_1 = -a_1 - a_7 \tag{A13}$$

$$b_0 = -a_0 \tag{A14}$$

$$c_{10} = -b_5 \tag{A15}$$

表 1 PI 控制参数整定结果
Table 1 Results of PI tuning rules

例	A_m	ϕ_m	k_c	T_i	A_m^*	ϕ_m^*	ω_g	A_l	ω_g^*	A_l^*
1	2	15°	2.0362	2.3720	-1.7140	16.9°	0.865	0.5834	0.857	0.5991
2	3	45°	4.9087	2.2419	3.0061	45.4°	0.722	0.2138	0.722	0.2143
3	3	45°	3.1709	2.0612	-3.0095	45.3°	0.755	0.3323	0.755	0.3334
4	5	45°	2.9452	2.2426	-2.8054	45.3°	0.722	0.3565	0.722	0.3573

$$c_9 = -2b_4 \quad (\text{A16})$$

$$c_8 = -3b_5 - 3b_3 \quad (\text{A17})$$

$$c_7 = -4b_2 \quad (\text{A18})$$

$$c_6 = 9b_5 + 3b_3 - 5b_1 \quad (\text{A19})$$

$$c_5 = 6b_4 + 6b_2 - 6b_0 \quad (\text{A20})$$

$$c_4 = -5b_5 + 3b_3 + 9b_1 \quad (\text{A21})$$

$$c_3 = -4b_4 + 12b_0 \quad (\text{A22})$$

$$c_2 = -3b_3 - 3b_1 \quad (\text{A23})$$

$$c_1 = -2b_2 - 6b_0 \quad (\text{A24})$$

$$c_0 = -b_1 \quad (\text{A25})$$

$$d_6 = a_7 A_m \quad (\text{A26})$$

$$d_5 = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{A27})$$

$$d_4 = a_4 - 3d_6 \quad (\text{A28})$$

$$d_3 = a_3 - 3a_7 \quad (\text{A29})$$

$$d_2 = a_2 + 3d_6 \quad (\text{A30})$$

$$d_1 = a_1 + a_7 \quad (\text{A31})$$

$$d_0 = a_0 - d_6 \quad (\text{A32})$$

References

- Keel L H, Bhattacharyya S P. Controller synthesis free of analytical models: three term controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(6): 1353–1369
 - Karimi A, Kunze M, Longchamp R. Robust controller design by linear programming with application to a double-axis positioning system. *Control Engineering Practice*, 2007, **15**(2): 197–208
 - Shamsuzzoha M, Lee M Y. Design of advanced PID controller for enhanced disturbance rejection of second-order processes with time delay. *American Institute of Chemical Engineers*, 2008, **54**(6): 1526–1536
 - Seki H, Shigemasa T. Retuning oscillatory PID control loops based on plant operation data. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(2): 217–227
 - Wang Ya-Gang, Xu Xiao-Ming. Adaptive and optimal PI controller with robustness. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(10): 1352–1356
(王亚刚, 许晓鸣. 自适应鲁棒最优 PI 控制器. 自动化学报, 2009, **35**(10): 1352–1356)
 - Ho W K, Lim K W, Hang C C, Ni L Y. Getting more phase margin and performance out of PID controllers. *Automatica*, 1999, **35**(9): 1579–1585
 - Lee C H. A survey of PID controller design based on gain and phase margins. *International Journal of Computational Cognition*, 2004, **2**(3): 63–100
 - Chen Fu-Xiang, Yang Zhi-Xiong. Self-tuning PM method and its formulas deduction in PID regulators. *Acta Automatica Sinica*, 1993, **19**(6): 736–740
(陈福祥, 杨芝雄. PID 调节器自整定的 PM 法及其公式推导. 自动化学报, 1993, **19**(6): 736–740)
 - Chai Tian-You, Zhang Gui-Jun. A new self-tuning of PID regulators based on phase and amplitude margin specifications. *Acta Automatica Sinica*, 1997, **23**(2): 167–172
(柴天佑, 张贵军. 基于给定的相角裕度和幅值裕度的 PID 参数自整定新方法. 自动化学报, 1997, **23**(2): 167–172)
 - Ho W K, Xu W. PID tuning for unstable processes based on gain and phase-margin specifications. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 1998, **145**(5): 392–396
 - Wang Y G, Cai W J. Advanced proportional-integral-derivative tuning for integrating and unstable processes with gain and phase margin specifications. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 2002, **41**(12): 2910–2914
 - Paraskevopoulos P N, Pasgianos G D, Arvanitis K G. New tuning and identification methods for unstable first order plus dead-time processes based on pseudoderivative feedback control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, **12**(3): 455–464
 - Paraskevopoulos P N, Pasgianos G D, Arvanitis K G. PID type controller tuning for unstable first order plus dead time processes based on gain and phase margin specifications. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, **14**(5): 926–936
 - Chang C H, Han K W. Gain margins and phase margins for control systems with adjustable parameters. *Journal of Guidance*, 1990, **13**(3): 404–408
 - Ou Lin-Lin, Gu Dan-Ying, Zhang Wei-Dong. Optimal tuning method of PID controller based on gain margin and phase margin. *Control Theory and Applications*, 2007, **24**(5): 837–840
(欧林林, 顾诞英, 张卫东. 基于幅值裕度和相位裕度的 PID 参数最优整定方法. 控制理论与应用, 2007, **24**(5): 837–840)
- 孙明玮 南开大学副教授. 主要研究方向为飞行控制和过程控制. 本文通信作者. E-mail: sun_mingwei@yahoo.com.cn
(**SUN Ming-Wei** Associate professor at Nankai University. His research interest covers flight control and process control. Corresponding author of this paper.)
- 焦纲领 海军装备研究院工程师. 主要研究方向为计算机控制与仿真. E-mail: jglxyl@sina.com
(**JIAO Gang-Ling** Engineer at Naval Academy of Armament. His research interest covers computer control and simulation.)
- 杨瑞光 南开大学博士研究生. 主要研究方向为自抗扰控制. E-mail: yang_rui_guang@163.com
(**YANG Rui-Guang** Ph.D. candidate at Nankai University. His main research interest is active disturbance rejection control.)
- 陈增强 南开大学教授. 主要研究方向为智能预测控制和复杂网络. E-mail: chenzq@nankai.edu.cn
(**CHEN Zeng-Qiang** Professor at Nankai University. His research interest covers intelligent predictive control and complex networks.)