

# 基于 $H_\infty$ 范数优化的干扰观测器的鲁棒设计

尹正男<sup>1</sup> 苏剑波<sup>1</sup> 刘艳涛<sup>1</sup>

**摘要** 研究干扰观测器的鲁棒优化设计方法,应用  $H_\infty$  范数定义干扰观测器的优化性能评价函数,把低通滤波器的设计问题转换为  $H_\infty$  闭环回路成形问题. 通过适当处理相对阶次条件等约束,把带有约束的回路成形问题转换成无约束的  $H_\infty$  标准问题,然后利用  $H_\infty$  标准问题的求解算法设计滤波器. 此外,探讨了性能与频率加权函数的关系,并在此基础上提出了加权函数的选取方法. 实验结果证明该方法设计简单,且具有最优性和系统性.

**关键词** 高性能鲁棒运动控制, 干扰观测器,  $H_\infty$  标准控制问题, 低通滤波器, 2 自由度控制系统

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00331

## Design of Disturbance Observer with Robust Performance Based on $H_\infty$ Norm Optimization

YIN Zheng-Nan<sup>1</sup> SU Jian-Bo<sup>1</sup> LIU Yan-Tao<sup>1</sup>

**Abstract** This paper proposes a robust design method of disturbance observer (DOB), employs the  $H_\infty$  norm to define the optimization performance evaluation function of the DOB, and transforms the low-pass filter design into an  $H_\infty$  closed loop shaping problem. By appropriate processing the constraints such as relative order condition etc., the loop shaping problem with constraints can be transformed into an  $H_\infty$  standard problem without constraints, and then the algorithms for standard problems can be applied to the design of the filter. Furthermore, the relationship between performance and frequency weighted functions is investigated, based on which the selection method of weighted functions is presented. The experimental results validate the optimality and systematicness of the proposed method, which is easy to implement.

**Key words** High-performance robust motion control, disturbance observer (DOB),  $H_\infty$  standard control problem, low-pass filter, two degrees of freedom control system

基于干扰观测器 (Disturbance observer, DOB) 的鲁棒控制<sup>[1-3]</sup>是实现受控对象 (如: 机器人关节) 高性能、高精度运动控制的有效方法. 目前, 闭环运动控制系统已发展到由内环和外环控制器组成的 2 自由度结构形式. 内环控制的主要目的是抑制来自于外界的干扰, 增强系统对被控对象参数摄动的鲁棒性; 外环控制的目的是实现期望的目标轨迹跟踪性能. 作为鲁棒内环控制器, 目前最常采用结构简单、鲁棒性好的干扰观测器<sup>[4-8]</sup>. 干扰观测器由受控对象标称模型的逆模型和低通滤波器构成. 由于对干扰和噪声的抑制性能及对模型摄动的鲁棒性均取决于低通滤波器, 因此, 低通滤波器设计是干扰观测器设计的关键.

文献 [1] 提出在设计干扰观测器时, 把干扰看作一个变化速度可忽略的状态, 构造 Gopinath 状态

观测器, 通过调整观测器的极点改善对干扰的抑制性能. 文献 [2] 以最简单的一阶惯性环节作为低通滤波器, 通过检测噪声的频率特性来调整惯性环节的时间常数, 此方法因结构简单得到广泛应用<sup>[9-14]</sup>. 后来人们发现, 低通滤波器的阶次越高, 抑制干扰和噪声的性能就越强<sup>[15]</sup>, 因此, 人们普遍采用阶次较高的滤波器. 文献 [3-4, 15] 注意到该点, 引入了 Butterworth 滤波器和二项系数滤波器. 文献 [5] 试图把一些补充参数添加到高阶 (3 阶及 4 阶) 二项系数滤波器中以改善系统的鲁棒稳定性. 此后出现的干扰观测器多为二项系数型<sup>[16-17]</sup> 和 Butterworth 型<sup>[3]</sup>, 或者是通过试错法 (Trial and error) 获取相对较优的滤波器. 也有学者在滤波器结构固定的情况下, 按照设计要求调整相应系数的大小, 获取较优的滤波器<sup>[18]</sup>.

Butterworth 型和二项系数型滤波器都以通频带上的频率特性尽量平滑为目的; 而干扰观测器中的低通滤波器则应满足鲁棒稳定性等控制系统固有的约束, 同时, 尽量消除外界干扰和模型误差对系统的影响. 因此, 使用前述两种滤波器设计干扰观测器中的滤波器具有局限性, 应当建立滤波器性能评价准则, 并创新设计方法.

收稿日期 2010-06-11 录用日期 2010-10-22  
Manuscript received June 11, 2010; accepted October 22, 2010  
国家自然科学基金重点项目 (60935001), 教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-06-0398) 资助

Supported by Key Project of National Natural Science Foundation of China (60935001) and New Century Educational Talents Plan of Chinese Education Ministry (NCET-06-0398)

1. 上海交通大学电子信息与电气工程学院 上海 200240  
1. School of Electronic Information and Electric Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240

有学者试图以  $H_\infty$  范数为评价函数设计干扰观测器的低通滤波器. 例如, 文献 [15] 把干扰观测器系统的灵敏度函数和补灵敏度函数的  $H_\infty$  范数定义为评价函数, 但因为灵敏度函数和补灵敏度函数之和恒等于 1 而无法同时最小化, 所以不能用于低通滤波器的优化设计.

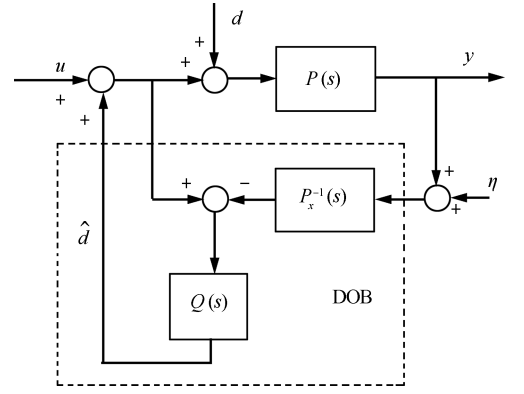
还有学者提出在  $H_\infty$  控制理论的框架内设计干扰观测器的方法. 文献 [19–20] 引入扩展  $H_\infty$  控制方法 (Extended  $H_\infty$  control method) 设计具有积分型干扰抑制性能的  $H_\infty$  控制器. 文献 [21] 通过  $H_\infty$  范数的线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 最优化设计具有单位 DC 增益的  $Q$ -滤波器. 前者虽然保证基于积分作用的干扰抑制性能和鲁棒稳定性, 但由于干扰观测器和外环反馈控制器的设计在同一个设计框架内进行, 因此无法实现干扰观测器系统的本原功能, 即 2 自由度性能. 后者把干扰观测器和外环反馈控制器分开设计, 虽然能保持 2 自由度性能, 但此  $Q$ -滤波器设计包含由外环控制器和受控对象组成的灵敏度函数, 因此滤波器的具体设计 (如: 阶次和零极点配置) 仍受外环控制器影响. 在设计干扰观测器中的  $Q$ -滤波器时, 设计指标中不仅应包括低频和高频带上的频率特性, 还应包括阶次及相对阶次条件和内模阶次条件等<sup>[15]</sup>. 上面提到的基于  $H_\infty$  控制理论的  $Q$ -滤波器设计方法虽然能保证一定的频率特性和鲁棒性, 但无法满足阶次及相对阶次条件, 更不能保证内模阶次条件, 而这些条件恰恰是设计干扰观测器时的重要指标.

由以上的  $Q$ -滤波器设计方法可得到结论: 1) 需要建立低通滤波器的优化评价函数, 此评价函数既要反映包括相对阶次条件和内模阶次条件在内的具体设计指标和频率特性, 又能直接应用于设计过程; 2) 需要开发系统性的干扰观测器设计方法. 从上述分析与观点出发, 本文研究反映具体对象条件和控制目标的评价函数及其优化求解方法, 采用  $H_\infty$  闭环回路成形方法, 设计干扰观测器中的低通滤波器. 本文结构安排如下: 首先, 用干扰观测器系统的灵敏度函数与补灵敏度函数的加权  $H_\infty$  范数定义  $Q$ -滤波器评价函数 (评价函数以阶次及相对阶次条件包含为约束, 并以内模阶次和频率特性为设计指标). 其次, 利用反馈回路的性质把带约束  $Q$ -滤波器设计问题变成无约束  $H_\infty$  标准控制设计问题, 以求解. 再次, 考察反映内模阶次条件的加权函数的选择方法, 并通过设计实例验证所提设计方法的有效性, 文末给出结论. 文中带“~”标的传递函数为用于理论分析引入的传递函数; 带“\*”标的标识表示最优

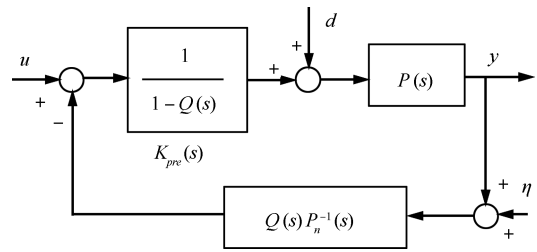
化过程得到的最优解或由最优解组成的传递函数.

### 1 干扰观测器设计的性能评价函数

图 1 显示了干扰观测器及其等效系统的结构, 其中,  $d$ 、 $\hat{d}$ 、 $\eta$  分别表示干扰信号、干扰估计信号和检测噪声,  $P_n(s)$  和  $Q(s)$  分别是受控对象  $P(s)$  的标称模型和低通滤波器. 图 1 中的虚线框架内结构是干扰观测器, 由逆模型和低通滤波器 ( $Q$ -滤波器) 两部分组成.



(a) System of DOB



(b) Equivalent system of DOB

图 1 干扰观测器系统的框图

Fig. 1 Block diagram of DOB system

干扰观测器的任务是消除外部干扰  $d$  和模型失配对系统的影响. 低通滤波器  $Q(s)$  不仅使逆模型在物理上可实现, 还能抑制检测噪声并保证系统对模型失配的鲁棒稳定性. 下面讨论  $Q$ -滤波器设计时应考虑的几个重要设计指标.

#### 1.1 频率特性

图 1 的系统输入输出模型为

$$y = \frac{P_n P}{P_n + (P - P_n)Q} u - \frac{PQ}{P_n + (P - P_n)Q} \eta - \frac{P_n P(1 - Q)}{P_n + (P - P_n)Q} \tilde{d} = G_{yr}(s)u - G_{y\eta}(s)\eta - G_{yd}(s)\tilde{d} \quad (1)$$

式中,  $\tilde{d}$  是包含外部干扰  $d$  和模型失配所引起的内部干扰的整个等效干扰. 当受控对象和模型一致时 (这种情况下  $\tilde{d} = d$ ), 式 (1) 可写为

$$y = P_n(s)u - Q(s)\eta - P_n(s)(1 - Q(s))\tilde{d} \quad (2)$$

由上式可知, 干扰经过  $Q_C(s) = 1 - Q(s)$  (灵敏度函数) 作用于系统, 而检测噪声经过  $Q(s)$  (补灵敏度函数) 作用于系统. 如果  $Q_C(s)$  和  $Q(s)$  分别对干扰  $d$  和噪声  $\eta$  具有截止性能, 式 (2) 等号右端的第 2 项和第 3 项为零, 整个系统就固定于不受到干扰和检测噪声作用的标称模型  $P_n(s)$ .  $Q_C(s)$  还反映干扰观测器系统的灵敏度特性, 如果令其在系统动作频段尽量小, 即使实际对象和标称模型之间存在高频误差, 也能有效保证干扰抑制性能和对模型变动的鲁棒性. 因此, 无论模型是否存在误差, 只要灵敏度函数  $Q_C(s)$  和补灵敏度函数  $Q(s)$  设计得足够小, 就能保证干扰观测器的最优化性能, 所以, 干扰观测器设计的关键是低通滤波器的设计. 由于  $Q_C(s)$  和  $Q(s)$  的和恒等于 1, 这两个传递函数不可能同时任意小, 设计时需要进行折衷. 实际情况干扰  $d$  的频谱位于低频带, 噪声  $\eta$  处于高频带, 因此设计时应考虑此特性, 使  $Q_C(s)$  和  $Q(s)$  分别在低频带和高频带上足够小. 同  $H_\infty$  控制的混合灵敏度问题一样, 可以用频率加权函数解决此频率折衷问题. 经上述分析, 我们定义  $Q$ -滤波器的频率设计指标为

$$\max_{Q(s) \in RH_\infty} \|W_1(s)Q_C(s)\|_\infty < 1 \quad (3)$$

$$\|W_2(s)Q(s)\|_\infty < 1 \quad (4)$$

式中,  $W_1(s)$  和  $W_2(s)$  分别是反映干扰频谱特性的低通加权函数和反映检测噪声频谱特性的高通加权函数. 式 (3) 和式 (4) 意味着, 在把检测器噪声的影响压到一定水平下的条件下, 把干扰的影响在按照  $W_1(s)$  给定的频段内尽量减小.

### 1.2 鲁棒稳定性

由式 (2) 可知,  $Q(s)$  在模型匹配 ( $P(s) = P_n(s)$ ) 时必须具有稳定性 (标称稳定性条件). 另一方面, 系统运行时被控对象的变动会引起干扰观测器反馈系统的稳定性劣化. 因此, 设计  $Q$ -滤波器时, 必须考虑系统对实际对象和标称模型间匹配误差的鲁棒稳定性. 设对象可用如下乘型不确定摄动描述:

$$P(s) = P_n(s)[I + \Delta(s)] \quad (5)$$

其中,  $\Delta(s) \in RH_\infty$  为摄动传递函数. 本文关注含准稳定环节 (如: 积分环节) 在内的稳定对象和存在相同不稳定极点的被控对象及其标称模型, 二者是一般伺服系统 (如: 机器人关节系统) 惯有的控制对象. 由图 1(b) 可知, 与摄动  $\Delta$  形成反馈环的确定部分的传递函数为  $Q(s)$ . 根据小增益定理 (Small gain theorem), 整个闭环系统鲁棒稳定的充分条件满足下式:

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)Q(j\omega)) < 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

假定幅频上限为  $W_T(s)$ , 即  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < |W_T(j\omega)|$ ,  $0 \leq \omega \leq \infty$ , 用  $H_\infty$  范数表示为

$$\|W_T(s)Q(s)\|_\infty < 1 \quad (6)$$

式 (6) 与式 (4) 都是对  $Q$ -滤波器本身的加权范数限制约束. 这说明噪声抑制问题和鲁棒稳定问题都落到  $Q(s)$  的范数限制问题. 虽然检测噪声和模型不确定性都在高频上, 但其具体频率特性不同,  $W_2(s)$  与  $W_T(s)$  的频率带宽不同. 因此在  $Q$ -滤波器的设计时应考虑这一点设定加权函数  $W_Q(s)$ .

### 1.3 阶次及相对阶次条件

干扰观测器系统必须包含被控对象的标称逆模型  $P_n^{-1}(s)$ , 且该模型具有非真性而无法独立实现. 但由图 1(b) 可知, 只要  $Q(s)P_n^{-1}(s)$  可实现, 整个系统就能够实现. 这表明  $Q(s)$  的相对阶次必须等于或大于  $P_n(s)$  的相对阶次. 因此,  $Q(s)$  的相对阶次是滤波器设计的重要指标 (下面用  $k$  表示相对阶次指标), 但这一设计指标对开发系统性的设计算法造成极大的难度, 截至目前除了援引典型的滤波器设计方法 (如: Butterworth 或二项系数等) 设计  $Q$ -滤波器之外, 尚无考虑相对阶次条件的系统性设计方法. 同时,  $Q$ -滤波器的阶次也是主要设计指标之一, 应该加入到评价函数中 (下面用  $n$  表示阶次指标).

### 1.4 内模阶次条件

假设干扰  $d(t) = p_q t^q + p_{q-1} t^{q-1} + \dots + p_0$  能够被抑制, 由内模原理<sup>[22]</sup> 知道干扰前段的控制器  $K_{\text{pre}}(s)$  必须包括其传递函数模型, 即含有  $q+1$  个积分环节  $1/s^{q+1}$ . 因此, 为了使  $K_{\text{pre}}(s) = [1 - Q(s)]^{-1}$  含有  $q+1$  个积分环节,  $Q(s)$  必须具有相应的传递函数结构. 这样,  $q$  反映了  $Q$ -滤波器的主要性能, 它表示能够抑制的干扰阶次, 应把  $q$  作为设计指标加入到设计过程中. 现有基于  $H_\infty$  控制理论的干扰观测器设计方法忽视该指标, 只考虑对常值干扰的抑制性能.

### 1.5 干扰观测器的性能评价函数

根据上述  $Q$ -滤波器的设计指标, 定义干扰观测器系统的性能评价函数为

$$\max \gamma, \min_{\substack{Q \in \Omega_k \\ Q \in RH_\infty}} \left\| \begin{bmatrix} \gamma W_C(1-Q) \\ W_Q Q \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (7)$$

其中

$$\Omega_k = \left\{ F(s) \mid F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \right. \\ \left. \deg(D(s)) - \deg(N(s)) \geq k \right\} \quad (8)$$

是满足相对阶次条件的有理传递函数的集合,  $k$  是给定的低通滤波器相对阶次设计条件.  $W_C(s)$  是反映干扰频率特性的频率加权函数, 与式 (3) 的  $W_1(s)$  相同.  $W_Q(s)$  是检测噪声及模型摄动频率特性的频率加权函数, 通过考虑  $W_2(s)$  和  $W_T(s)$  的频率特性选择, 具体选取方法在第 4 节详细说明.  $Q$ -滤波器的阶次条件和内模阶次设计条件反映在此加权函数, 其具体选取方法也在第 4 节详细说明. 式 (7) 通过  $\gamma$ -最优化, 达到式 (3) 和式 (4) 所提出的频率设计目的, 以保证给定的鲁棒稳定性和噪声抑制性能的同时, 得到最优干扰抑制性能. 式 (7) 表明干扰观测器  $Q$ -滤波器的设计与对象模型本身无关, 模型失配的信息已反映到加权函数  $W_Q(s)$  中.

## 2 基于 $H_\infty$ 范数优化的低通滤波器设计问题的求解

评价函数 (7) 本质上代表混合灵敏度最优化问题, 但因为干扰观测器中低通滤波器固有的设计指标而包含比较复杂的范数条件和阶次及相对阶次等约束, 所以无法利用  $H_\infty$  标准问题的求解方法, 应寻求式 (7) 的系统性的求解算法.

### 2.1 变换为 $H_\infty$ 标准控制问题

定义如下的虚拟回路传递函数  $\tilde{L}(s)$

$$\tilde{L}(s) = \frac{Q(s)}{1-Q(s)} \quad (9)$$

则干扰观测器系统的灵敏度函数  $Q(s)$  和补灵敏度函数  $Q_C(s)$  为

$$Q(s) = \frac{\tilde{L}(s)}{1+\tilde{L}(s)}$$

$$Q_C(s) = 1 - Q(s) = \frac{1}{1+\tilde{L}(s)} \quad (10)$$

由上式看出,  $\tilde{L}(s)$  在虚拟定义的回路中可看为开环系统传递函数 ( $\tilde{L}(s)$  本质上相当于图 1 (b) 所示系统在模型完全匹配时的开环传递函数);  $\tilde{L}(s) \in \Omega_k$  当且仅当其闭环回路稳定传递函数  $Q(s) \in \Omega_k$ ;  $\tilde{L}(s)$  的相对阶次反映了  $Q(s)$  的相对阶次.

考虑式 (9) 和 (10), 式 (7) 的  $H_\infty$  函数优化问题可写为

$$\max \gamma, \min_{\substack{\tilde{L} \in \Omega_k \\ \tilde{L} \in \Pi}} \left\| \begin{bmatrix} \gamma W_C(1+\tilde{L})^{-1} \\ W_Q \tilde{L}(1+\tilde{L})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (11)$$

其中,  $\Pi$  定义为使此闭环系统稳定的所有开环传递函数的集合. 这样, 将式 (7) 求解最优闭环传递函数的问题转化为式 (11) 求解最优开环传递函数的问题, 两式的解满足式 (10). 但约束  $\tilde{L}(s) \in \Omega_k$  仍存于优化问题中, 式 (11) 还无法直接求解. 因此, 把开环回路传递函数  $\tilde{L}(s)$  分解为虚拟受控对象和虚拟控制器两个因子, 即

$$\tilde{L}(s) = \tilde{P}(s)\tilde{K}(s) \quad (12)$$

其中,  $\tilde{P}(s)$  为虚拟受控对象,  $\tilde{K}(s)$  为虚拟控制器.

**假设 1.** 设  $\tilde{P}(s)$  满足如下假定: 1) 所有极点位于复左半平面上; 2) 除了无限零点以外, 无任何别的零点; 3)  $\tilde{P}(s) \in \Omega_k$ ,  $\tilde{P}(s) \in RH_\infty$ .

注意: 虚拟受控对象  $\tilde{P}(s)$  与实际受控对象  $P(s)$  无关, 只反映标称模型  $P_n(s)$  的相对阶次信息, 用于实现开环回路的相对阶次指标;  $\tilde{L}(s)$  的分解与实际被控对象没有关系. 现在的目的是求解满足式 (11) 的最优化开环传递函数  $\tilde{L}(s)$ , 而且对  $\tilde{L}(s)$  的约束只是  $\tilde{L}(s) \in \Omega_k \cap \Pi$ .

考察如下最优化问题:

$$\max \gamma, \min_{\tilde{K} \in \Pi} \left\| \begin{bmatrix} \gamma W_C(1+\tilde{P}\tilde{K})^{-1} \\ W_Q \tilde{P}\tilde{K}(1+\tilde{P}\tilde{K})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (13)$$

**定理 1.** 若  $H_\infty$  范数优化问题 (13) 中的受控对象  $\tilde{P}(s)$  满足假设 1 所示的条件, 则由此最优化问题的最优补偿器解  $\tilde{K}^*$  和  $\tilde{P}(s)$  构成的最优开环系统  $\tilde{L}^*$  与此受控对象  $\tilde{P}(s)$  的具体选择无关且唯一.

**证明.** 设受控对象  $\tilde{P}(s)$  满足假设 1, 且和最优控制器  $\tilde{K}^*(s)$  使式 (13) 的范数最小.  $\tilde{P}(s)$  有  $k$  个稳定极点  $p_i^*$  ( $i = 1, \dots, k$ ). 由回路成形理论知, 式

(13) 的最优化解  $\tilde{K}^*(s)$  一定含有由这个零点组成的因子.

$$\tilde{K}^*(s) = \tilde{K}_0(s) \prod_{i=1}^k (s + p_i^*)$$

式中,  $\tilde{K}_0(s)$  是最优开环传递函数, 因为成立  $\tilde{L}^*(s) = \tilde{P}(s)\tilde{K}^*(s) = \tilde{K}_0(s)$ . 再考虑满足假设 1 的其他  $\tilde{P}_1(s)$ , 它的  $k$  个极点为  $\tilde{p}_i (i = 1, \dots, k)$  且  $\tilde{p} \neq p^*$  (全部或部分不同). 在式 (13) 的范数最小条件下, 补偿器

$$\tilde{K}_1(s) = \tilde{K}_0(s) \prod_{i=1}^k (s + p_i)$$

是最优化问题 (13) 对  $\tilde{P}_1(s)$  的解, 因  $\tilde{K}_1(s)$  和  $\tilde{P}_1(s)$  中不存在不稳定零点对消, 故闭环系统内部稳定.  $\tilde{K}^*(s)$  和  $\tilde{K}_1(s)$  的结果证明, 开环传递函数  $\tilde{K}_0(s)$  唯一, 式 (13) 范数不变.  $\square$

由此定理可知, 在给定的对象阶次及相对阶次条件下只要对象满足假设 1, 由式 (13) 的解  $\tilde{K}^*(s)$  和  $\tilde{P}(s)$  来组成的开环系统  $\tilde{L}^*(s)$  与受控对象  $\tilde{P}(s)$  的具体形式无关, 具有唯一性.

**引理 1.** 对满足假设 1 的任意受控对象  $\tilde{P}(s)$ , 以下两个  $H_\infty$  范数最优化问题 (11) 和 (13) 的解在式 (12) 的关系下完全等价:

$$\min_{\substack{\tilde{L} \in \Omega_k \\ \tilde{L} \in \Pi}} \left\| \begin{bmatrix} \gamma W_C(1 + \tilde{L})^{-1} \\ W_Q \tilde{L}(1 + \tilde{L})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \min_{\tilde{K} \in \Pi} \left\| \begin{bmatrix} \gamma W_C(1 + \tilde{P}\tilde{K})^{-1} \\ W_Q \tilde{P}\tilde{K}(1 + \tilde{P}\tilde{K})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (14)$$

且

$$\tilde{L}^*(s) = \tilde{P}(s)\tilde{K}^*(s) \quad (15)$$

其中,  $\tilde{L}^*(s)$  和  $\tilde{K}^*(s)$  分别是式 (11) 和式 (13) 的最优解.

同定理 1 的证明类似, 引理 1 容易得证. 这里不再赘述.

定理 1 和引理 1 提供了用普通的  $H_\infty$  标准控制问题的框架设计干扰观测器  $Q$ -滤波器的重要的依据. 式 (12) 是一般  $H_\infty$  混合灵敏度问题, 且能采用  $H_\infty$  标准问题的求解方法求其优化解.  $\tilde{K}^*(s)$  的阶次不超过标准问题的广义受控对象的阶次, 即加权函数的阶次和虚拟受控对象  $\tilde{P}(s)$  的和, 而且最优开环传递函数  $\tilde{L}^*(s)$  的阶次等于  $\tilde{K}^*(s)$ , 因为  $\tilde{P}(s)$  的

所有极点被  $\tilde{K}^*(s)$  的零点对消. 因  $\tilde{K}^*(s)$  的真性且  $\tilde{L}^*(s)$  满足相对阶次条件  $\tilde{L}^*(s) \in \Omega_k$ , 因此,  $Q^*(s)$  满足相对阶次条件  $Q^*(s) \in \Omega_k$ .

## 2.2 最优 $Q$ -滤波器的求解流程

依据上述内容, 可建立干扰观测器低通滤波器设计的一般步骤.

**步骤 1.** 给定加权函数和相对阶次条件  $k$  (注意:  $Q^*(s)$  的整体阶次取决于加权函数的阶次和在  $\tilde{P}(s)$  中反映的相对阶次);

**步骤 2.** 任意选取满足假设 1 的虚拟受控对象  $\tilde{P}(s)$  (相对阶次条件  $k$  在此反映);

**步骤 3.** 按照  $H_\infty$  标准问题的求解框架, 求式 (13) 的最优解  $\tilde{K}^*(s)$ ;

**步骤 4.** 按式 (15) 求最优开环传递函数  $\tilde{L}^*(s)$ , 然后再按式 (10) 求最优  $Q$ -滤波器  $Q^*(s)$ .

值得注意的是  $Q^*(s)$  的阶次等于  $\tilde{K}^*(s)$  的阶次, 而且  $\tilde{K}^*(s)$  的阶次取决于加权函数的阶次和相对阶次, 所以通过加权函数和虚拟受控对象的适当选择, 能达到期望的  $Q^*(s)$  的整体阶次  $n$ . 选取步骤 1 的加权函数时, 除应考虑阶次条件之外, 还应反映内模阶次条件, 这一内容在下节讨论. 至于标准问题的求解方法, 包括基于代数 Riccati 方程的状态空间求解法<sup>[23]</sup> 在内, 有数种系统性的方法, 这里不予详述.

## 2.3 $Q$ -滤波器的伺服条件

无论内模阶次指标  $q \geq 0$  多大, 干扰观测器系统对常数干扰就具有消除性能. 假如没有给出内模阶次指标, 系统可能不会满足常数干扰消除性能即伺服性能, 而这是伺服系统最基础的性能要求. 在步骤 3 的标准问题求解过程中, 通过自由参数的调整, 能实现此要求.

由图 1(b) 可知, 为使系统具有伺服性能须  $Q(0) = 1$ , 即  $\tilde{K}^*(s)$  须有一个以上的积分器, 但  $H_\infty$  标准问题的中心解一般没有积分器, 可以通过标准问题的参数化解集中的参数调整得到带有积分器的特殊解. 下面就这一结果进行讨论.

**定理 2.** 假定  $\sigma(W_C(0)) < \infty$  (这意味着没有提出内模阶次设计指标). 在标准问题的框架内求解满足  $H_\infty$  范数优化性能指标式 (7) 的低通滤波器  $Q(s)$  时, 满足伺服条件  $Q(0) = 1$  的解存在于解集中的必要条件是  $W_Q(s)$  满足  $\sigma(W_Q(0)) < 1$ .

**证明.** 设  $Q(s)$  由标准问题的解  $\tilde{K}^*(s)$  和式 (10)、式 (12) 构成, 则为使

$$\left\| \begin{bmatrix} \gamma W_C(1 + \tilde{P}\tilde{K})^{-1} \\ W_Q\tilde{P}\tilde{K}(1 + \tilde{P}\tilde{K})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

成立, 须有下式成立:

$$\bar{\sigma} \left( \begin{bmatrix} \gamma W_C(0)(1 + \tilde{P}(0)\tilde{K}(0))^{-1} \\ W_Q(0)\tilde{P}(0)\tilde{K}(0)(1 + \tilde{P}(0)\tilde{K}(0))^{-1} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\bar{\sigma} \left( \begin{bmatrix} \gamma W_C(0)(1 - Q(0)) \\ W_Q(0)Q(0) \end{bmatrix} \right) < 1$$

该式表明, 在  $\bar{\sigma}(W_C(0)) < \infty$  的情况下, 使  $Q(0) = 1$  成立, 须有

$$\bar{\sigma} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ W_Q(0) \end{bmatrix} \right) = \bar{\sigma}(W_Q(0)) < 1 \quad (16)$$

由此定理得证. □

定理 2 说明  $Q$ -滤波器要满足静态条件,  $W_Q(s)$  的 DC 增益必须小于 1. 当频率加权函数满足此条件时, 式 (13) 的最优化解  $\tilde{K}^*(s)$  一定具有积分器才能保证  $Q(0) = 1$ , 而标准问题的中心解无法保证此性能, 需要通过解参数化形式的自由参数的调整解决该问题. 标准问题的一般解有如下的参数化形式<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(s) = LFT(\hat{K}(s), U(s)) = & \hat{K}_{11}(s) + \\ & \hat{K}_{12}(s)U(s)(I - \hat{K}_{22}(s)U(s))^{-1}\hat{K}_{21}(s) \end{aligned} \quad (17)$$

式中,  $\hat{K}(s) = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11}(s) & \hat{K}_{12}(s) \\ \hat{K}_{21}(s) & \hat{K}_{22}(s) \end{bmatrix}$  和  $U(s)$  分别是标准问题的一般解和自由参数,  $LFT(\cdot)$  为线性分数变换算子, 其框图如图 2 所示. 图中  $G(s)$  是标准问题的广义受控对象, 由  $W_C(s)$ 、 $W_Q(s)$  和  $\tilde{P}(s)$  组成.  $U(s) \in RH_\infty$ ,  $\|U(s)\|_\infty < 1$  的自由参数  $U(s)$  表示满足范数限制条件 (式 (13)) 的整个稳定化控制器解集合 (式 (17)).

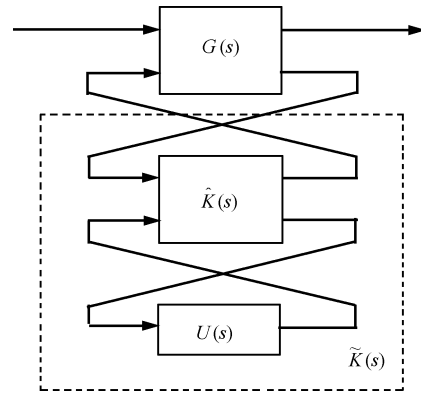


图 2  $\tilde{K}(s)$  用  $U(s)$  的参数化表现  
Fig. 2 The parameterization of  $\tilde{K}(s)$  with  $U(s)$

**定理 3.** 在满足  $\bar{\sigma}(W_C(0)) < \infty$ ,  $\bar{\sigma}(W_Q(0)) < 1$  的条件下, 使  $Q(s)$  满足  $Q(0) = 1$  的  $\tilde{K}(s)$  一定存在于式 (17) 解集合中的充要条件为

$$\hat{K}_{22}^{-1}(0) < 1$$

而且, 满足静态要求的自由参数必须满足

$$U(0) = \hat{K}_{22}^{-1}(0) < 1 \quad (18)$$

定理 3 由式 (17) 和自由参数的条件可以证明. 自由参数的阶次直接影响  $Q$ -滤波器的阶次, 为了防止阶次增加, 把  $U(0)$  选为  $U(s)$ , 即

$$U(s) = U(0) = \hat{K}_{22}^{-1}(0) \quad (19)$$

总之,  $Q$ -滤波器的求解流程的步骤 3 中, 依据式 (17) 和 (19) 求解  $\tilde{K}^*(s)$  就能保证伺服性能. 以上导出的结果是在没有给出内模阶次指标的情况下使 DOB 系统具有伺服性能的措施. 当给出内模阶次设计指标时, 只要实现此设计指标就自动满足伺服性能, 下节讨论反映内模阶次选取加权函数的方法.

### 3 内模阶次指标与加权函数的选取

DOB 系统能够完全消除何种外部干扰是评价它性能的重要性能指标之一. 例如, 在形为  $d(t) = p_q t^q + p_{q-1} t^{q-1} + \dots + p_0$  的外部干扰作用下, 能够彻底抑制该干扰时,  $q$  就成为一个量化指标<sup>[15]</sup>. 从内模原理的角度来看, 为使 DOB 系统消除该干扰, 图 1 (b) 中  $K_{pre}(s)$  必须含有  $q + 1$  阶积分器. 这对  $Q$ -滤波器造成一定的影响, 设计  $Q$ -滤波器时应予考虑. 下面讨论利用加权函数  $W_C(s)$  实现此设计指标的措施. 以下约定最小实现的  $Q$ -滤波器的形式为

$$Q(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i},$$

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, m < n, n - m = k$$

**定理 4.** 假设受控对象在虚轴上有界, DOB 系统能满足内模阶次  $q$  当且仅当  $Q$ -滤波器中的系数满足  $b_l = a_l (l = 0, 1, \dots, q, 0 \leq q \leq m)$ .

**证明.** 图 1 (b) 的等效控制器  $K_{\text{pre}}(s)$  记为

$$K_{\text{pre}}(s) = \frac{1}{1 - Q(s)} = \frac{M(s)}{M(s) - N(s)} = \frac{M(s)}{D(s)},$$

$$D = s^{q+1} \left( \sum_{i=m+1}^n a_i s^{i-q-1} + \sum_{j=q+1}^m (a_j - b_j) s^{j-q-1} \right) + \sum_{l=0}^q (a_l - b_l) s^l, \quad M = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (20)$$

因此, 当

$$b_l = a_l, \quad l = 0, 1, \dots, q \quad (21)$$

时,  $K_{\text{pre}}(s)$  至多含有  $q$  阶积分器. 此外, 由于  $Q(s) \in RH_\infty$ , 因而一定成立  $a_i > 0 (i = 0, 1, \dots, n)$  (即  $a_i \neq 0$ ), 故  $K_{\text{pre}}(s)$  的积分器阶次不小于  $q + 1$ . 由此得出  $K_{\text{pre}}(s)$  的积分器阶次一定为  $q + 1$ . 根据内模原理, 系统具有  $q$  阶内模阶次. 反过来, 当系统具有  $q$  阶内模阶次时, 式 (21) 一定成立, 定理得证.  $\square$

**引理 2.**  $Q$ -滤波器能达到的内模阶次  $q$  的最大值是  $m$ .

引理 2 的内容从定理 4 的证明过程很容易得出. 此引理显示构造  $Q$ -滤波器的重要信息, 即:  $Q$ -滤波器能达到的最高内模阶次为分子多项式的阶次. 这说明滤波器的阶次越高, 能达到的内模阶次就越高.

**定理 5.**  $H_\infty$  范数最优化问题 (7) 的解  $Q^*(s)$  满足给定的内模阶次指标  $q$  的充分条件是加权函数  $W_C(s)$  含有  $q + 1$  个值为零的极点.

**证明.** 称  $Q^*(s)$  为式 (7) 的解, 必须满足  $W_C(s)Q_C^*(s) \in RH_\infty$ . 因此, 如果  $W_C(s)$  包含  $q + 1$  个值为零的极点,  $Q_C^*(s) = 1 - Q^*(s)$  必须具有  $q + 1$  个零零点, 以完全对消  $W_C(s)$  的相应极点, 保证  $W_C(s)Q_C^*(s) \in RH_\infty$ .

$$Q_C(s) = \frac{D}{M} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i s^i - \sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (22)$$

的分子  $D(s)$  含有  $q + 1$  个零零点等价于式 (21) 成立, 这意味着 DOB 系统具有内模阶次  $q$  的品质.  $\square$

定理 5 说明, 为使干扰观测器系统满足给定的内模阶次指标  $q$ , 树立  $Q(s)$  的性能指标时, 应将内模阶次指标反映在灵敏度加权函数  $W_C(s)$  的零极点阶次中.

$$\overline{W}_C(s) = \gamma W_C(s) = \gamma \frac{1}{s^{q+1}} \hat{W}_C(s) \quad (23)$$

然而, 若加权函数包含虚轴上的极点, 标准问题的广义受控对象因其分块矩阵有虚轴上的不变零 (不可控, 不可检测的零) 而无法求解的前提假定.

为避免加权函数  $W_C(s)$  包含虚轴上的极点, 采用充分小的参数  $\lambda > 0$ , 把式 (23) 改为

$$\overline{W}_C(s) = \gamma W_C(s) = \gamma \frac{1}{(s + \lambda)^{q+1}} \hat{W}_C(s) \quad (24)$$

标准问题, 用式 (24) 的解  $\tilde{K}^*(s)$  包含  $q + 1$  个极点  $s_i = -\lambda$

$$\tilde{K}^*(s, \lambda) = \tilde{K}_{\lambda,0}^*(s) \frac{1}{(s + \lambda)^{q+1}} \quad (25)$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 标准问题解逼近真实的解, 即

$$\tilde{K}^*(s, 0^+) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \tilde{K}^*(s, \lambda) = \tilde{K}_0^*(s) \frac{1}{s^{q+1}}$$

实际中, 利用充分小的  $\lambda > 0$ , 得到的近似解

$$\tilde{K}_\lambda^*(s) = \tilde{K}_{\lambda,0}^*(s) \frac{1}{s^{q+1}} \quad (26)$$

$\tilde{K}_\lambda^*(s, \lambda)$  一定令闭环系统稳定. 当选取  $\tilde{K}_\lambda^*(s)$  代替  $\tilde{K}^*(s, \lambda)$  时, 同样必须保证  $\tilde{K}_\lambda^*(s)$  也使得闭环系统稳定. 下面, 考察此替换对稳定性的影响.

**定理 6.** 一定存在任意小的正数  $\lambda > 0$ , 使得由式 (26) 构成的闭环系统稳定, 且低通滤波器  $Q(s)$  稳定.

**证明.** 对加权函数 (24) 的最优化问题的解一定具有式 (25) 的形式. 此时闭环系统, 即低通滤波器的传递函数为

$$Q^*(s, \lambda) = \frac{\tilde{L}^*(s, \lambda)}{1 + \tilde{L}^*(s, \lambda)} = \frac{\tilde{K}_{\lambda,0}^*(s)}{(s + \lambda)^{q+1} \tilde{P}(s)} \frac{1}{1 + \tilde{K}_{\lambda,0}^*(s)} \frac{1}{(s + \lambda)^{q+1} \tilde{P}(s)} \quad (27)$$

为了简化表达, 设定

$$\frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)} = \tilde{K}_{\lambda,0}^*(s) \tilde{P}(s) \quad (28)$$

则

$$Q^*(s, \lambda) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)(s + \lambda)^{q+1} + \tilde{N}(s)} = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}_C^*(s, \lambda)}$$

式中,  $\tilde{D}_C^*(s, \lambda) = \tilde{D}(s)(s + \lambda)^{q+1} + \tilde{N}(s)$ . 分母多项式  $\tilde{D}_C^*(s, \lambda)$  一定为稳定多项式 (所有的根均在复左半平面), 因  $\tilde{K}^*(s, \lambda)$  为最优化问题的解, 使得范数最小, 并保证了闭环系统内部稳定. 当把式 (25) 替换为式 (26) 时, 低通滤波器  $Q(s)$  为

$$Q(s) = Q^*(s, 0) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}(s)s^{q+1} + \tilde{N}(s)} = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{D}_C(s)}$$

式中,  $\tilde{D}_C(s) = \tilde{D}(s)s^{q+1} + \tilde{N}(s)$ .

根据 Kharitonov 定理, 多项式  $\tilde{D}_C(s)$  的所有根位于左半平面的充要条件是误差多项式  $\tilde{D}_C(s) - \tilde{D}_C^*(s, \lambda)$  的系数限制在一个矩形范围内. 多项式  $\tilde{D}_C(s)$  是一个稳定多项式的充分必要条件为: 对  $\forall \omega$ ,  $\tilde{D}_C(j\omega) \neq 0$ , 即

$$\tilde{D}_C(j\omega) = \tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda) + [\tilde{D}_C(j\omega) - \tilde{D}_C^*(j\omega)] = \tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda) + \delta(j\omega) \neq 0$$

式中,  $\delta(s) = \tilde{D}_C(s) - \tilde{D}_C^*(s) = [s^q - (s + \lambda)^q]\tilde{D}(s)$  为误差多项式. 因为  $\tilde{D}_C^*(s, \lambda)$  稳定, 对  $\forall \omega$ ,  $\tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda) \neq 0$ . 用  $\tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda)$  除上述等式, 得

$$1 + \frac{\delta(j\omega)}{\tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda)} \neq 0, \quad \forall \omega \quad (29)$$

因此,  $\tilde{D}_C(s)$  为稳定多项式, 当且仅当  $\delta(j\omega)/\tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda)$  的轨迹不包围点  $(-1, j0)$ . 等价于

$$\sup_{\omega} \left| \frac{\delta(j\omega)}{\tilde{D}_C^*(j\omega, \lambda)} \right| = \left\| \frac{\delta(s)}{\tilde{D}_C^*(s, \lambda)} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{[s^q - (s + \lambda)^q]\tilde{D}(s)}{\tilde{D}_C^*(s, \lambda)} \right\|_{\infty} < 1 \quad (30)$$

可知, 一定存在正数  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \lambda_{\max}$  使上式成立,  $\lambda_{\max}$  是满足上式的最大正数.  $\square$

上面讨论的结果提供了选取频率加权函数的策略. 一方面, 应考虑  $Q$ -滤波器的低频带宽特性, 可分成两个部分: 一是内模阶次指标 (式 (23) 和式 (24) 的第 2 个因数), 二是反映主要干扰在低频带宽的周期性的频率特性 (第 3 个因数), 在设计  $Q$ -滤波器时, 二者均反映在加权函数  $W_C(s)$  中; 另一方面, 应考虑滤波器的阶次问题, 从抑制外部干扰的角度看, 低通滤波器的阶次越高, 对干扰的抑制作用越强. 但从

实现的角度看, 滤波器的阶次越高, 构成运算装置的难度越大. 一般来说, 通过标准问题的求解过程设计的低通滤波器的阶次等于加权函数  $W_C(s)$  的阶次与滤波器本身相对阶次之和 (次优化问题转化为最优化问题, 即  $\gamma \rightarrow \gamma_{\max}$  的情况下, 阶次减小一阶). 因此, 低通滤波器的阶次也取决于加权函数  $W_C(s)$  的阶次, 应合理选取加权函数  $W_C(s)$ .

## 4 设计实例

本文提出了干扰观测器的  $Q$ -滤波器设计方法, 以  $Q$ -滤波器设计问题定义为  $H_{\infty}$  函数优化问题, 然后将其变为  $H_{\infty}$  标准控制问题求解. 以下就该方法同已有方法进行分析和比较.

### 4.1 设计实例 1

考察伺服控制系统常用的阶次为 3、相对阶次为 2 的  $Q$ -滤波器<sup>[4, 15]</sup>. 因  $m = 1$ , 可知  $q$  最大为 1, 且  $k = n - m = 2$ . 在只考虑干扰抑制性能和噪声抑制性能的情况下, 灵敏度函数  $Q_C(s)$  和补灵敏度函数  $Q_C(s)$  的幅频特性曲线分别限于  $s \rightarrow 0$  时  $Q_C(s)$  的切线 ( $1/s^2$ ) 和  $s \rightarrow \infty$  时  $Q(s)$  的切线 ( $s^2$ ) 下. 据此, 选择  $W_C(s)$ ,  $W_Q(s)$  和  $\tilde{P}(s)$  为

$$\begin{aligned} \overline{W}_C(s) &= \gamma W_C(s) = \frac{\gamma}{(s + \lambda)^2} \\ W_Q(s) &= \frac{s^2}{\alpha}, \quad \tilde{P}(s) = \frac{1}{(s + \delta)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

式中参数分别选择为  $\lambda = 0.001$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 3$ .  $\overline{W}_C(s)$  的近原点的 2 阶极点反映 2 阶的内模阶次;  $\tilde{P}(s)$  反映相对阶次设计条件,  $\delta$  可任意选择. 由式 (31) 可知, 标准问题的广义对象的阶次为 4, 因此一般情况下得到的控制器解的阶次为 4. 但这种标量设计问题的解越逼近最优化解, 就越近似于消去一个模态, 即最优化解的阶次为 3. 采用标准  $H_{\infty}$  控制问题求解方法得到的最优化控制器  $\tilde{K}_{\text{opt}}^*$  和积分逼近控制器  $\tilde{K}_{\lambda}^*$ , 最优开环系统  $\tilde{L}^*$  为 ( $\lambda_{\max} \approx 0.226$ )

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\text{opt}}^*(s) &= \frac{(s + 3)^2(s + 0.3283)}{(s + 1.452)(s + 0.001)^2} \\ \tilde{K}_{\lambda}^*(s) &= \frac{(s + 3)^2(s + 0.3283)}{s^2(s + 1.452)} \\ \tilde{L}^*(s) &= \tilde{K}_{\lambda}^*(s)\tilde{P}(s) = \frac{s + 0.3283}{s^2(s + 1.452)} \end{aligned}$$

最优  $Q$ -滤波器为

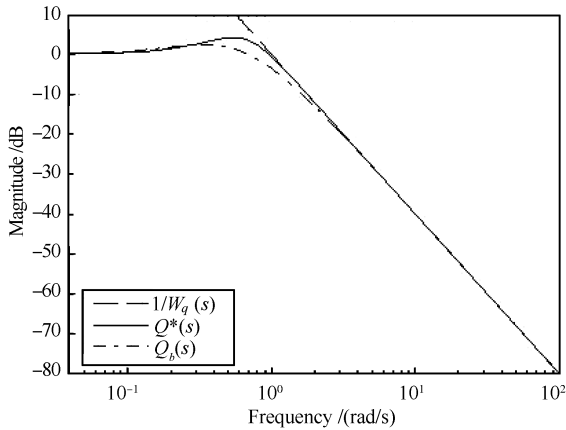
$$Q^* = \frac{\tilde{L}^*}{1 + \tilde{L}^*} = \frac{s + 0.3283}{s^3 + 1.452s^2 + s + 0.3283} \quad (32)$$



对于通用的二项系数滤波器, 满足同一阶次、同一相对阶次的形式为

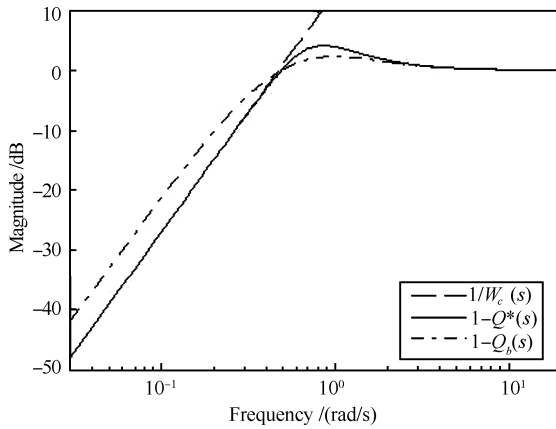
$$Q_b = \frac{3(\sigma s) + 1}{(\sigma s)^3 + 3(\sigma s)^2 + 3(\sigma s) + 1} \quad (33)$$

为使该滤波器与最优  $Q$ -滤波器一致的高频特性, 进而分析二者的低频特性, 选择  $\sigma = 1.725$ . 二者的频率特性曲线如图 3 所示.



(a) 低频特性比较

(a) Low frequency responses



(b) 高频特性比较

(b) High frequency responses

图 3 3阶优化  $Q$ -滤波器同二项系数滤波器的频率特性比较

Fig. 3 Frequency response comparisons between third order optimized  $Q$ -filter and  $Q_b(s)$

通过计算可知, 在频率  $\omega_c = 7 \text{ rad/s}$  以上,  $|W_Q^{-1}(j\omega)| < |Q_b(j\omega)|$  成立. 说明在该频段上,  $Q^*(s)$  的噪声抑制性能优于  $Q_b(s)$  (图 3(a)). 同时, 从图 3(b) 中的  $|1 - Q^*(j\omega)|$  和  $|1 - Q_b(j\omega)|$  曲线看出, 二者在低频段上约有 7 dB 的幅度差, 表明  $Q^*(s)$  的干扰抑制性能比  $Q_b(s)$  高出 2.2 倍.

## 4.2 设计实例 2

对于含有时间延迟环节的对象, 在保证鲁棒性的条件下, 考察最优  $Q$ -滤波器的干扰抑制性能, 并与二项系数滤波器进行性能比较.

干扰观测器系统中, 受控对象与其标称模型之间的关系为

$$P(s) = P_n(s)(1 + \Delta(s))$$

$$\Delta(s) = e^{-T_d s} - 1 \quad (34)$$

其中,  $T_d$  是延迟时间. 为了保证对此模型误差的鲁棒稳定性, 应该满足  $\|\Delta(s)Q(s)\|_\infty < 1$ . 据所提设计方法将鲁棒稳定性条件反映在设计过程中, 令式 (31) 的加权函数  $W_Q(s)$  为  $W_Q = s(s + 10)/\alpha$ . 对此加权函数, 最优  $Q$ -滤波器设计结果为

$$Q^* = \frac{s + 0.04255}{s^3 + 10.1s^2 + s + 0.04255}$$

文献 [4] 针对式 (33) 表示的二项系数滤波器, 通过调整时间常数  $\sigma$  以满足鲁棒稳定性条件. 图 4 给出了最优  $Q$ -滤波器 and 不同  $\sigma$  下的二项系数滤波器的频率特性曲线.

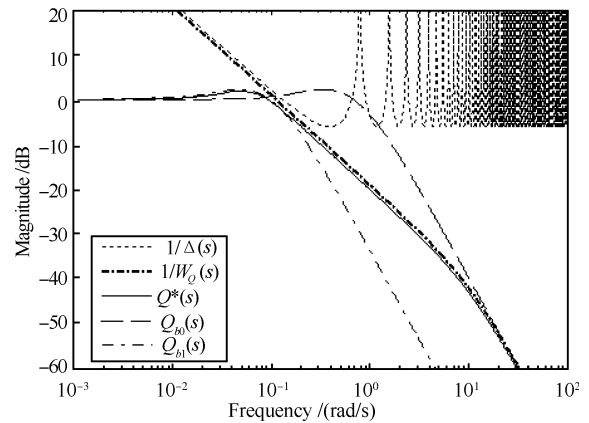


图 4 对时间延迟模型误差的鲁棒稳定性分析

Fig. 4 Robust stability analysis of time delay modeling error

图 4 中,  $\Delta(s)$  为模型误差;  $W_Q(s)$  为补灵敏度函数的加权函数;  $Q^*(s)$  代表最优  $Q$ -滤波器;  $Q_b(s)$  和  $Q_{b0}(s)$  分别代表  $\sigma = 12$  和  $\sigma = 1.7$  时的二项系数滤波器. 图 4 中, 二项系数滤波器  $Q_{b0}(s)$  对检测噪声具有完全的抑制作用, 但无法满足鲁棒稳定性条件. 当  $\sigma$  增大到 12 时, 虽然能够满足鲁棒稳定性条件, 但时间常数的增加影响了滤波器的低频特性, 降低了对干扰的抑制性能. 而最优  $Q$ -滤波器则在满足高频噪声抑制性能的同时, 满足鲁棒稳定性条件并具有更优的低频干扰抑制性能 (见图 5).

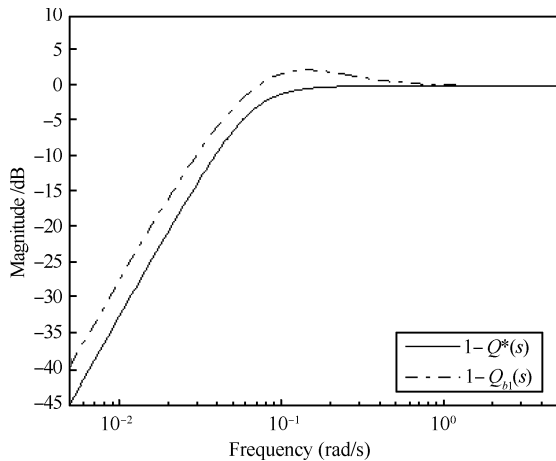


图5 在低频带宽上的干扰抑制性能的比较

Fig. 5 Comparison of disturbance attenuation performances in low frequency band

以上设计实例通过频率加权函数的适当选取,反映了附加的设计指标,尤其是高频加权函数  $W_Q(s)$  的适当选择提供了实现期望截止频率区域特性的可能性,保持高频段噪声的抑制性能的同时,提高了与鲁棒稳定性对应的中频段品质.实验结果表明,加权函数  $W_C(s)$  和  $W_Q(s)$  的多种组合能够导出同二项系数型和 Butterworth 型滤波器类似的典型滤波器,说明本文提出的  $Q$ -滤波器设计方法为已有设计方法的一般化,能获得典型  $Q$ -滤波器方法所不能实现的控制性能.

## 5 结论

本文研究了干扰观测器的系统性最优化设计方法.提出了基于求解  $H_\infty$  标准问题的干扰观测器低通滤波器的系统性设计方法,定义了  $H_\infty$  范数评价函数反映低通滤波器的全设计指标,基于  $H_\infty$  混合灵敏度法,将低通滤波器的设计问题转换为闭环回路成形问题;通过对滤波器相对阶次条件的适当处理,把带阶次约束的回路成形问题变为  $H_\infty$  标准问题求解.在此基础上,分析了干扰观测器静态内模阶次及低通滤波器阶次和加权函数间的关系,提出了满足内模解除条件和阶次要求的加权函数选取方法.通过设计实验对比验证,所提方法具有系统性和最优性.

## References

- 1 Nakao M, Ohnishi K, Miyachi K. A robust decentralized joint control based on interference estimation. In: Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. Washington D. C., USA: IEEE, 1987. 326–331
- 2 Ohishi K, Murakami T. Advanced motion control in robotics. In: Proceedings of the 15th Annual Conference on Industrial Electronics Society. Philadelphia, USA: IEEE, 1989. 356–359
- 3 Umeno T, Hori Y. Robust speed control of DC servomotors using modern two degrees-of-freedom controller design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1991, **38**(5): 363–368
- 4 Kempf C J, Kobayashi S. Disturbance observer and feedforward design for a high-speed direct-drive positioning table. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, **7**(5): 513–526
- 5 Komada S, Machii N, Hori T. Control of redundant manipulators considering order of disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, **47**(2): 413–420
- 6 Nakata T, Tomizuka M. Robust engine torque control by iterative learning control. In: Proceedings of the American Control Conference. St. Louis, USA: IEEE, 2009. 2064–2069
- 7 Tanaka H, Ohnishi K, Nishi H, Kawai T, Morikawa Y, Ozawa S, Furukawa T. Haptic endoscopic surgery robot utilizing FPGA. In: Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Trento, Italy: IEEE, 2008. 601–606
- 8 Sato T, Ohnishi K. ZMP disturbance observer for walking stabilization of biped robot. In: Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Trento, Italy: IEEE, 2008. 290–295
- 9 Natori K, Tsuji T, Ohnishi K, Hase A, Jezernik K. Timedelay compensation by communication disturbance observer for bilateral teleoperation under time-varying delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, **57**(3): 1050–1062
- 10 Iiyama N, Ohnishi K, Tsuji T. An approach to estimate velocity for acceleration control. In: Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Trento, Italy: IEEE, 2008. 687–692
- 11 Yan M T, Huang K Y, Shiu Y J, Chen Y. Disturbance observer and adaptive controller design for a linear-motordriven table system. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2007, **35**(3–4): 408–415
- 12 Ohnishi K, Sibita M, Murakami T. Motion control for advanced mechatronics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1996, **1**(1): 56–67
- 13 Yashiro D, Ohnishi K.  $L_2$  stable four-channel control architecture for bilateral teleoperation with time delay. In: Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Trento, Italy: IEEE, 2008. 324–329
- 14 Taguchi K, Hyodo S, Ohnishi K. A design method of autonomous hazard avoidance controller with selected ratio in bilateral teleoperation. In: Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Trento, Italy: IEEE, 2008. 607–612
- 15 Schrijver E, Dijk J V. Disturbance observers for rigid mechanical systems: equivalence, stability, and design. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2002, **124**(4): 539–548

- 16 Choi Y J, Yang K J, Chung W K, Kim H P, Suh I H. On the robustness and performance of disturbance observers for second-order systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(2): 315–320
- 17 Oh Y H, Chung W K. Disturbance-observer-based motion control of redundant manipulators using inertially decoupled dynamics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1999, **4**(2): 133–146
- 18 Tan K K, Lee T H, Dou H F, Chin S J, Zhao S. Precision motion control with disturbance observer for pulsewidth-modulated-driven permanent-magnet linear motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, **39**(3): 1813–1818
- 19 Wang C C, Tomizuka M. Design of robustly stable disturbance observers based on closed loop consideration using  $H_\infty$  optimization and its applications to motion control systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Washington D. C., USA: IEEE, 2004. 3764–3769
- 20 Mita T, Hirata M, Murata K, Zhang H.  $H_\infty$  control versus disturbance-observer-based control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, **45**(3): 488–495
- 21 Thum C K, Du C, Lewis F L, Chen B M, Ong E H.  $H_\infty$  disturbance observer design for high precision track following in hard disk drives. *IET Control Theory and Applications*, 2009, **3**(12): 1591–1598
- 22 Francis B A, Wonham W M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976, **12**(5): 457–465
- 23 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(8): 831–847



**尹正男** 上海交通大学自动化系博士研究生。朝鲜金日成综合大学自动化系毕业获硕士学位。主要研究方向为机器人运动控制、鲁棒控制。本文通信作者。

E-mail: yjn2914@yahoo.cn

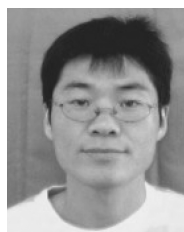
(**YIN Zheng-Nan** Ph.D. candidate in the Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, China. He received his master degree from Kim Il Sung University, D. P. R. Korea. His research interest covers robot motion control and robust control. Corresponding author of this paper.)



**苏剑波** 上海交通大学自动化系教授。主要研究方向为机器人控制、多传感器信息融合、机器学习与人机交互。

E-mail: jbsu@sjtu.edu.cn

(**SU Jian-Bo** Professor in the Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers robot control, multi-sensor fusion, machine learning, and human-computer interaction.)



**刘艳涛** 上海交通大学自动化系硕士研究生。主要研究方向为智能机器人及运动控制。E-mail: chinalyt@sjtu.edu.cn

(**LIU Yan-Tao** Master student in the Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers intelligent robot and motion control.)