

## 基于回溯的迭代硬阈值算法

杨海蓉<sup>1,2</sup> 方红<sup>3</sup> 张成<sup>1</sup> 韦穗<sup>1</sup>

**摘要** 针对压缩传感 (Compressed sensing, CS) 理论中迭代硬阈值 (Iterative hard thresholding, IHT) 算法迭代次数多和时间长的问题, 提出基于回溯的迭代硬阈值算法 (Backtracking-based iterative hard thresholding, BIHT), 该算法通过加入回溯的思想, 优化了 IHT 算法迭代支撑的选择, 减少支撑被反复选择的次数. 模拟实验表明, 在保证重建质量的前提下, 相比较于 IHT 和正规化迭代硬阈值 (Normalized IHT, NIHT) 算法, BIHT 算法的重建时间降低了 2 个数量级. 用本身稀疏的 0-1 随机信号的重建实验表明, 若测量次数和稀疏度相同, BIHT 算法的重建概率高于 IHT 算法.

**关键词** 压缩传感, 迭代硬阈值, 正规化迭代硬阈值, 回溯, 稀疏

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00276

### Iterative Hard Thresholding Algorithm Based on Backtracking

YANG Hai-Rong<sup>1,2</sup> FANG Hong<sup>3</sup> ZHANG Cheng<sup>1</sup> WEI Sui<sup>1</sup>

**Abstract** The backtracking-based iterative hard thresholding (BIHT) algorithm is proposed to solve the problem that the number of iterations is too large and the iteration time is too long when the iterative hard thresholding (IHT) algorithm is applied to the compressive sensing. The BIHT algorithm optimizes the sub-optimal choice of supports for each iteration and reduces the times of some supports iterated repeatedly by adding the idea of backtracking. The simulation demonstrates that backtracking-based algorithm ensures the reconstruction quality and decreases the time by two orders of magnitude when compared with IHT and Normalized iterative hard thresholding (NHT) algorithms for low noise level. Simulation on the 0-1 sparse signal demonstrates that the reconstruction probability of BIHT algorithm is higher than that of the IHT algorithm if the measurement times and sparsity of the signal are the same.

**Key words** Compressive sensing, iterative hard thresholding (IHT), normalized iterative hard thresholding (NIHT), backtracking, sparsity

Nyquist-Shannon 采样定理 50 多年来一直作为信号获取系统的基础. 运用这个理论, 信号以其带宽的两倍采样, 而不用考虑可能是众所周知的额外信号结构. 最近涌现的压缩传感理论 (Compressed sensing, CS)<sup>[1]</sup>, 假设信号在某个变换域上 (近) 稀疏, 运用线性变换 (例如傅里叶变换、小波变换等) 将信号投影到一个低维 (比较于 Nyquist 比率) 空间上, 则少量随机的线性投影中包含了信号的大部分信息, 通过非线性解码机制可以高概率精确重建原始信号. CS 运用少量的随机投影代替以 Nyquist 比率采样, 相比较于信号空间维数, 稀疏限制大大

减少了包含信号主要信息的空间尺度. Donoho<sup>[1]</sup> 开创性工作的重要贡献之一是证明了只要采样矩阵  $\Phi$  满足具有一个常数参数的限制等容条件 (Restricted isometry property, RIP), 线性规划算法和贪婪算法等能高概率重建原始信号. 压缩传感理论中, 众多重建算法能有效地逼近最优解, 例如传统的正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP) 算法<sup>[2]</sup>、逐步正交匹配追踪 (Stagewise orthogonal matching pursuit, STOMP)<sup>[3]</sup>、子空间追踪 (Subspace pursuit, SP)<sup>[4]</sup> 以及有良好实现保证的迭代硬阈值 (Iterative hard thresholding, IHT)<sup>[5]</sup>、正规化的迭代硬阈值 (Normalized iterative hard thresholding, NIHT)<sup>[6]</sup> 和压缩采样匹配追踪 (Compressive sampling matching pursuit, CoSaMP) 算法<sup>[7]</sup> 等. 其中, 逐步正交匹配追踪 (STOMP) 算法利用的是软阈值迭代, 通过一个软阈值, 也就是一个阈值参数确定迭代中保留的项, 而硬阈值迭代通过一个固定的阈值确定的非线性算子进行迭代, 每次迭代中保留的项数相等. 软、硬阈值算子在压缩传感中的应用均已得到广泛研究, 文献 [8-9] 中通过  $\ell_1$  模确定了去噪的一个变分公式, 从而诱导了一个简单的软阈值, 由于其简单性引起了广泛的关注, 文献 [3] 中 STOMP 算法运用软阈值对应的  $\ell_1$  模求信号

收稿日期 2010-03-30 录用日期 2010-08-20  
Manuscript received March 30, 2010; accepted August 20, 2010  
高等学校博士学科点专项科研基金 (20070357003), “新一代宽带无线移动通信网” 国家科技重大专项 (2009ZX-03006-001-02) 资助

Supported by Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20070357003) and “The Next Generation Broadband Wireless Mobile Communications Network” National Science and Technology of Major Projects (2009ZX-03006-001-02)

1. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室 合肥 230039  
2. 合肥师范学院数学系 合肥 230039 3. 上海第二工业大学理学院 上海 201209

1. Key Laboratory of Intelligent Computing Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039  
2. Department of Mathematics, Hefei Normal University, Hefei 230069 3. School of Science, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209

的逼近解; 而文献 [5] 中也确定了硬阈值与函数最小值间的关系, 它通过满足向量非零元个数的约束, 也就是  $l_0$  模达到函数最小值的要求. 国内关于阈值的理论及应用研究也有许多, 例如文献 [10] 讨论了与阈值迭代下如何实现全变差, 文献 [11] 讨论了 CS 在医学磁共振成像 (Magnetic resonance imaging, MRI) 当中如何实现软阈值迭代和算法的收敛性. 本文针对 IHT 算法, 通过在算法迭代过程中加入回溯思想<sup>[12]</sup>, 提出基于回溯的迭代硬阈值 (Backtracking-based iterative hard thresholding, BIHT) 算法, 该算法在迭代过程中, 将测量向量在迭代过程的前后两次支撑并集对应矩阵列张成的空间上重新做投影, 再利用 IHT 算法中的非线性算子得到逼近解. 该回溯过程优化了迭代过程中解向量支撑的选择. 文献 [6] 中证明了 NIHT 算法在有 IHT 算法类似的实现保证基础上, 算法稳定, 并且收敛快于 IHT 算法. 而本文的模拟实验和真实实验结果表明, BIHT 算法在保证重建质量的前提下, 迭代次数和时间明显少于 IHT、NIHT 算法.

## 1 CS 理论

本文中,  $\mathbf{x}$  表示向量.  $\text{supp}(\mathbf{x})$  表示向量  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  的非零坐标, 称为向量  $\mathbf{x}$  的支撑. 当  $|\text{supp}(\mathbf{x})| = K$ ,  $K \ll N$  时, 称  $\mathbf{x}$  是一个  $K$ -稀疏信号. 通常, 编码一个  $N$  维的  $K$ -稀疏离散信号, 可通过计算一个包含向量  $\mathbf{x}$  的  $M \ll N$  个线性投影的测量向量  $\mathbf{y}$  完成, 由

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1)$$

描述.  $\mathbf{e}$  为噪声, 这也是压缩传感有噪声情况下的模型,  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  为无噪声情况下的模型, 其中  $\Phi$  是  $M \times N$  矩阵, 因为不是一个方阵, 故没有传统意义上的逆, 所以从  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$  中恢复信号  $\mathbf{x}$  是一个病态求逆问题, 由于信号的稀疏性, 信号恢复可视为从所有可能的解中找出非零元最少的一种解形式, 又根据  $l_0$  模的概念,  $\|\mathbf{x}\|_0$  表示向量  $\mathbf{x}$  的非零元个数, 即在一个  $l_0$  模最小化内, 寻找下列问题的一个解

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

不幸的是, 解决上述  $l_0$  最小化问题是一个 NP-hard 问题, 因此非常困难. 由此, Chen 等在文献 [13] 中提出了基于最小化  $l_1$  模的线性优化模型, 也就是基追踪 (Basis pursuit, BP) 方法:

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

不同于  $l_0$  模,  $l_1$  模具有凸性, 并能很好地保持信号的稀疏性. 模型 (3) 可以通过现有的优化算法获

得高效求解. 并且文献 [13] 中证明了如果支撑集  $\text{supp}(\mathbf{x})$  满足条件:

$$|\text{supp}(\mathbf{x})| < \frac{1}{2}(1 + \nu^{-1}) \quad (4)$$

这里  $\nu$  表示  $\Phi$  与单位基的相干系数, 那么式 (3) 的最小化解是唯一的且和式 (2) 的最小化解等价. 同时, 测量矩阵的限制等容条件 (RIP) 为从  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$  中精确重建信号提供了理论保证.

**定义 1 (限制等容条件).** 称一个测量矩阵  $\Phi$  满足具有参数  $(K, \delta_K)$ ,  $\delta_K \in (0, 1)$  的限制等容条件 (RIP), 如果对所有的  $K$  稀疏向量  $\mathbf{x}$ , 有

$$(1 - \delta_K)\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2 \leq (1 + \delta_K)\|\mathbf{x}\|_2 \quad (5)$$

成立. 文献 [4] 中给出了截断的定义.

**定义 2 (截断 (Truncation)).** 设  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ ,  $I \subset \{1, \dots, N\}$ , 矩阵  $\Phi_I$  表示  $\Phi$  中指标  $i \in I$  对应的各列构成的矩阵, 称为矩阵  $\Phi$  的截断. 通过  $\Phi_I$  的列张成的空间定义为张成空间  $(\Phi_I)$ .

由上述定义,  $\Phi_I$  是一个秩为  $I$  的矩阵, 由文献 [14] 中推论及定理 8.2.2 知,  $\Phi_I$  的伪逆唯一, 且表示为  $\Phi_I^\dagger = (\Phi_I^T \Phi_I)^{-1} \Phi_I^T$ .

## 2 迭代硬阈值算法

文献 [5] 为迭代硬阈值 (IHT) 算法用于压缩传感恢复问题提供了一系列的理论保证, 证明算法成功运用较少的测量向量逼近最优的信号恢复, 其迭代过程如下: 假设  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , 迭代

$$\mathbf{x}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_n)) \quad (6)$$

其中  $H_K(\boldsymbol{\alpha})$  是一个非线性算子, 保留  $\boldsymbol{\alpha}$  值最大的  $K$  个分量, 其余分量均设为零. 如果按这样的机制所得非零支撑集合不唯一, 则可随机选择其中一个集合或者预设要选择分量的支撑集合. 在条件  $\|\Phi\|_2 < 1$  下, 算法的收敛性在文献 [14] 中已经被证明. 在这种情况下, 上面的算法收敛于优化问题的一个局部最小值

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq K \quad (7)$$

即 IHT 算法对应解决的是被称为是 NP-hard 的  $l_0$  模问题, 直接考虑稀疏信号的非零元个数, 寻找最能逼近稀疏信号的  $K$  项支撑. 上述算法的更一般的形式是包含额外的步长尺度  $\mu > 0$ , 即我们运用

$$\mathbf{x}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \mu \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_n)) \quad (8)$$

进行迭代. 并且, 在文献 [5] 中, 通过下列定理 1 和定理 2 保证了算法的收敛性以及实现.

**定理 1.** 如果测量矩阵  $\Phi$  张成  $\mathbf{R}^M$ , 以及  $\|\Phi\|_2 < 1$ , 则在  $\mathbf{x}$  是  $K$  稀疏这个约束下, 迭代硬阈值算法收敛于代价函数  $\|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2$  的一个局部最小值.

**定理 2.** 考虑一噪声测量  $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{e}$ , 其中  $\mathbf{x}$  是一个任意向量. 假设  $\mathbf{x}_K$  是  $\mathbf{x}$  的最优  $K$  次逼近. 如果  $\Phi$  满足具有参数  $\delta_{3K} < 1/\sqrt{32}$  的 RIP 条件, 则在第  $n$  次迭代, IHT 将恢复一个逼近满足

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|_2 \leq 2^{-n}\|\mathbf{x}_K\|_2 + 6\tilde{\varepsilon}_K \quad (9)$$

其中

$$\tilde{\varepsilon}_K = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_2 + \frac{1}{\sqrt{K}}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 + \|\mathbf{e}\|_2$$

而且, 在最多

$$n^* = \left\lceil \log_2 \left( \frac{\|\mathbf{x}_K\|_2}{\tilde{\varepsilon}_K} \right) \right\rceil \quad (10)$$

次迭代, IHT 估计了  $\mathbf{x}$ , 具有精度

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n^*}\|_2 \leq 7 \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_2 + \frac{1}{\sqrt{K}}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 + \|\mathbf{e}\|_2 \right] \quad (11)$$

更一般地, 如果  $\delta_{3K} < 1/\sqrt{8}$ , 则存在一个有限的常数  $c$ , 使得

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n^*}\|_2 \leq c \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_2 + \frac{1}{\sqrt{K}}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 + \|\mathbf{e}\|_2 \right] \quad (12)$$

$\delta_{3K} \rightarrow 1/\sqrt{8}$  时,  $c \rightarrow \infty$ . 虽然 IHT 算法有良好的实现保证, 但是由于限制等容条件以及迭代硬阈值对矩阵  $\Phi$  的重新缩放是敏感的. 当定理中的条件不满足,  $\Phi$  的尺度变化时, IHT 算法经常变得极不稳定, 文献 [6] 中图 1 说明了这一点. 从第 5 节的模拟实验中也可以看出,  $\Phi$  取一般的随机高斯矩阵时, IHT 算法对信号的重建概率甚至很低. Blumensath 等在文献 [6] 中对此算法做了改进, 在迭代中加入一个下降序列因子  $\{\mu_n\}$ , 仍保证收敛于代价函数的一个局部最小值及保证算法实现, 且取代 IHT 中通过限制  $\|\Phi\|_2$  以保证算法的收敛性, 使得算法保持尺度独立, 大大提高了算法的稳定性及对信号的重建概率, 称之为正规化的迭代硬阈值 (NIHT) 算法, 算法步骤见算法 1. 文献 [6] 中也给出了类似于定理 1 和定理 2 的实现保证, 且相比较于 IHT 算法, NIHT 算法虽然增加了下降序列因子  $\{\mu_n\}$ , 但在迭代时间上不仅没有增加, 在迭代次数较多时, 迭代时间还少于 IHT 算法. 本文基于 IHT 算法, 提出了另一种改进, 引入回溯思想, 称之为基于回溯的迭代硬阈值

(BIHT) 算法, 虽然多了一步回溯的求伪逆过程, 但是省略了步长序列的选择, 计算复杂度和迭代次数及时间却远小于 IHT、NIHT 算法.

### 算法 1. NIHT 算法

1) 初始化

迭代次数  $n = 1$ ,  $\mathbf{x}_1 = 0$ ,  $\Gamma_1 = \text{supp}(H_K(\Phi^T\mathbf{y}))$

2) 迭代

$\mathbf{g}_n = \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}_n)$ ,  $\mu_n = \frac{\mathbf{g}_{\Gamma_n}^T \mathbf{g}_{\Gamma_n}}{\mathbf{g}_{\Gamma_n}^T \Phi_{\Gamma_n}^T \Phi_{\Gamma_n} \mathbf{g}_{\Gamma_n}}$

$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \mu_n \mathbf{g}_n)$ ,  $\Gamma_{n+1} = \text{supp}(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1})$

若  $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ ,  $\mathbf{x}_{n+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$

若  $\Gamma_{n+1} \neq \Gamma_n$

如果  $\mu_n \leq (1-c) \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n\|_2^2}{\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n)\|_2^2}$ ,  $c$  为某个小的固定常数, 则

$\mathbf{x}_{n+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$

如果  $\mu_n > (1-c) \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n\|_2^2}{\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n)\|_2^2}$ , 对某个

$\kappa > 1/(1-c)$ , 更新:

$\mu_n \leftarrow \mu_n / (\kappa(1-c))$ ,

$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \mu_n \mathbf{g}_n)$

迭代直到  $\mu_n \leq (1-c) \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n\|_2^2}{\|\Phi(\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n)\|_2^2}$

$\Gamma_{n+1} = \text{supp}(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1})$ ,  $\mathbf{x}_{n+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$

## 3 一种回溯的迭代硬阈值算法

受子空间追踪 (SP) 算法<sup>[4]</sup> 的启发, 将回溯的思想引入 IHT 算法, 即 BIHT 算法的基本思想借用具有回溯 (试探法) 的顺序编码理论<sup>[12]</sup>. 在这个解码框架中, 首先选择最可能张成编码空间的  $K$  个支撑集合, 张成空间. 如果得到的向量到这个空间的距离被认为很大, 则算法根据它们的可靠值, 递增地消除和增加新的基向量, 直到确定一个充分靠近的候选支撑, 但在增加和消除的过程中我们有一步回溯的思想, 重新估计候选者的可靠性. BIHT 算法使用一个类似的策略, 但在每一个步骤, 保留 IHT 算法的非线性算子原则, 将相同数量的向量从候选名单中删除. 因此, IHT、NIHT 和 BIHT 重建策略之间的主要区别是前者根据一个非线性算子  $H_K(\boldsymbol{\alpha})$  依次产生一系列候选者, 没有回溯过程. 在每一次迭代中, 通过不断将信号残差投影到  $\Phi$  列构成的原子库中最匹配它的  $K$  个向量, 确定  $K$  个可信赖的候选, 一旦坐标被认为是可信赖的, 则被增加于名单, 进行下一次迭代. 这种迭代因为缺乏  $\Phi$  列之间的正交性而不是最优的, 向量  $\boldsymbol{\alpha}$  的某个支撑可能在之前的迭代中因为不在最大的  $K$  值之内已被设为零, 但是在下一次的迭代中又因为加入残差投影, 在最大的  $K$  个值之内而被重新保留下来, 也就是说,  $\boldsymbol{\alpha}$  的某个支撑可能被反复选择和丢弃, 所以导致的结果是 IHT、NIHT 算法需要较多的迭代次数才能高概率重建原始信号, 增加了计算复杂度和重建时间. 相比之下, BIHT 算法在每一次迭代过程中增加了一步回溯的思想, 将

前次迭代结果与非线性算子  $H_K(\alpha)$  产生的新向量支撑合并, 再通过伪逆过程与非线性算子  $H_K(\alpha)$  重新估计. 我们通过模拟实验发现, 仅仅需要很少的迭代次数既能高概率恢复原始信号, 又能大大减少精确重建所需的迭代时间, BIHT 算法的主要步骤见算法 2. 相比较于 IHT、NIHT 算法, BIHT 算法迭代过程是为了确定向量最大  $K$  个元的支撑集, 然后利用伪逆过程将测量向量  $\mathbf{y}$  在 IHT 算法中前后两次支撑并集对应矩阵列张成的空间中重新做一个投影, 再利用非线性算子  $H_K(\alpha)$  选择最大的  $K$  项, 得到信号的逼近解, 所以下降因子对本算法没有影响, 我们可以直接假设  $\mu = 1$ . 这不同于 IHT 和 NIHT 算法, 下降序列的选择影响了算法的稳定性. NIHT 算法迭代次数可以选用具体的数值, 当然也可以有别的停止条件. 算法加入回溯的思想, 从而优化了 IHT、NIHT 算法每次迭代支撑的选择, 减少  $\mathbf{x}$  中的某些支撑被反复迭代的情况. BIHT 算法的主要贡献是在其每一次迭代中均取得重大的进步, 所以经过少数几次的迭代就能达到良好的重建结果.

#### 算法 2. BIHT 算法

1) 初始化

$\mathbf{x}_1 = 0$ , 残差  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$ , 迭代次数  $n = 1$

2) 迭代

$\mathbf{a}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \mu\Phi^T \mathbf{r}_n)$ ,  $\Gamma_n = \text{supp}(\mathbf{x}_n) \cup \text{supp}(\mathbf{a}_{n+1})$

3) 回溯

$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \Phi_{\Gamma_n}^\dagger \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}_{n+1} = H_K(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1})$

## 4 模拟实验

文献 [5] 中说明了测量矩阵  $\Phi$  的敏感性, 推导了对于不同的下降因子  $\mu$ ,  $\Phi$  的要求也不同. 原算法中, 为了概念上的方便, 固定 IHT 一般算法中的  $\mu$  值为 1. 文献 [6] 中指出, 相比较于 IHT 算法, NIHT 算法不再通过限制  $\|\Phi\|_2$  保证算法收敛, 对测量矩阵  $\Phi$  的缩放不敏感, 算法稳定的同时, 保留了类似 IHT 算法的实现保证. 但是我们也看到, NIHT 算法增加了下降序列因子  $\{\mu_n\}$ , 这是否会增加运算量和运算时间? 本节做了三组实验, 首先是 IHT、NIHT 以

及 BIHT 算法对于真实图像重建的效果比较, 结果表明我们的算法在同样的迭代次数下, 效果及运行速度均优于 IHT 和 NIHT 算法; 其次通过对本身稀疏的 0-1 信号重建比较 OMP、IHT、NIHT 以及 BIHT 算法的重建概率与稀疏度及测量次数之间的关系关于信号稀疏度及所需测量数目之间的比较; 最后考虑了有噪声情况下 NIHT 及 BIHT 算法的比较情况.

### 4.1 真实图像重建

本节算法重建的真实图像是一个  $64 \text{ 像素} \times 64 \text{ 像素}$  大小的海螺黑白图 (来自于计算机视觉图像库 (<http://staff.science.uva.nl/~aloi>)), 测量矩阵采用高斯随机矩阵,  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ :  $\Phi(i, j) = \frac{1}{\sqrt{M}}\varphi_{ij}$ , 其中  $\varphi_{ij} \sim \mathbf{N}(0, 1)$ , 从下面模拟实验中可知稀疏度、测量次数, 模拟实验在一台 CPU 为 Intel E5300 (双核 2.60 GHz), 内存为 2.00 GB 的联想机上各运行 100 次, 重建的平均结果如图 1 所示.

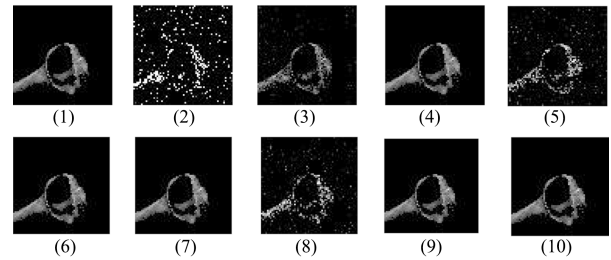


图 1 IHT、NIHT、BIHT 算法的重建结果 ((1)~(4) 分别为海螺原始图像、IHT、NIHT、BIHT 算法经 10 次迭代的重建结果; (5)~(10) 依次为 IHT、NIHT、BIHT 算法经 100 次和 200 次迭代的重建结果)

Fig. 1 Image constructions respectively based on IHT, NIHT, and BIHT algorithms with different iteration times (Original image and reconstruction results with 10 iteration times are from (1) to (4); reconstruction results with 100, 200 iteration times are from (5) to (10).)

表 1 为对应于 IHT、NIHT 和 BIHT 算法分别经 10, 100, 200 次迭代各运行 100 次的重建结果的平均时间与误差数据.

表 1 算法时间与误差比较

Table 1 Comparisons of time and errors

$n$	IHT		NIHT		BIHT	
	$t$ (s)	$e$	$t$ (s)	$e$	$t$ (s)	$e$
10	133.41	2.279E+003	132.78	650.17	13.703	3.590E-012
100	1389.1	778.67	1338.8	8.677E-004	15.359	3.140E-012
200	2531.1	696.82	2245.0	5.632E-005	17.525	2.740E-012

从图 1 和表 1 中看出,一方面,在算法运行时间上,虽然 NIHT 算法比 IHT 算法虽然多了一个下降序列因子,但是运行时间上却与之相当,而且在迭代次数增加时,运行时间少于 IHT 算法,我们的 BIHT 算法在任何迭代次数下的运行时间均少于前面两者,且在超过 100 次迭代时时间有两个数量级的下降;另一方面,在算法重建效果上,算法均取 10 次迭代时, IHT 算法的效果较差, BIHT 算法能以极小的误差重建海螺图像,正因为如此,我们取 100 次和 200 次迭代时, BIHT 算法运行的时间和误差与 10 次迭代比较只是稍有增加,而 NIHT 算法达到 100 次以上时,能以较小的误差重建海螺图像, IHT 算法由于其重建的不稳定性,重建效果却仍然不十分理想.由此可见,对于重建相同质量的海螺图像,采用  $O(N \ln K)$  的测量次数, BIHT 算法比 IHT、NIHT 算法在重建真实图像时的误差要小得多,同时在保证重建质量的情况下,所需的迭代次数相差几十倍,重建所需时间也降低了两个数量级.

#### 4.2 算法比较

为了比较 IHT、NIHT、BIHT 以及传统 OMP 算法关于稀疏度和测量次数的重建性能,我们采用本身稀疏的  $0 \sim 1$  随机信号,通过假设  $N = 256$ ,  $M = 128$ , 改变信号稀疏度,以及假设  $N = 256$ ,  $K = 30$ , 改变测量次数,分别来进行 1000 次模拟实验,所得结果如图 2 和图 3 所示.

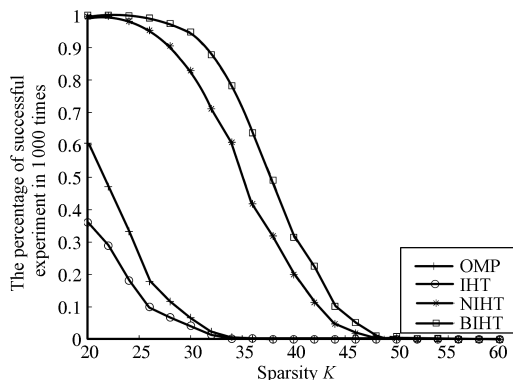


图 2  $N = 256$ ,  $M = 128$  时, OMP、IHT、NIHT、BIHT 算法对应的重建概率的比较 ( $X$  轴表示  $0 \sim 1$  信号的稀疏度,  $Y$  轴表示 1000 次实验成功的百分比)

Fig. 2 Comparison of relative reconstruction probabilities based on OMP, IHT, NIHT and BIHT algorithms ( $X$ -axis represents the sparsity of  $0 \sim 1$  signal.  $Y$ -axis represents the percentage of successful experiment in 1000 times.)

从图 2 和图 3 可以看出, IHT 算法极不稳定, 导致了重建概率很低, NIHT、BIHT 算法均优于传统的 OMP 算法, 撇开信号的重建时间, BIHT 算法在重建概率上也是高于 IHT、NIHT 算法. 图 2 中, 相

同测量次数的情况下, 随着稀疏度的增加, BIHT 算法的重建概率曲线下下降速率慢于 IHT、NIHT 算法; 同样地, 图 3 中, 保持稀疏度不变的情况下, 随着测量次数的增加, BIHT 算法在任意测量数量情况下的重建概率也高于 NIHT 算法.

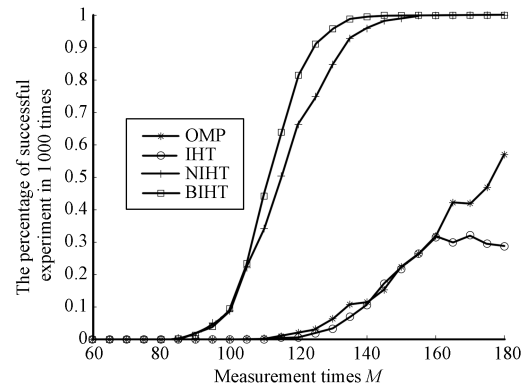


图 3  $N = 256$ ,  $K = 30$  时, OMP、IHT、NIHT、BIHT 算法对应的重建概率的比较 ( $X$  轴表示测量次数,  $Y$  轴表示 1000 次实验成功的百分比)

Fig. 3 Comparison of relative reconstruction probabilities based on OMP, IHT, NIHT and BIHT algorithms ( $X$ -axis represents the measurement times.  $Y$ -axis represents the percentage of successful experiment in 1000 times.)

#### 4.3 有噪声测量下的 NIHT、BIHT 算法

由于 IHT 算法的不稳定性, 本节主要讨论 NIHT、BIHT 算法对测量向量以及第 4.1 节中海螺灰度图加不同程度的噪声时图像的重建效果, 本节选用的噪声为高斯噪声,  $\sigma^2$  表示方差,  $SNR$  表示信噪比. 因为从表 1 中看出, BIHT、NIHT 算法 100 次以上迭代的重建误差和时间都在一个数量级上, 故本节下面实验中的 NIHT、BIHT 算法中均取 100 次迭代. 首先, 采用无噪声海螺源图像, 只对测量向量  $\mathbf{y}$  加不同程度的高斯噪声, 也就是式 (1) 的重建情况. 为了便于比较, 在下面的重建实验中, 我们将测量值和高斯噪声均归一化, 这不会影响重建结果, 因为由重建式 (1) 知, 归一化相当于对测量值  $\mathbf{y}$  和信号  $\mathbf{x}$  同时除以一个常数, 我们将重建结果乘以常数, 则仍重建出原来的信号. 对不同程度噪声分别做 100 次模拟实验, 所得的平均重建时间、重建误差及重建效果如表 2 和图 4.

从表 2 和图 4 中看出, NIHT 算法在有测量噪声情况下的重建时间与无噪声情况下相当, BIHT 算法重建时间增加了一个数量级, 但仍少于 NIHT 算法. 重建效果方面, NIHT、BIHT 算法在噪声方差较小时, 重建误差均很小, NIHT 算法略优于 BIHT 算法, 但随着方差增大, 重建误差增长较快, 明显高于 BIHT 算法. 其次, 对图像加高斯噪声, 经

过 100 次模拟试验, 所得不同程度噪声所需的平均重建时间、重建误差及重建效果如表 3 和图 5.

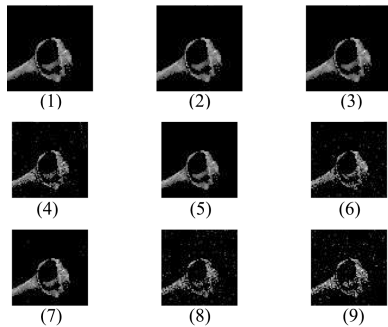


图 4 IHT、NIHT、BIHT 算法的重建结果 (第 1 行分别为海螺原始图像、NIHT、BIHT 算法在测量向量高斯噪声方差为  $\sigma^2 = 0.05$  时对应的海螺重建图像; 第 2、3 行依次为 NIHT、BIHT 算法在  $\sigma^2 = 0.10$ ,  $\sigma^2 = 0.15$  以及  $\sigma^2 = 0.20$  时的重建结果)

Fig. 4 Image constructions respectively based on IHT, NIHT, and BIHT algorithms with the different Gaussian noises at measurements (Original image and reconstruction results with the Gaussian noise variance  $\sigma^2 = 0.05$  are in the first row; reconstruction results with  $\sigma^2 = 0.10$ ,  $\sigma^2 = 0.15$ , and  $\sigma^2 = 0.20$  are in the second and the third rows.)

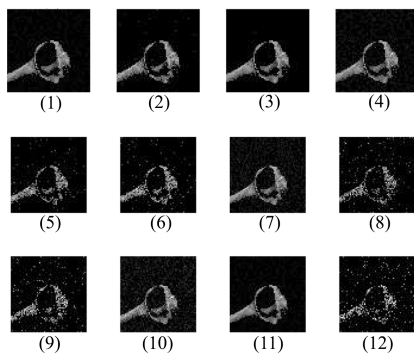


图 5 IHT、NIHT、BIHT 算法的重建结果 (第 1 行分别为高斯噪声方差  $\sigma^2 = 5$  时的噪声海螺源图像及 NIHT、BIHT 算法对应的海螺重建图像; 第 2、3 行依次为 NIHT、BIHT 算法在  $\sigma^2 = 10$ ,  $\sigma^2 = 15$  以及  $\sigma^2 = 20$  时的噪声海螺源图像及 NIHT、BIHT 算法对应的海螺重建图像)

Fig. 5 Image constructions respectively based on IHT, NIHT, and BIHT algorithms with the different Gaussian noises at images (Original noise image and reconstruction results with the Gaussian noise variance  $\sigma^2 = 5$  are in the first row; original noise images and reconstruction results with  $\sigma^2 = 10$ ,  $\sigma^2 = 15$ , and  $\sigma^2 = 20$  are in the second and the third rows.)

从表 3 和图 5 中看出, NIHT 算法在有图像噪声情况下的重建时间与无噪声情况下相当, BIHT

算法重建时间增加了一个数量级, 但仍少于 NIHT 算法. 重建效果方面, BIHT 算法在方差较小时信噪比较高, 明显高于 NIHT 算法. 但随着方差增大, NIHT、BIHT 算法对应信噪比均较差, BIHT 算法的信噪比下降更快, 希望下一步能在图像噪声变大时改善信噪比.

表 2 噪声测量下算法时间与误差  
Table 2 Comparisons of time and errors with Gaussian noise at measurements

$\sigma^2$	NIHT		BIHT	
	$t$ (s)	$e$ (%)	$t$ (s)	$e$ (%)
0.05	1 374.5	1.8218	325.23	2.6443
0.10	1 336.2	3.5049	330.14	4.5643
0.15	1 418.8	23.898	340.36	10.159
0.20	1 441.2	40.717	346.42	28.738

表 3 噪声测量下算法时间与误差  
Table 3 Comparisons of time and errors with Gaussian noise at images

$\sigma^2$	NIHT		BIHT	
	$t$ (s)	$SNR$	$t$ (s)	$SNR$
5	1 372.5	10.476	297.58	44.251
10	1 382.2	9.5033	340.38	15.795
15	1 426.1	4.3023	355.25	3.0146
20	1 455.4	2.3417	356.09	0.4494

## 5 总结及展望

本文主要提出一种基于回溯的 IHT 算法, 采用 IHT 的原子选择机制以及通过回溯的思想减少同一原子反复迭代的过程, 从而减低了计算复杂度. 从模拟实验中看出, 相比较于 IHT 及 NIHT 算法, BIHT 算法大大减少了迭代次数, 从而使得重建时间也大大减少; 同时, 在相同的测量次数和信号稀疏度情况下, NIHT 算法的重建概率也有所提高. 压缩传感理论是当前信号处理的一个热点, 国内也有许多此类研究, 例如文献 [15–16]. 而快速稳定的重建算法是将 CS 推向实用化的关键之一, 也是 CS 的主要研究内容之一. 目前关于 CS 的重建算法越来越多, 我们也一直致力于进一步寻找更加实用有效的重建算法 (例如文献 [17]), 在减少测量次数的同时还能降低对信号稀疏度的要求.

## References

- 1 Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306

- 2 Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655–4666
- 3 Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, Starck J L. Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit. Technical Report No. 2006-2, Department of Statistics, Stanford University, USA, 2006
- 4 Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2230–2249
- 5 Blumensath T, Davies M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, **27**(3): 265–274
- 6 Blumensath T, Davies M E. Normalized iterative hard thresholding: guaranteed stability and performance. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 298–309
- 7 Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, **26**(3): 301–321
- 8 Chambolle A, De Vore R A, Nam-Yong L, Lucier B J. Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, **7**(3): 319–335
- 9 Zibulevsky M, Elad M.  $L_1$ - $L_2$  optimization in signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, **27**(3): 76–88
- 10 Ma J W. Compressed sensing by inverse scale space and curvelet thresholding. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **206**(2): 980–988
- 11 Qu X B, Zhang W R, Guo D, Cai C B, Cai S H, Chen Z. Iterative thresholding compressed sensing MRI based on contourlet transform. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2010, **18**(6): 737–758
- 12 Han Y S, Hartmann C R P, Chen C C. Efficient priority-first search maximum-likelihood soft-decision decoding of linear block codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, **39**(5): 1514–1523
- 13 Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *Siam Journal on Scientific Computing*, 1998, **20**(1): 33–61
- 14 Shi Rong-Chang, Wei Feng. *Matrix Analysis*. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2005. 302–303 (史荣昌, 魏丰. 矩阵分析. 北京: 北京理工大学出版社. 2005. 302–303)
- 15 Shi Guang-Ming, Liu Dan-Hua, Gao Da-Hua, Liu Zhe, Lin Jie, Wang Liang-Jun. Advance in theory and application of compressed sensing. *Chinese Journal of Electronics*, 2009, **37**(5): 1070–1081 (石光明, 刘丹化, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究发展. 电子学报, 2009, **37**(5): 1070–1081)
- 16 Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369–1377 (李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. 自动化学报. 2009, **35**(11): 1369–1377)
- 17 Fang Hong, Zhang Quan-Bing, Wei Sui. Image reconstruction based on improved backward optimized orthogonal matching pursuit algorithm. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2008, **36**(8): 23–27 (方红, 章权兵, 韦穗. 改进的后退型最优正交匹配追踪图像重建方法. 华南理工大学学报(自然科学版), 2008, **36**(8): 23–27)



**杨海蓉** 安徽大学博士研究生. 主要研究方向为信号处理. 本文通信作者.  
E-mail: murong81@163.com  
(**YANG Hai-Rong** Ph.D. candidate at Anhui University. Her main research interest is signal processing. Corresponding author of this paper.)



**方红** 上海第二工业大学理学院副教授. 主要研究方向为图像处理.  
E-mail: luckymars@gmail.com  
(**FANG Hong** Associate professor at the School of Science, Shanghai Second Polytechnic University. Her main research interest is image processing.)



**张成** 安徽大学博士研究生. 主要研究方向为信号处理.  
E-mail: question1996@163.com  
(**ZHANG Cheng** Ph.D. candidate at Anhui University. His main research interest is signal processing.)



**韦穗** 安徽大学教授. 主要研究方向为计算机视觉、图像处理和全息显示.  
E-mail: swei@ahu.edu.cn  
(**WEI Sui** Professor at Anhui University. Her research interest covers computer vision, image processing, and holography display.)