

# 一类输出饱和系统的学习控制算法研究

张玉东<sup>1</sup> 方勇纯<sup>1</sup>

**摘要** 传感器饱和是控制系统中较为常见的一种物理约束. 本文针对一类含饱和输出的受限系统, 提出了两种学习控制算法. 具体而言, 首先, 对于重复运行的被控系统, 设计了开环 P 型迭代学习控制器, 实现在有限时间区间内对期望轨迹的完全跟踪, 并在  $\lambda$  范数意义下分析了算法的收敛性, 给出了含饱和输出的迭代学习控制系统的收敛条件. 进而, 针对期望轨迹为周期信号的被控系统, 提出了闭环 P 型重复学习控制算法, 并分析了这类系统的收敛性条件. 最后, 通过一个仿真实例验证了本文所提算法的有效性.

**关键词** 输出饱和, 迭代学习控制, 重复学习控制, 收敛性分析

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00092

## Learning Control for Systems with Saturated Output

ZHANG Yu-Dong<sup>1</sup> FANG Yong-Chun<sup>1</sup>

**Abstract** Sensor saturation is a common physical constraint in control systems. Two learning control algorithms are proposed in this research for a class of linear systems with saturated output. Specifically, an open-loop P-type iterative learning controller is first designed for repetitive operating systems to ensure entire tracking in limited interval, and the convergence condition is derived by employing  $\lambda$  norm analysis. Furthermore, for controlled systems with periodic desired trajectory, the asymptotic tracking condition of closed-loop P-type repetitive learning control technique is deduced as well. Finally, the simulation results show the effectiveness of the proposed algorithms.

**Key words** Output saturation, iterative learning control, repetitive learning control, convergence analysis

在实际控制系统中, 执行器或传感器往往存在着一定的非线性约束, 如饱和、死区、迟滞、间隙等. 如果在设计控制器时不对其加以考虑, 则将会严重影响所设计控制算法的性能<sup>[1]</sup>. 其中, 饱和问题又因其普遍性, 一直是控制领域研究的热点<sup>[2]</sup>.

围绕控制系统的饱和问题, 研究人员先后提出了多种控制方法. 如在早期研究中, 将执行器饱和作为最优控制器的约束, 通过求解约束情况下的最优控制输入以实现较好的控制性能<sup>[3]</sup>. 在此基础上, 一些研究者将模型预测控制应用于饱和控制系统, 并证明了系统的稳定性<sup>[4-5]</sup>. 近年来, 抗饱和法 (Anti-windup) 也被广泛用于饱和系统<sup>[6-7]</sup>. 与其他控制算法的设计思路不同, 该方法是在常规控制器的基础之上, 通过引入新的控制输入来抑制饱和和非线性的影响. 总之, 针对执行器饱和的研究大多集中在如何尽量减少性能的下降, 抑制扰动, 以及扩大闭环系

统的吸引域等方面, 已取得许多卓有成效的解决方案<sup>[8]</sup>. 但对于传感器饱和而言, 由于其不可控性, 使得控制算法的设计难度更大<sup>[9]</sup>. 特别是当系统初始条件使传感器饱和时, 则很难通过控制算法来解决饱和问题. 因此, 当前针对传感器存在饱和约束的研究仍处于探索阶段, 尚未取得一致性成果.

学习控制<sup>[10]</sup> 自被提出以来, 已被广泛应用于各种控制系统, 如机械手臂<sup>[11]</sup>、硬盘驱动<sup>[12]</sup>、原子力显微镜<sup>[13]</sup> 等, 其详细进展可参看相关综述<sup>[14-15]</sup>. 与自适应控制、神经网络等其他学习类算法不同, 学习控制针对具有重复运行特性或周期性环节的被控系统, 通过直接修正控制信号来提升系统性能. 而且学习控制具有对模型信息要求低, 控制器结构简单等优点, 因此特别适合于含有强非线性和不确定环节的对象. 基于此考虑, 若能把学习控制用于含饱和和非线性约束的系统将有望获得理想的控制效果. 实际上, 近年来已陆续出现了一些针对执行器饱和的学习控制算法. 如 Xu 等借助复合能量函数, 分别分析了单输入单输出及多输入多输出系统 P 型迭代学习算法的收敛性<sup>[16]</sup>. 进一步, 该研究小组在假定中间信号可测的情况下, 设计了一种双环学习律同时对系统未知动态及输入静态非线性进行学习, 解决了一类输入饱和的控制问题<sup>[17]</sup>. 而考虑到最优控制在处理输入饱和约束问题上的优势, Lee 等率先研究了二次性能指标下, 含约束系统的最优迭代学习控

收稿日期 2010-05-17 录用日期 2010-07-05

Manuscript received May 17, 2010; accepted July 5, 2010

国家高技术研究发展计划 (863 计划) 重点项目 (2009AA043703), 国家自然科学基金 (60875055), 天津市自然科学基金 (08JCZDJC21800) 资助

Supported by Key Program of National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2009AA043703), National Natural Science Foundation of China (60875055), and Natural Science Foundation of Tianjin (08JCZDJC21800)

1. 南开大学机器人与信息自动化研究所 天津 300071

1. Institute of Robotics and Automatic Information Systems (IRAIS), Nankai University, Tianjin 300071

制算法<sup>[18]</sup>. 在此基础上, Mishra 等从实际编程实现角度出发, 将有约束下迭代优化的思想用于最优输入信号的辨识, 并通过实验验证了算法的有效性<sup>[19]</sup>. 然而如前所言, 由于传感器饱和问题的新特性, 难以将上述方法用于处理含输出饱和约束的被控系统. 特别是当系统初值使得输出发生饱和时, 无法将该输出饱和作为约束用于输入信号设计, 而只能将测量值用于反馈, 此时很难获得满意的控制效果.

基于以上分析, 本文针对一类存在传感器饱和和约束的线性系统, 设计了迭代学习控制与重复学习控制算法. 在对包括比例型、微分型、最优学习律等多种学习控制算法的收敛性进行分析, 并考虑对饱和项的处理方法后, 确定采用比例型学习律对两种被控过程的控制算法进行设计. 通过采用对角矩阵法处理饱和项, 在  $\lambda$  范数意义下, 给出了两种算法收敛的充分条件. 经过严格分析可以证明, 在输出饱和情况下, 迭代学习控制可使系统输出在有限时间区间内完全跟踪期望轨迹, 而重复学习控制则可保证系统输出渐近跟踪周期性期望轨迹. 并通过仿真实例对所提出的学习控制算法进行了验证.

论文其他部分组织如下: 第 1 节对本文所研究的系统进行了描述, 并给出了一些合理性假设; 第 2 节和第 3 节分别设计了迭代学习控制与重复学习控制算法, 对其收敛性条件进行了分析; 第 4 节通过一个仿真实例对所设计的算法进行检验; 第 5 节给出了本文的结论.

## 1 问题描述

考虑如下输出饱和多输入多输出 (Multiple-input multiple-output, MIMO) 线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \text{sat}_{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^m$  分别表示系统的状态量、控制量、被调输出以及测量输出.  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times r}$  为系统参数矩阵.  $\mathbf{y}_0 = [y_{01}, \dots, y_{0m}]^T \in \mathbf{R}^{m+}$  为饱和函数阈值, 饱和函数定义如下:

$$z_i(t) = \text{sat}_{y_{0i}}(y_i(t)) = \begin{cases} -y_{0i}, & y_i(t) \leq -y_{0i} \\ y_i(t), & -y_{0i} < y_i(t) < y_{0i} \\ y_{0i}, & y_i(t) \geq y_{0i} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$  分别表示  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$  的第  $i$  个分量,  $i = 1, \dots, m$ .

对式 (1) 所描述的输出饱和系统, 控制目标为

通过设计合理的控制器充分利用测量输出  $\mathbf{z}(t)$ , 使系统输出跟踪期望轨迹  $\mathbf{y}_d(t)$ . 为此, 定义跟踪误差  $\mathbf{e}(t) \in \mathbf{R}^m$  为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t) \quad (3)$$

由于存在输出饱和约束, 实际测量误差为

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{z}(t) \quad (4)$$

经过简单推导, 可得出

$$\mathbf{e}'(t) = \text{sat}_{\mathbf{y}_d(t) \pm \mathbf{y}_0}(\mathbf{e}(t)) \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{y}_d(t) \pm \mathbf{y}_0$  分别表示饱和函数的上界与下界.

为便于分析后面控制算法的收敛性, 给出如下合理性假设:

**假设 1.** 存在函数  $\mathbf{x}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}_d(t)$  使得下式成立:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_d(t) \\ \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_d(t) \end{aligned} \quad (6)$$

**假设 2.** 系统期望输出  $\mathbf{y}_d(t)$  处于可测量范围内, 即  $\max(|y_{di}(t)|) < y_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . 由此可得出如下结论:

$$0 \leq \mathbf{e}'(t)^T \mathbf{e}(t) \leq \mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t) \quad (7)$$

## 2 迭代学习控制器设计

本节针对式 (1) 所描述的输出饱和线性系统在时间区间  $[0, T]$  内重复运行的情况, 设计了一种迭代学习控制算法, 使得当迭代次数趋于无穷时, 实现系统输出在有限时间区间内完全跟踪期望轨迹.

为此, 首先定义如下信号:  $\mathbf{x}_k(t)$ ,  $\mathbf{u}_k(t)$ ,  $\mathbf{y}_k(t)$ ,  $\mathbf{z}_k(t)$  分别表示第  $k$  次运行时系统的状态量、控制量、被调输出以及测量输出. 相应地,  $\mathbf{e}_k(t)$ ,  $\mathbf{e}'_k(t)$  表示第  $k$  次运行时的输出误差及测量误差,  $k = 1, 2, \dots$ .

针对以上控制目标, 我们设计如下学习控制算法:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + L_1 \mathbf{e}'_k(t) \quad (8)$$

式中,  $L_1 \in \mathbf{R}^{r \times m}$  表示学习控制增益矩阵.

为证明该学习算法的收敛性, 首先给出如下引理.

**引理 1.** 对于矩阵  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $0 < q_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 若  $\|I - P\|_1 < 1$  成立, 其中,  $I$  表示  $n$  维单位矩阵, 则  $\|I - PQ\|_1 < 1$  成立.

**证明.** 由已知条件可得:

$$\|I - P\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |U(j-i) - p_{ij}| < 1 \quad (9)$$

其中,  $U(j-i)$  定义如下:

$$U(j-i) = \begin{cases} 1, & j-i=0 \\ 0, & j-i \neq 0 \end{cases}$$

由该定义可将矩阵  $I-PQ$  的 1 范数表示为

$$\|I-PQ\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |U(j-i) - q_j p_{ij}| \quad (10)$$

任取矩阵  $(I-PQ)$  第  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) 列绝对值求和, 可表示为  $S_j$ :

$$S_j = |1 - q_j p_{jj}| + q_j w_j \quad (11)$$

式中,  $w_j = \sum_{i=1}^n |p_{ij}| - |p_{jj}| > 0$ . 由式 (9) 可知

$$|1 - p_{jj}| + w_j < 1 \quad (12)$$

由上式可推知  $0 < p_{jj} < 2$ , 下面对  $p_{jj}$  分情况进行讨论:

**情况 1.** 当  $0 < p_{jj} \leq 1$  时, 由式 (12) 可知,  $1 - p_{jj} + w_j < 1$ , 即  $p_{jj} - w_j > 0$ , 则

$$S_j = 1 - q_j p_{jj} + q_j w_j = 1 - q_j(p_{jj} - w_j) < 1 \quad (13)$$

**情况 2.** 当  $1 < p_{jj} < 2$  时, 由式 (12) 可知,  $p_{jj} - 1 + w_j < 1$ , 即  $p_{jj} + w_j < 2$ , 进而对  $0 < q_j p_{jj} < 2$  进行分类讨论.

1) 若  $q_j p_{jj} \geq 1$ , 则

$$S_j = q_j p_{jj} - 1 + q_j w_j = q_j(p_{jj} + w_j) - 1 < 1 \quad (14)$$

2) 若  $0 < q_j p_{jj} < 1$ , 则

$$S_j = 1 - q_j p_{jj} + q_j w_j < 1 - q_j p_{jj} + q_j(2 - p_{jj}) = 1 - 2q_j(p_{jj} - 1) < 1 \quad (15)$$

综上所述, 对于任意的  $j = 1, \dots, n$ , 有  $S_j < 1$ , 可得

$$\|I-PQ\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} S_j < 1 \quad (16)$$

从而引理 1 得证.  $\square$

在引理 1 的基础上, 给出如下定理来说明学习算法 (8) 收敛的充分条件.

**定理 1.** 对于由式 (1) 所描述的输出饱和和线性系统, 在满足假设 1 和 2 的条件下, 若系统每次迭代运行的初始状态一致, 即  $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 且学习控制增益矩阵  $L_1$  满足  $\|I - DL_1\|_1 < 1$ , 则学习控制律 (8) 可使得系统在时间区间  $[0, T]$  上,  $\mathbf{e}_k(t) \rightarrow \mathbf{0}$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**证明.** 为便于分析, 首先将  $\mathbf{e}'_k(t)$  表示为  $\mathbf{e}'_k(t) = \Gamma_k(t)\mathbf{e}_k(t)$ , 其中  $\Gamma_k(t) = \text{diag}\{\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{km}\}$  为对角阵, 且对角阵元素表示为

$$\gamma_{ki}(t) = \begin{cases} \frac{y_{di}(t) - y_{0i}}{e_{ki}(t)}, & e_{ki} < y_{di} - y_{0i} \\ 1, & y_{di} - y_{0i} \leq e_{ki} \leq y_{di} + y_{0i} \\ \frac{y_{di}(t) + y_{0i}}{e_{ki}(t)}, & e_{ki} > y_{di} + y_{0i} \end{cases}$$

由假设 2 易知,  $0 < \gamma_{ki}(t) \leq 1, 1 \leq i \leq m$ .

在控制量  $\mathbf{u}_{k+1}(t)$  作用下, 系统 (1) 的解可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}(t) &= e^{At}\mathbf{x}_{k+1}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}_{k+1}(\tau) d\tau = \\ &\mathbf{x}_k(t) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B L_1 \mathbf{e}'_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

进而可推出

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}(t) &= \mathbf{e}_k(t) - (\mathbf{y}_{k+1}(t) - \mathbf{y}_k(t)) = \\ &(I - DL_1 \Gamma_k(t))\mathbf{e}_k(t) - \\ &\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B L_1 \Gamma_k \mathbf{e}_k d\tau \end{aligned} \quad (18)$$

对上式两边取 1 范数得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_1 &\leq \|I - DL_1 \Gamma_k(t)\|_1 \cdot \|\mathbf{e}_k(t)\|_1 + \\ &\int_0^t \|C e^{A(t-\tau)} B L_1 \Gamma_k\|_1 \cdot \|\mathbf{e}_k\|_1 d\tau \leq \\ &\|I - DL_1 \Gamma_k(t)\|_1 \cdot \|\mathbf{e}_k(t)\|_1 + \\ &b_0 \int_0^t \|\mathbf{e}_k(\tau)\|_1 d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $b_0 = \sup_{t \in [0, T]} \|C e^{At} B L_1\|_1$ . 将上式左右两端同时乘以  $e^{-\lambda t}$ , 并求其  $\lambda$  范数得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}(t)\|_\lambda &\leq \max_{t \in [0, T]} (\|I - DL_1 \Gamma_k(t)\|_1) \cdot \|\mathbf{e}_k(t)\|_\lambda + \\ &b_0 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \|\mathbf{e}_k(t)\|_\lambda \end{aligned} \quad (20)$$

式中, 向量函数  $\mathbf{f}: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$  的  $\lambda$  范数定义如下<sup>[20]</sup>

$$\|\mathbf{f}\|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|\mathbf{f}\|\}, \quad \lambda > 0 \quad (21)$$

其中,  $\|\cdot\|$  为  $\mathbf{R}^n$  上的一种范数, 本文中为向量的 1 范数. 由式 (20) 可知, 若  $\max_{t \in [0, T]} (\|I - DL_1 \Gamma_k(t)\|_1) < 1$ , 则当  $\lambda$  取足够大时, 可推出

$$\max_{t \in [0, T]} (\|I - DL_1 \Gamma_k(t)\|_1) + b_0 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} < 1 \quad (22)$$

因此可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k(t)\|_\lambda = 0 \quad (23)$$

进而由

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_k(t)\|_1 \leq e^{\lambda T} \|\mathbf{e}_k(t)\|_\lambda \quad (24)$$

可推出

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_k(t)\|_1 = 0 \quad (25)$$

从而得出系统跟踪误差趋于  $\mathbf{0}$  的结论. 由以上分析可以看出, 若在控制过程中, 误差信号始终有界, 即存在  $\delta > 0$  满足:

$$0 < \delta \leq \min_{t \in [0, T], i \in [1, m]} (\gamma_{ki}(t)) \quad (26)$$

则由条件  $\|I - DL_1\|_1 < 1$ , 通过引理 1, 可得出  $\|I - DL_1 \Gamma_k(t)\|_1 < 1, t \in [0, T]$ , 因此可保证式 (26) 成立.

下面我们考察一下  $\gamma_{ki}(t)$  在迭代过程中是否满足以上有界要求. 系统在第一次运行时,  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{0}$ , 则易知在时间  $t \in [0, T]$  内, 存在  $M_1 < \infty$  使得

$$\sup_{t \in [0, T], i \in [1, m]} |y_{1i}(t)| \leq M_1 \quad (27)$$

由此可推出

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_1(t)\|_1 \leq m \left( M_1 + \max_{t \in [0, T], i \in [1, m]} (|y_{di}(t)|) \right)$$

此时, 若取

$$\delta_1 = \frac{\min_{i \in [1, m], t \in [0, T]} (|y_{di}(t) \pm y_{0i}|)}{\max_{i \in [1, m], t \in [0, T]} (|y_{di}(t)|) + M_1}$$

则易知

$$\gamma_{1i}(t) \geq \delta_1, \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [0, T]$$

因而, 式 (22) 要求的收敛条件在第二次迭代时成立, 则有

$$\|\mathbf{e}_2(t)\|_\lambda < \|\mathbf{e}_1(t)\|_\lambda \leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_1(t)\|_1 \quad (28)$$

由式 (24) 可知,  $\|\mathbf{e}_2(t)\|_1$  有界, 因而存在  $\delta_2 > 0$ , 使得  $\gamma_{2i}(t) \geq \delta_2, i \in [1, m], t \in [0, T]$  成立. 以此方法类推下去, 可以得到

$$\gamma_{ki}(t) \geq \delta_2, \quad i \in [1, m], \quad t \in [0, T], \quad k = 2, 3, \dots \quad (29)$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则条件 (26) 成立. 因此, 由前面推导可得出如下收敛性结论

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_k(t) = \mathbf{0}, \quad t \in [0, T] \quad (30)$$

即在迭代域内, 系统误差趋近于  $\mathbf{0}$ .  $\square$

**注 1.** 以上讨论了输出饱和情况下, P 型学习算法收敛的充分条件. 而对实际控制系统设计学习控制增益时, 除了分析其收敛性之外, 还应考虑收敛速度. 从式 (19) 可以看出, 学习控制算法的收敛速度与系统的参数矩阵  $A, B, C, D$ , 学习控制增益矩阵  $L_1$ , 初始跟踪误差, 首次运行的控制量等均均有关系. 而对于矩阵  $L_1$  而言, 则易知  $\|I - DL_1\|_1$  越小, 收敛速度相应越快. 因此, 设计矩阵  $L_1$  时, 在满足收敛条件  $\|I - DL_1\|_1 < 1$  的前提下, 应尽量减小该范数值, 以提高学习控制算法的收敛速度.

### 3 重复学习控制器设计

本节在上一节研究内容的基础上, 将输出饱和系统的迭代学习控制推广到重复学习控制, 利用  $\lambda$  范数理论, 在时域范围内, 给出了输出饱和和情况下, 线性系统的重复学习控制器收敛性的证明.

考虑如下控制目标: 通过设计合理的控制算法, 使得系统 (1) 输出渐近跟踪周期性的期望输出轨迹  $\mathbf{y}_d(t)$ :

$$\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{y}_d(t - T), \quad t \geq T \quad (31)$$

其中,  $T \in \mathbf{R}^+$  为一正常数, 表示  $\mathbf{y}_d(t)$  的周期. 相应地, 假设 1 中,  $\mathbf{x}_d(t) = \mathbf{x}_d(t - T), \mathbf{u}_d(t) = \mathbf{u}_d(t - T), t \geq T$ .

针对以上控制目标, 设计如下闭环重复学习控制器:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t - T) + L_2 \mathbf{e}'(t) \quad (32)$$

式中,  $L_2 \in \mathbf{R}^{r \times m}$  为学习控制增益.

为证明闭环学习律 (32) 的有效性, 首先给出如下引理.

**引理 2.** 对于矩阵  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $0 < q_i \leq 1, i = 1, \dots, n$ , 若以下两个条件成立:

- 1)  $\|I + P\|_1 > 1$ ;
- 2) 当  $p_{ii} < 0$  时,  $\sum_{j=1}^n |p_{ji}| > 2|p_{ii}|$ .

其中,  $I$  表示  $n$  维单位矩阵, 则  $\|I + PQ\|_1 > 1$  成立.

**证明.** 与引理 1 的证明过程类似, 此略.  $\square$

进而, 如下定理给出保证学习律 (32) 收敛的充分条件.

**定理 2.** 输出饱和和线性系统 (1), 在满足假设 1 和 2 的情况下, 若  $\|I + DL_2\|_1 > 1, \|e^{AT}\|_1 < 1$ , 而且当  $(DL_2)_{ii} < 0$  时,  $\sum_{j=1}^m |(DL_2)_{ji}| > 2|(DL_2)_{ii}|, i \in [1, m]$ , 则闭环学习算法 (32) 可使得系统渐近跟踪周期性期望轨迹, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0} \quad (33)$$

**证明.** 同定理 1 的证明过程相似, 将  $\mathbf{e}'(t)$  表示为  $\mathbf{e}'(t) = \Gamma(t)\mathbf{e}(t)$ , 其中  $\Gamma(t)$  的定义同前面一致. 首先, 将  $\mathbf{e}(t)$  表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t) = \\ &= \mathbf{y}_d(t) - C\mathbf{x}(t) - D(\mathbf{u}(t-T) + L_2\mathbf{e}'(t)) = \\ &= \mathbf{e}(t-T) - DL_2\Gamma(t)\mathbf{e}(t) - \\ &= C(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-T)) \end{aligned} \quad (34)$$

进一步, 定义如下信号:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n(t) &= \mathbf{e}(t+nT), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 0, 1, \dots \\ \mathbf{x}_n(t) &= \mathbf{x}(t+nT), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 0, 1, \dots \\ \delta\mathbf{x}_n(t) &= \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (35)$$

则式 (34) 可改写为

$$(I + DL_2\Gamma_n(t))\mathbf{e}_n(t) = \mathbf{e}_{n-1}(t) - C\delta\mathbf{x}_n(t) \quad (36)$$

经过简单数学推导可知

$$\delta\mathbf{x}_n(t) = e^{At}\delta\mathbf{x}_n(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BL_2\Gamma_n\mathbf{e}_n(\tau)d\tau \quad (37)$$

又根据事实  $\mathbf{x}_n(0) = \mathbf{x}_{n-1}(T)$ , 综合可得如下结果:

$$\begin{aligned} (I + DL_2\Gamma_n(t))\mathbf{e}_n(t) &= \\ &= \mathbf{e}_{n-1} - Ce^{At}\delta\mathbf{x}_n(0) - \\ &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}BL_2\Gamma_n\mathbf{e}_n d\tau; \\ \delta\mathbf{x}_n(0) &= e^{AT}\delta\mathbf{x}_{n-1}(0) + \\ &= \int_0^T e^{A(T-\tau)}BL_2\Gamma_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

对式 (38) 两边取 1 范数, 可得

$$\begin{aligned} \|I + DL_2\Gamma_n(t)\|_1 \|\mathbf{e}_n(t)\|_1 &\leq \\ &\|\mathbf{e}_{n-1}(t)\|_1 + b_1 \int_0^t \|\mathbf{e}_n(\tau)\|_1 d\tau + b_2 \|\delta\mathbf{x}_n(0)\|_1; \\ \|\delta\mathbf{x}_n(0)\|_1 &\leq \\ &b_3 \|\delta\mathbf{x}_{n-1}(0)\|_1 + b_4 \int_0^T \|\mathbf{e}_{n-1}(\tau)\|_1 d\tau \end{aligned} \quad (39)$$

式中

$$\begin{aligned} b_1 &= \sup_{t \in [0, T]} \|Ce^{At}BL_2\|_1 \\ b_2 &= \sup_{t \in [0, T]} \|Ce^{At}\|_1 \\ b_3 &= \|e^{AT}\|_1 \\ b_4 &= \sup_{t \in [0, T]} \|e^{At}BL_2\|_1 \end{aligned}$$

对式 (39) 两边同时乘以  $e^{-\lambda t}$ , 并计算其  $\lambda$  范数得

$$\begin{aligned} M_2 \|\mathbf{e}_n\|_\lambda - b_1 \varepsilon \|\mathbf{e}_n\|_\lambda &\leq \|\mathbf{e}_{n-1}\|_\lambda + b_2 \|\delta\mathbf{x}_n(0)\|_\lambda; \\ \|\delta\mathbf{x}_n(0)\|_\lambda &\leq b_3 \|\delta\mathbf{x}_{n-1}(0)\|_\lambda + b_4 \varepsilon \|\mathbf{e}_{n-1}\|_\lambda \end{aligned} \quad (40)$$

式中

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \\ M_2 &= \inf_{\gamma_{\min} \leq \gamma_i \leq 1, i \in [1, m]} \|I + DL_2\Gamma\|_1 \end{aligned}$$

经过整理, 可以推出

$$\begin{bmatrix} \|\mathbf{e}_n(t)\|_\lambda \\ \|\delta\mathbf{x}_n(0)\|_\lambda \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 + b_2 b_4 \varepsilon & b_2 b_3 \\ b_4 \varepsilon & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{e}_{n-1}(t)\|_\lambda \\ \|\delta\mathbf{x}_{n-1}(0)\|_\lambda \end{bmatrix} \quad (41)$$

由离散系统收敛性条件可知, 当矩阵  $\begin{bmatrix} 1 + b_2 b_4 \varepsilon & b_2 b_3 \\ b_4 \varepsilon & b_3 \end{bmatrix}$  的谱半径小于 1 时, 系统收敛如下:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_n(t)\|_\lambda &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta\mathbf{x}_n(0)\|_\lambda &= 0 \end{aligned}$$

且保证以上信号有界. 进而由  $\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_n(t)\|_1 \leq e^{\lambda T} \|\mathbf{e}_n(t)\|_\lambda$ , 可得系统渐近稳定的结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_n(t)\|_1 = 0 \quad (42)$$

而由已知条件,  $\|I + DL_2\|_1 > 1$ ,  $\|e^{AT}\|_1 < 1$  等, 采用类似定理 1 中的递推方法, 并利用引理 2, 可知, 当选取足够大的  $\lambda$  时, 该条件可保证

$$\rho \left( \begin{bmatrix} 1 + b_2 b_4 \varepsilon & b_2 b_3 \\ b_4 \varepsilon & b_3 \end{bmatrix} \right) < 1$$

因此, 由前面推导可知系统输出误差渐近趋于 0.  $\square$

#### 4 仿真实例

本节采用以上所设计的两种学习控制算法, 对式 (1) 所描述的输出饱和系统进行仿真. 其中, 系统参数选为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -0.5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1.2 & 2.1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

输出饱和阈值为

$$\mathbf{y}_0 = [2 \quad 1.5]^T$$

### 4.1 迭代学习控制仿真

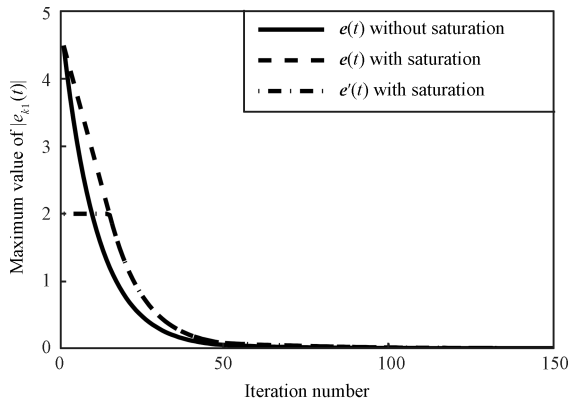
在迭代学习控制算法仿真中, 期望轨迹设为

$$\begin{aligned} y_{d1}(t) &= 1.5e^{0.05t} \sin(\pi t) \\ y_{d2}(t) &= 1.2e^{0.05t} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

取系统状态初值为  $\mathbf{x}_0 = [2, 0.5]^T$ , 系统运行时间为 5 s, 学习控制增益选为

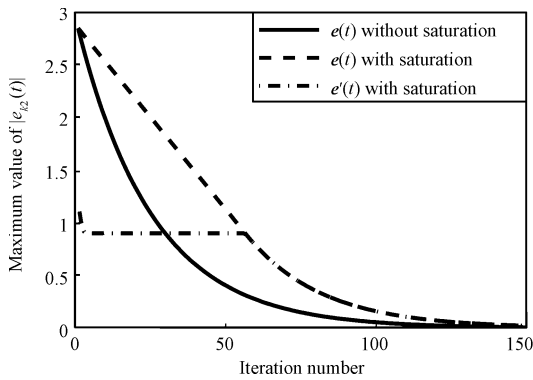
$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.18 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{bmatrix} \quad (45)$$

图 1 给出了系统两个输出信号的跟踪误差收敛结果. 图中, 实线表示在输出信号完全可测的情况下, 采用式 (45) 给出的参数进行迭代学习控制, 得到的最大跟踪误差收敛曲线. 而虚线和点划线则分别代表输出信号存在饱和时, 系统的最大跟踪误差与测量误差. 可以看出, 当传感器可完全测量系统输出时, 算法 (45) 能实现较好的收敛效果. 当输出存在饱和和约束时, 输出误差无法全部用于反馈, 使得收



(a)  $y_1$  最大跟踪误差

(a) Maximum tracking errors of  $y_1$



(b)  $y_2$  最大跟踪误差

(b) Maximum tracking errors of  $y_2$

图 1 迭代学习控制算法收敛结果

Fig. 1 Convergence results of the iterative learning control algorithm

敛速度有所下降, 但最终仍能收敛到 0, 从而能够实现在有限时间内, 完全跟踪期望轨迹.

### 4.2 重复学习控制仿真

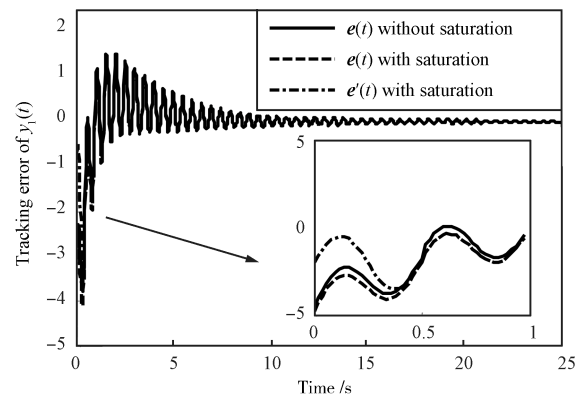
让系统 (1) 跟踪如下周期性信号

$$\begin{aligned} y_{d1}(t) &= 1.5 \sin(4\pi t) \\ y_{d2}(t) &= 1.2 \sin(4\pi t) \end{aligned} \quad (46)$$

系统状态初值设为  $\mathbf{x}_0 = [4, 3]^T$ , 闭环学习控制增益设为

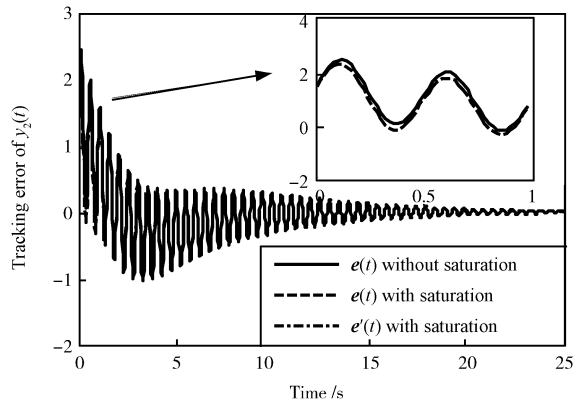
$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix} \quad (47)$$

系统运行 25 s 的仿真结果如图 2 所示, 各条曲线的定义如前节所述. 从结果可以看出, 在运行初期, 由于初值作用, 系统输出超出测量范围, 但在式 (47) 作用下, 采用可测量到的饱和输出信号进行反馈, 最终可使系统渐近跟踪周期性期望输出轨迹.



(a)  $y_1$  跟踪结果

(a) Tracking results of  $y_1$



(b)  $y_2$  跟踪结果

(b) Tracking results of  $y_2$

图 2 重复学习控制算法跟踪效果

Fig. 2 Tracking performance of the repetitive learning control algorithm

## 5 结论

本文针对一类含输出饱和约束的控制系统, 设计了开环 P 型迭代学习与闭环 P 型重复学习控制算法, 以分别用于重复运行及跟踪周期性轨迹的作业任务. 通过用对角矩阵法处理饱和项, 在  $\lambda$  范数意义下, 研究了两种算法在存在输出饱和约束下跟踪误差收敛于零的条件. 文中给出的仿真实例, 验证了本文结论的正确性.

## References

- 1 Tao G, Kokotovic P V. *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities*. New York: John Wiley and Sons, 1996. 7–28
- 2 Wei Ai-Rong. Study of Stability and Disturbance for Systems with Actuator Saturation [Ph.D. dissertation], Shandong University, China, 2006  
(魏爱荣. 饱和控制系统稳定性及干扰抑制研究 [博士学位论文], 山东大学, 中国, 2006)
- 3 Chen P C, Shamma J S. Gain-scheduled  $L_1$ -optimal control for boiler-turbine dynamics with actuator saturation. *Journal of Process Control*, 2004, **14**(3): 263–277
- 4 Kapila V, Valluri S. Model predictive control of systems with actuators amplitude and rate saturation. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, USA: IEEE, 1998. 1396–1401
- 5 Hu L S, Huang B, Cao Y Y. Robust digital model predictive control for linear uncertain systems with saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(5): 792–796
- 6 Tyan F, Berstein D S. Anti-windup compensator synthesis for systems with saturation actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1995, **5**(5): 521–537
- 7 Turner M C, Tarbouriech S. Anti-windup compensation for systems with sensor saturation: a study of architecture and structure. *International Journal of Control*, 2009, **82**(7): 1253–1266
- 8 Kapila V, Grigoriadis K M. *Actuator Saturation Control*. New York: Marcel Dekker, 2002. 135–159
- 9 Cao Y Y, Lin Z L, Chen B M. An output feedback  $H_\infty$  controller design for linear systems subject to sensor nonlinearities. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, **50**(7): 914–921
- 10 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123–140
- 11 Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong, Chen Bing-Yu. Repetitive learning control for time-varying robotic systems: a hybrid learning scheme. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(11): 1189–1195
- 12 Chen Y Q, Moore K L, Yu J, Zhang T. Iterative learning control and repetitive control in hard disk drive industry—a tutorial. In: Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA: IEEE, 2006. 2338–2351
- 13 Fang Yong-Chun, Zhang Yu-Dong, Jia Ning. A learning control system for advanced atomic-force-microscopy scanning mode. *Control Theory and Applications*, 2010, **27**(5): 557–562  
(方勇纯, 张玉东, 贾宁. 适用于原子力显微镜先进扫描模式的学习控制系统. *控制理论与应用*, 2010, **27**(5): 557–562)
- 14 Xu Jian-Xin, Hou Zhong-Sheng. On learning control: the state of the art and perspective. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(6): 943–955  
(许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望. *自动化学报*, 2005, **31**(6): 943–955)
- 15 Bristow D A, Tharayil M, Alleyne A G. A survey of iterative learning control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, **26**(3): 96–114
- 16 Xu J X, Tan Y, Lee T H. Iterative learning control design based on composite energy function with input saturation. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1371–1377
- 17 Tan Y, Xu J X. A note on iterative learning control for nonlinear systems with input uncertainties. In: Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 12474–12479
- 18 Lee J H, Lee K S, Kim W C. Model-based iterative learning control with a quadratic criterion for time-varying linear systems. *Automatica*, 2000, **36**(5): 641–657
- 19 Mishra S, Topcu U, Tomizuka M. Iterative learning control with saturation constraints. In: Proceedings of the American Control Conference. St. Louis, USA: IEEE, 2009. 943–948
- 20 Xu J, Tan Y. *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*. Berlin: Springer, 2003. 23–24



张玉东 南开大学机器人与信息自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为学习控制和基于原子力显微镜的微纳米控制系统.

E-mail: zhangyd@robot.nankai.edu.cn  
(ZHANG Yu-Dong Ph.D. candidate at the Institute of Robotics and Automatic Information System (IRAIS), Nankai University. His research interest covers learning control and atomic force microscope based micro/nano control systems.)



方勇纯 南开大学机器人与信息自动化研究所教授. 主要研究方向为视觉伺服, 微纳米控制系统和非线性控制. 本文通信作者.

E-mail: yfang@robot.nankai.edu.cn  
(FANG Yong-Chun Professor at the Institute of Robotics and Automatic Information System (IRAIS), Nankai University. His research interest covers visual servoing, micro/nano control systems, and nonlinear control. Corresponding author of this paper.)