

# 欠驱动三连杆机械臂能量解耦控制策略

赖旭芝<sup>1</sup> 张镇<sup>1</sup> 吴敏<sup>1</sup>

**摘要** 针对第二关节为被动的欠驱动三连杆机械臂提出一种能量解耦控制策略. 首先, 将整个运动空间分为摇起区和平衡区, 为了实现快速摇起控制, 进一步将摇起区分为摇起子区间一和摇起子区间二; 其次, 基于 Lyapunov 函数设计控制律, 使第三杆相对于第二杆处于自然伸展的状态, 即使第三杆角度和角速度收敛为零, 从而解除能量控制与第三连杆姿态之间的耦合; 接着, 在摇起子区间二, 增加系统能量使系统摇起至平衡区附近; 然后, 基于 LQR (Linear quadratic regulator) 的平衡控制律将系统稳定在竖直向上平衡点; 最后, 用仿真结果验证该控制策略的有效性.

**关键词** 欠驱动机械臂, Lyapunov function, 能量解耦, LQR

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00067

## Energy Decoupling Control Strategy for Three-link Underactuated Manipulator

LAI Xu-Zhi<sup>1</sup> ZHANG Zhen<sup>1</sup> WU Min<sup>1</sup>

**Abstract** An energy decoupling control strategy is presented for the underactuated three-link manipulator with a passive second joint. Firstly, the motion space is divided into swing-up area and balance area, furthermore, the former is divided into swing-up subspace 1 and swing-up subspace 2 so as to swing up control rapidly. Secondly, a control law based on Lyapunov function is employed to make the third link stretch in a natural way, that is, the angle and angular velocity of the third link converge to zero, which can decouple the energy and the states of the third link in the swing up process. Next, another control law is designed to increase the energy in the swing-up subspace 2 to make the system swing up to the balance area. Then, a balancing control law based on linear quadratic regulator (LQR) stabilizes the system at the upright equilibrium. Finally, some simulation results demonstrate the validity of this method.

**Key words** Underactuated manipulator, Lyapunov function, energy decoupling, linear quadratic regulator (LQR)

近年来出现的欠驱动机械臂<sup>[1-3]</sup> 是一类构成系统的广义坐标维数多于控制输入维数的非线性系统, 能在驱动数目少于自由度的情况下完成复杂的控制目标, 达到减轻机械系统重量和节约资源的目的.

目前研究较多的 Pendubot<sup>[4-5]</sup> 是一种两关节的垂直平面欠驱动机器人, 通过对其研究可以分析二阶约束与一阶不同的特性以及从理论上分析二阶非完整欠驱动系统的规划与控制. Acrobot<sup>[6-8]</sup> 是受人体运动启发, 将欠驱动应用于仿人机器人, 简单模拟体操运动员在单杆上的摆起、倒立和大回环等体操动作. 欠驱动两连杆机械臂 Pendubot 和 Acrobot 大多采用分区控制<sup>[9]</sup>, 将欠驱动两连杆机械臂的运动空间分为摇起区和平衡区, 针对这两个分区分别采用不同的控制策略进行摇起控制和平衡控制. 结合摇起控制策略和平衡控制策略, 可以有效实现系统的控制目标.

与欠驱动两连杆机械臂相比, 欠驱动三连杆机械臂<sup>[10]</sup> 可以完成更复杂的动作, 并且具有更强的非

线性和耦合性, 如果将其运动空间分为摇起区和平衡区, 采用类似欠驱动两连杆机械臂控制方法, 并不能实现总体控制目标. 目前研究较多的是第一关节为被动的欠驱动三连杆机械臂<sup>[11-13]</sup>.

对于欠驱动三连杆机械臂的控制, 文献 [11] 提出了一种仿人智能控制策略, 将欠驱动三连杆机械臂的摇起运动过程规划分为 6 个连续的目标阶段<sup>[12]</sup>, 并针对 6 个阶段分别采用 PD 控制、Bang-Bang 控制等, 这种控制策略能够规划欠驱动三连杆机械臂的运动姿态并且保证摆起过程中能量的递增, 但需要考虑控制器之间的平滑转换, 使得各阶段的控制策略设计工作十分复杂. 文献 [13] 提出了一种基于能量和姿态的摇起控制策略, 通过坐标转换将欠驱动三连杆机械臂的第二杆和第三杆两个驱动连杆转换为一个虚拟复合杆, 实现第二杆和第三杆的联动控制, 但其难以避免奇异现象, 控制力矩大小也不理想.

强耦合是导致欠驱动三连杆机械臂这类复杂非线性系统难以控制的主要原因. 本文以第二关节为被动的欠驱动三连杆机械臂为对象, 从解除其摇起控制中能量与部分连杆姿态间的耦合关系入手, 提出一种简单而有效的控制策略. 控制目标是把系统从任意初始位置摇起到竖直向上的不稳定平衡点, 并稳定在这个平衡点上. 首先, 将其整个运动空间分

收稿日期 2010-06-08 录用日期 2010-09-01  
Manuscript received June 8, 2010; accepted September 1, 2010  
国家自然科学基金 (61074112, 60674044) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61074112, 60674044)

1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083  
1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083

为摇起区和平衡区, 为快速实现摇起, 进一步将摇起区分为摇起子区间一和摇起子区间二. 其次, 在摇起子区间一基于第三杆的状态构造第一个 Lyapunov 函数, 基于该 Lyapunov 函数设计第三杆控制律来调整其姿态, 使第三杆相对于第二杆处于自然伸展的状态, 并将此时的第一杆控制律取为零, 由此解除摇起子区间二在实现增加能量的控制目标时与第三连杆姿态的耦合. 接着, 在摇起子区间二, 于能量解耦的基础上构造一个基于能量的 Lyapunov 函数, 设计第一杆控制律增加系统能量, 使之达到欠驱动机械臂在竖直向上的不稳定平衡点所具有的势能; 同时, 保持摇起子区间一所设计的第三杆控制律不变, 使系统能量满足要求的情况下, 系统能以较好的连杆姿态快速进入平衡区. 随后, 利用基于线性二次型调节器的平衡控制律将系统稳定在竖直向上平衡点, 完成控制目标. 最后, 仿真结果可以验证该控制策略的正确性和有效性.

## 1 系统描述

图 1 是欠驱动三连杆机械臂的模型, 连接在对应关节上的参数和变量定义如下:  $m_i$  为第  $i$  杆的质量 ( $i = 1, 2, 3$ );  $l_i$  为第  $i$  杆的长度 ( $i = 1, 2, 3$ );  $l_{ci}$  为第  $i$  杆质心到前一关节的长度 ( $i = 1, 2, 3$ );  $J_i$  为第  $i$  杆的转动惯量 ( $i = 1, 2, 3$ );  $q_1$  为第一杆与竖直向上方向的角度;  $q_i$  为第  $i$  杆对前一杆的相对角度 ( $i = 2, 3$ );  $\tau_i$  为第  $i$  关节的驱动力矩 ( $i = 1, 3$ );  $g$  为重力加速度.

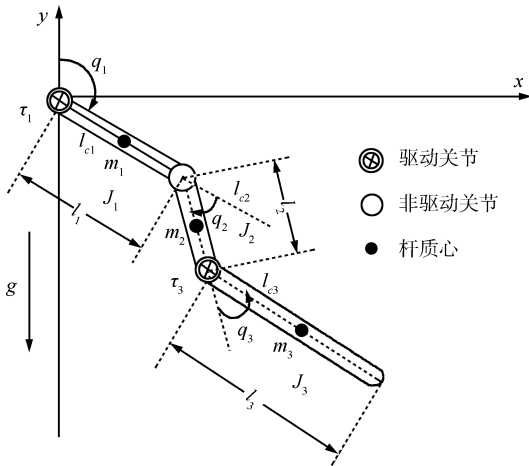


图 1 欠驱动三连杆机械臂

Fig. 1 Three-link underactuated manipulator

由拉格朗日公式可得欠驱动三连杆机械臂的动力学方程如下:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

其中, 系统角度向量  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ ;  $M$  为惯性矩

阵, 具有正定性和对称性, 形式如下:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]^T$  为科里奥利力和离心力的结合向量;  $\mathbf{G} = [G_1, G_2, G_3]^T$  是重力向量;  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, 0, \tau_3]^T$  为驱动力矩向量; 各向量的具体参数如下:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + 2\theta_3 \cos q_2 + \\ &\quad 2\theta_5 \cos(q_2 + q_3) + 2\theta_6 \cos q_3 \\ M_{12} &= \theta_2 + \theta_4 + \theta_3 \cos q_2 + \theta_5 \cos(q_2 + q_3) + \\ &\quad 2\theta_6 \cos q_3 \\ M_{13} &= \theta_4 + \theta_5 \cos(q_2 + q_3) + \theta_6 \cos q_3 \\ M_{22} &= \theta_2 + \theta_4 + 2\theta_6 \cos q_3 \\ M_{23} &= \theta_4 + 2\theta_6 \cos q_3, \quad M_{33} = \theta_4 \\ C_1 &= -\theta_3(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 - \\ &\quad \theta_5(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) - \\ &\quad \theta_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3 \\ C_2 &= \theta_3\dot{q}_1^2 \sin q_2 + \theta_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) - \\ &\quad \theta_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3 \\ C_3 &= \theta_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) + \theta_6(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_3 \\ G_1 &= -\beta_1 \sin q_1 - \beta_2 \sin(q_1 + q_2) - \\ &\quad \beta_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ G_2 &= -\beta_2 \sin(q_1 + q_2) - \beta_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ G_3 &= -\beta_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned}$$

其中,  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ ),  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 如下:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= J_1 + m_1 l_{c1}^2 + (m_2 + m_3) l_1^2 \\ \theta_2 &= J_2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 \\ \theta_3 &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \\ \theta_4 &= J_3 + m_3 l_{c3}^2, \quad \theta_5 = m_3 l_1 l_{c3}, \quad \theta_6 = m_3 l_2 l_{c3} \\ \beta_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) g \\ \beta_2 &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) g, \quad \beta_3 = m_3 l_{c3} g \end{aligned}$$

系统的机械能可以表示为

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q}) \quad (2)$$

其中,  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  是系统的动能,  $P(\mathbf{q})$  是系统的势能,  $P(\mathbf{q})$  的具体形式为

$$P(\mathbf{q}) = \beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2) + \beta_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \quad (3)$$

对式 (2) 求导可得:

$$\dot{E} = \tau_1 \dot{q}_1 + \tau_3 \dot{q}_3 \quad (4)$$

当系统稳定在竖直向上平衡点位置时, 总的机械能为

$$E_0 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \quad (5)$$

记  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$ , 则方程 (1) 可以改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} -C_1 - G_1 \\ -C_2 - G_2 \\ -C_3 - G_3 \end{bmatrix} + M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

即可得系统动力学方程的另一种形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4, & \dot{x}_4 = F_1(\mathbf{x}) + A_1(\mathbf{x})\tau_1 + B_1(\mathbf{x})\tau_3 \\ \dot{x}_2 = x_5, & \dot{x}_5 = F_2(\mathbf{x}) + A_2(\mathbf{x})\tau_1 + B_2(\mathbf{x})\tau_3 \\ \dot{x}_3 = x_6, & \dot{x}_6 = F_3(\mathbf{x}) + A_3(\mathbf{x})\tau_1 + B_3(\mathbf{x})\tau_3 \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $F_i, A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为非线性函数, 它们可以表达为

$$\begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ F_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} -C_1 - G_1 \\ -C_2 - G_2 \\ -C_3 - G_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1(\mathbf{x}) & B_1(\mathbf{x}) \\ A_2(\mathbf{x}) & B_2(\mathbf{x}) \\ A_3(\mathbf{x}) & B_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 运动区间划分

欠驱动三连杆机械臂是一个复杂的非线性系统, 为了简化控制律的设计, 整个运动空间  $\Sigma$  被分为两个部分: 摇起区  $\Sigma_1$ , 平衡区  $\Sigma_2$ , 定义为

$$\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_2 \quad (7)$$

平衡区  $\Sigma_2$  满足:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \text{mod} \left( \frac{x_1}{2\pi} \right), 2\pi - \text{mod} \left( \frac{x_1}{2\pi} \right) \right\} \leq \lambda_1 \\ & \min \left\{ \text{mod} \left( \frac{x_1 + x_2}{2\pi} \right), 2\pi - \text{mod} \left( \frac{x_1 + x_2}{2\pi} \right) \right\} \leq \lambda_2 \quad (8) \\ & \min \left\{ \text{mod} \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2\pi} \right), 2\pi - \text{mod} \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2\pi} \right) \right\} \leq \lambda_3 \\ & |E - E_0| \leq \lambda_4 \end{aligned}$$

其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  为 4 个小的正实数,  $\text{mod}(x/y)$  是  $x$  除以  $y$  的余数且其符号始终与  $y$  相同.

如果只将欠驱动三连杆机械臂的运动空间划分为摇起区和平衡区来完成控制目标, 就表明要在摇起区间内同时控制三连杆机械臂的能量和部分连杆姿态, 从而使系统满足平衡区切换条件, 这在现阶段难于实现. 为了快速实现摇起控制, 一种有效的方法就是解除摇起控制设计中能量与部分连杆姿态的耦合, 为此进一步将摇起区划分为两个子区间:  $\Sigma_{11}$  和  $\Sigma_{12}$ . 其中,  $\Sigma_{11}$  称为姿态调整阶段, 满足:

$$\Sigma_{11} = \Sigma_1 - \Sigma_{12} \quad (9)$$

$\Sigma_{12}$  称为储能摇起阶段, 满足:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \text{mod} \left( \frac{x_3}{2\pi} \right), 2\pi - \text{mod} \left( \frac{x_3}{2\pi} \right) \right\} \leq \rho_1 \\ & \min \left\{ \text{mod} \left( \frac{x_6}{2\pi} \right), 2\pi - \text{mod} \left( \frac{x_6}{2\pi} \right) \right\} \leq \rho_2 \quad (10) \end{aligned}$$

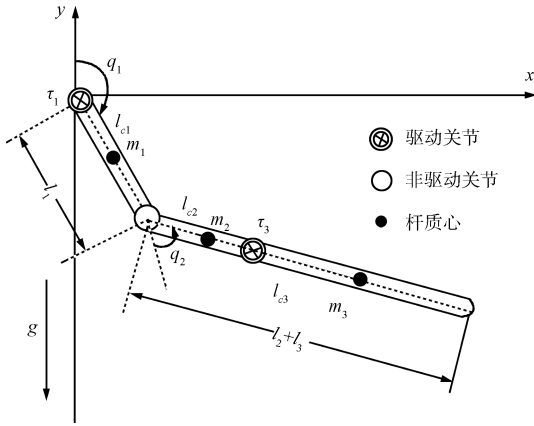
式中,  $\rho_1, \rho_2$  为小的正实数.

## 3 摇起区控制策略的设计

摇起区的总体目标是将机械臂从任意初始位置摇起至平衡区附近, 首要条件就是系统能量达到其在平衡区所具有的势能. 考虑到系统能量与各连杆姿态间相互耦合, 用一种整体策略实现摇起控制目标十分困难, 本文为实现能量解耦控制, 针对摇起区的两个子区间分别设计控制律.

### 3.1 摇起子区间一控制律

本阶段的控制目标是使系统达到第三杆相对于第二杆自然伸展的状态, 以消除摇起子区间二摇起过程中第三连杆姿态对系统能量的影响, 在动力学模型中的表现就是第三杆的角度和角速度均趋向零, 预期控制效果如图 2 所示.

图 2 子区间  $\Sigma_{11}$  的控制目标Fig. 2 Control target of subarea  $\Sigma_{11}$ 

构造第一个 Lyapunov 方程  $V_1$ :

$$V_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_6^2 \quad (11)$$

对  $V_1$  求导, 结合式 (6) 易得:

$$\dot{V}_1 = x_6 [x_3 + F_3(\mathbf{x}) + A_3(\mathbf{x})\tau_1 + B_3(\mathbf{x})\tau_3] \quad (12)$$

根据系统动力学方程式 (6) 的具体形式有:

$$B_3(\mathbf{x}) = \frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{\det(M)}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$$

其中,  $\det(M)$ ,  $M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}$  分别为正定矩阵  $M$  的行列式和二阶主子式, 它们都大于零, 所以有  $B_3(\mathbf{x}) > 0$ , 这样可将第三关节控制律设计为

$$\tau_3 = \frac{-x_3 - F_3(\mathbf{x}) - A_3(\mathbf{x})\tau_1 - \eta_1 x_6}{B_3(\mathbf{x})} \quad (13)$$

式中, 常数  $\eta_1 > 0$ , 此时第一关节处于自由运动状态, 出于简化, 摇起区控制律, 可设

$$\tau_1 = 0 \quad (14)$$

至此, 控制律 (13) 可以保证下列条件成立:

$$\dot{V}_1 = -\eta_1 x_6^2 \leq 0$$

如果  $x_6 = 0$ , 则有  $\dot{V}_1 = 0$ , 根据式 (6) 可知  $x_3$  等于零或一个常数. 当  $x_3$  为零时, 就已经满足本阶段的目标要求; 当  $x_3$  为任意常数时, 利用 LaSalle 不变原理易证  $x_3$  将收敛于零<sup>[3]</sup>. 即表明, 式 (13) 始终能保证  $x_3, x_6$  都趋向于零.

从以上的控制律设计知, 无论系统初始处于什么状态, 通过加入关节力矩式 (13), 都可以迅速使第三杆相对于第二杆自然伸展并保持, 当满足切换条件式 (10) 后, 系统立即由摇起子区间一进入摇起子区间二. 此后, 第三杆的角度和角加速度始终趋向于零, 摇起子区间二控制律设计中可忽略其影响, 这具体体现在摇起子区间二的能量控制.

### 3.2 摇起子区间二控制律

本阶段控制律实现能量与部分连杆姿态的解耦控制, 作用是使系统能量达到稳定在竖直向上的不稳定平衡点所具有的势能, 同时要保持第三杆相对于第二杆为自然伸展的状态.

为了保持第三杆的状态, 控制规律  $\tau_3$  仍然取为式 (13) 不变; 而为了增加系统的能量, 构造第二个 Lyapunov 函数  $V_2$ :

$$V_2 = \frac{(E - E_0)^2}{2} \quad (15)$$

基于  $V_2$  设计控制规律  $\tau_1$ , 实现提高系统能量的目标.

对式 (15) 求导, 由式 (4) 可得:

$$\dot{V}_2 = (E - E_0)(x_4\tau_1 + x_6\tau_3) \quad (16)$$

将式 (13) 代入式 (16), 可得:

$$\dot{V}_2 = (E - E_0) \left[ x_4 - \frac{x_6 A_3(\mathbf{x})}{B_3(\mathbf{x})} \right] \tau_1 - x_6 (E - E_0) \frac{[x_3 + F_3(\mathbf{x}) + \eta_1 x_6]}{B_3(\mathbf{x})} \quad (17)$$

由于系统在  $\Sigma_{12}$  内满足第三杆的角度和角速度均趋向于零, 故式 (16) 可简化为

$$\dot{V}_2 = (E - E_0) x_4 \tau_1 \quad (18)$$

比较式 (16) 和式 (18) 可见, 此时系统能量只与  $\tau_1$  有关, 表明摇起子区间一的控制效果消除了第三连杆姿态对本阶段系统能量的影响, 实现了能量与第三连杆姿态的解耦控制. 为保证  $\dot{V}_2 \leq 0$ , 取控制力矩

$$\tau_1 = -\eta_2 x_4 (E - E_0) \quad (19)$$

式中, 常数  $\eta_2 > 0$ . 可得:

$$\dot{V}_2 = -\eta_2 x_4^2 (E - E_0)^2 \leq 0$$

假设  $E = E_0$  或  $x_4 = 0$ , 则有  $\dot{V}_2 = 0$ . 如果  $E = E_0$  可知系统已达到能量控制目标; 当  $x_4 = 0$  时, 由于系统在  $\Sigma_{12}$  内有  $x_3 = 0, x_6 = 0$  的近似, 能量导数此时可以表示为  $\dot{E} = x_4 \tau_1$ , 那么有  $\dot{E} = 0$ , 推导出  $E$  等于  $E_0$  或一个常数, 当  $E \neq E_0$ , 根据式 (6) 可以得出:

$$F_3(\mathbf{x}) + A_3(\mathbf{x})\tau_1 + B_3(\mathbf{x})\tau_3 = 0 \quad (20)$$

结合式 (19), 用文献 [3] 中的稳定性证明方法, 同样可以得到  $E$  是收敛于  $E_0$  的. 综上所述, 系统进入  $\Sigma_{12}$  后, 控制规律式 (19) 可以保证系统能量始终是收敛于  $E_0$  的, 这表明系统能量能够上升到最大势能, 从而有足够的能量达到平衡区.

#### 4 平衡区控制策略的设计

当摇起控制律使系统进入平衡区之后, 采用基于 LQR (Linear quadratic regulator) 的平衡控制律将其稳定在竖直向上平衡点, 完成控制目标.

根据平衡区的定义, 平衡区中三个连杆与竖直向上方向的夹角均在一个小范围内, 因 LQR 控制的需要, 故对系统的动力学方程 (1) 中所包含的部分非线性项使用如下近似:

$$\begin{cases} \cos x_3 \approx 1, \cos(x_2 + x_3) \approx 1, x_i \approx 0, i = 4, 5, 6 \\ \sin x_1 \approx x_1, \sin(x_1 + x_2) \approx x_1 + x_2 \\ \sin(x_1 + x_2 + x_3) \approx x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

利用竖直向上平衡点  $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$  的线性近似模型和线性系统的最优控制设计平衡控制律. 竖直向上平衡点的近似线性模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (21)$$

其中,  $\mathbf{u} = [\tau_1, \tau_3]^T$ , 取如下性能指标

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}) dt \quad (22)$$

应用黎卡提方程:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (23)$$

上两式中,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_6$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_2$ , 且  $(\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}, \mathbf{A})$  为可观. 从而得到最优控制规律

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{F}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) 中  $\mathbf{F}$  为系统的状态反馈矩阵,  $\mathbf{u}$  即平衡区最佳的平衡控制力矩.

#### 5 仿真算例

仿真算例是在 Matlab 环境下完成的, 它利用 Simulink 来搭建数学模型. 欠驱动三连杆机械臂的各杆参数是我们根据人体比例来设计获得的, 这是本文所提方法的控制对象参数, 从对象结构和参数来看, 与人体比例比较接近. 各杆参数所取的实际值如表 1 所示. 系统的初始状态为  $\mathbf{x}_0 = [\pi, 0, \pi/8, 0, 0, 0]^T$ , 重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . 区间划分中的参数取值如下:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \pi/6$ ,  $\lambda_4 = 0.5 \text{ J}$ ,  $\rho_1 = 10^{-4} \text{ rad}$ ,  $\rho_2 = 10^{-6} \text{ rad/s}$ . 摇起控制器中两个参数  $\eta_1 = 0.058$ ,  $\eta_2 = 5.0$ , 在平衡

控制中, 两个近似状态方程  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  取为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 31.9336 & -93.7117 & 9.3598 & 0 & 0 & 0 \\ -36.9998 & 293.3170 & -47.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 6.2541 & -246.4083 & 88.4251 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4.4484 & -11.6945 & 8.9453 \\ 0 & 0 & 0 & 8.9453 & -32.4850 & 39.5914 \end{bmatrix}^T$$

利用系统参数和设计的参数, 即可求得系统的状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$  如下:

$$\begin{bmatrix} -5.928 & 36.918 & 13.816 & 0.772 & 4.242 & 2.771 \\ 130.093 & 105.894 & 27.718 & 35.949 & 21.376 & 7.702 \end{bmatrix}$$

表 1 欠驱动三连杆机械臂结构参数

Table 1 Structure parameters of three-link underactuated manipulator

$i$ 杆参数	第一杆	第二杆	第三杆
$m_i$ (kg)	1.285	5.686	2.162
$l_i$ (m)	0.34	0.29	0.52
$l_{ci}$ (m)	0.17	0.145	0.26
$J_i$ (kg · m <sup>2</sup> )	0.01218	0.03985	0.04781

图 3 和图 4 显示了欠驱动三连杆机械臂的仿真结果, 其中包括系统总机械能的仿真结果, 各杆角度仿真结果和两个控制力矩的仿真结果. 系统在  $t_1 = 15.85 \text{ s}$  时完成第三杆姿态调整, 满足切换条件式 (10), 进入摇起子区间二, 在式 (13) 和式 (19) 的作用下, 系统总能量之后上升到最大势能, 表明系统有足够的能量达到竖直向上平衡点. 在  $t_2 = 19.32 \text{ s}$  时进入了平衡区, 随后平衡控制律将系统稳定在竖直向上平衡点, 完成了控制目标.

整个控制过程在 25 s 内完成, 第一关节的输出力矩保持在 30 N·m 以内, 第三关节的输出力矩保持在 40 N·m 以内, 可见本文的控制策略在快速性和力矩限制上都达到比较理想的效果.

值得说明的是, 对于本文控制策略, 驱动三连杆机械臂的参数按表 1 选取, 且对参数采取适当比例缩小或扩大都是可以完成控制目标的. 如考虑到实验室资金、空间条件的限制, 我们将表 1 的仿真参数按一定比例缩小成表 2 的情况, 仿真结果如图 5 和图 6 所示, 从图 5 和图 6 可以看出, 该组仿真曲线的趋势与图 3 和图 4 的结果比较类似, 只是能量及力矩同样和系统参数一样有所缩小, 控制时间有所缩短.

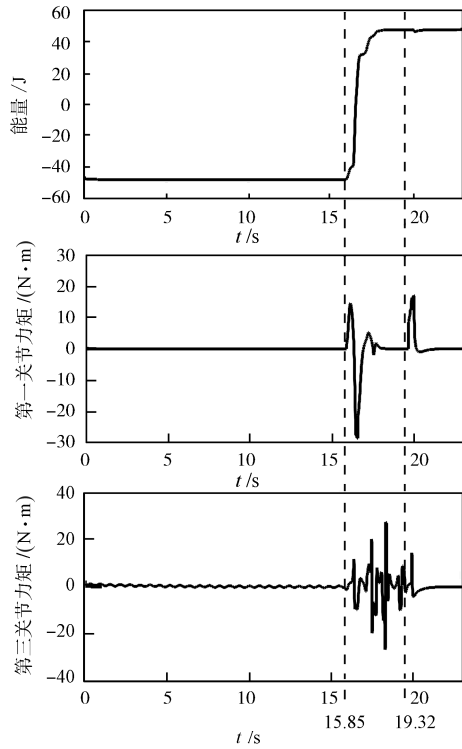


图 3 欠驱动三连杆机械臂的能量及力矩仿真结果  
 Fig. 3 Simulation results of three-link underactuated manipulator's energy and torques

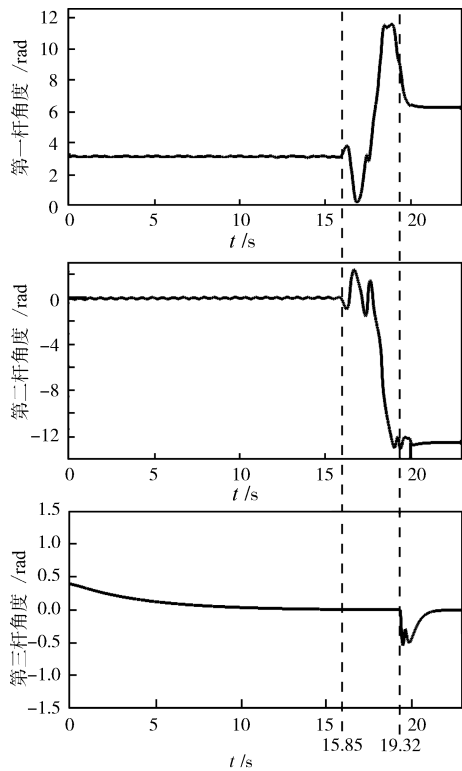


图 4 欠驱动三连杆机械臂的角度仿真结果  
 Fig. 4 Simulation results of three-link underactuated manipulator's angles

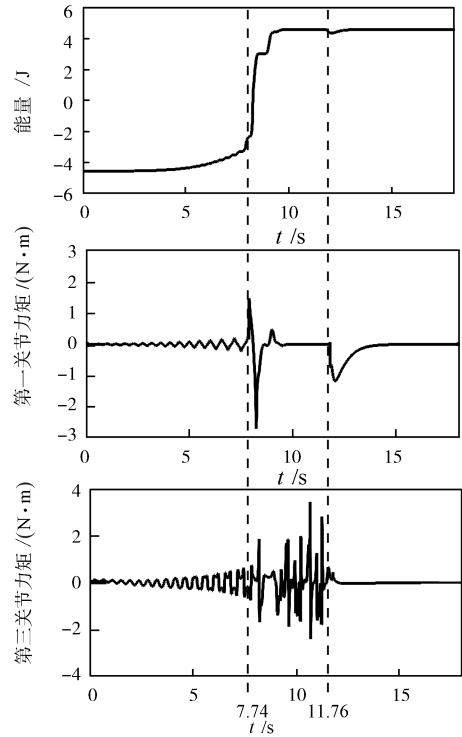


图 5 缩小系统参数后的能量及力矩仿真结果  
 Fig. 5 Simulation results of energy and torques after system parameters are reduced

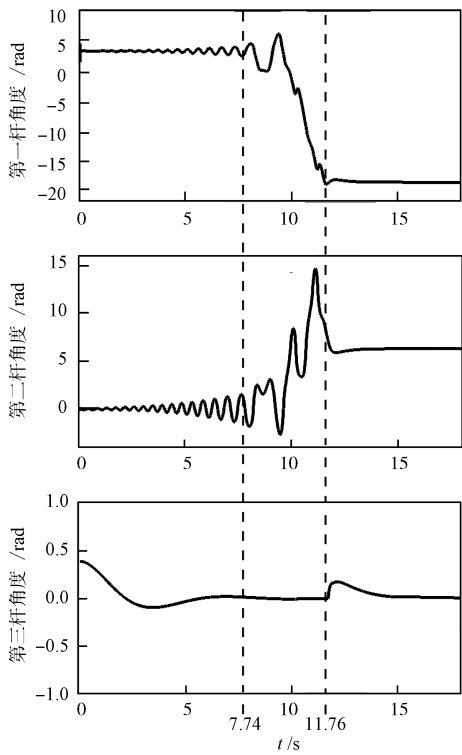


图 6 缩小系统参数后的角度仿真结果  
 Fig. 6 Simulation results of angles after system parameters are reduced

表 2 缩小的欠驱动三连杆机械臂结构参数  
Table 2 Reduced structure parameters of three-link underactuated manipulator

$i$ 杆参数	第一杆	第二杆	第三杆
$m_i$ (kg)	0.22	1.1	0.34
$l_i$ (m)	0.17	0.15	0.26
$l_{ci}$ (m)	0.085	0.075	0.13
$J_i$ (kg·m <sup>2</sup> )	0.00053	0.0021	0.0022

## 6 结论

本文描述了一种欠驱动三连杆机械臂能量与部分连杆姿态解耦的控制策略. 在摇起子区间一的运动中, 应用了基于 Lyapunov 函数的控制律, 使第三杆相对于第二杆处于自然伸展的状态, 解除了摇起子区间二在实现增加能量的控制目标时与第三连杆姿态的耦合, 同时使系统快速进入了摇起子区间二. 随后构造了一个关于能量的 Lyapunov 函数, 得到的控制力矩在增加系统能量的同时保持系统第三杆姿态, 使系统迅速进入了平衡区. 最终由基于 LQR 的平衡控制律将系统稳定在竖直向上平衡点, 实现了控制目标. 仿真结果证明了此方法的正确性和有效性.

另外, 本文中设计的摇起控制律, 可以应用到  $N$  杆欠驱动机械臂 ( $N > 3$ ) 的控制中. 这将很大程度简化  $N$  杆欠驱动系统复杂的控制律设计, 为欠驱动机械系统控制提供一种有效的和可行的新方法.

## References

- Xin X, She J H, Yamasakia T, Liu Y N. Swing-up control based on virtual composite links for  $n$ -link underactuated robot with passive first joint. *Automatica*, 2009, **45**(9): 1986–1994
- White W N, Foss M, Patenaude J, Guo X, Garcia D. Improvements in direct Lyapunov stabilization of underactuated, mechanical systems. In: Proceedings of American Control Conference. Seattle, USA: IEEE, 2008. 2927–2932
- Lai X Z, She J H, Yang S X, Wu M. Comprehensive unified control strategy for underactuated two-link manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, **39**(2): 389–398
- Fantoni I, Lozano R, Spong M W. Energy based control of the pendubot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(4): 725–729
- Astrom K J, Furuta K. Swing up a pendulum by energy control. *Automatica*, 2000, **36**(2): 287–295
- Lai X Z, Yang S X, She J H, Wu M. Singularity avoidance for acrobots based on fuzzy-control strategy. *Robotics and Autonomous Systems*, 2009, **57**(2): 202–211
- Xin X, Kaneda M. Analysis of the energy-based swing-up control of the acrobot. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, **17**(16): 1503–1524
- Lai X Z, She J H, Yang S X, Wu M. Control of acrobot based on non-smooth Lyapunov function and comprehensive stability analysis. *IET Control Theory and Applications*, 2008, **2**(3): 181–191

- Fierro R, Lewis F L, Lowe A. Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 1999, **29**(6): 649–654
- Suzuki T, Kinoshita T, Gunji S. Analysis and control of 3R underactuated manipulator. In: Proceedings of the SICE Annual Conference. Tokyo, Japan: IEEE, 2008. 3086–3090
- Zhang Hua, Li Zu-Shu, Gu Jian-Gong, Chen Gui-Qiang, Tan Zhi. Human simulated intelligence motion control for three-link acrobot on horizontal bar. *Journal of Chongqing University (Natural Science)*, 2007, **32**(3): 74–78 (张华, 李祖枢, 古建功, 陈桂强, 谭智. 三连杆单杠体操机器人的仿人智能运动控制. 重庆大学学报 (自然科学版), 2007, **32**(3): 74–78)
- Li Zu-Shu. The control for swinging up of a pendulum under limited torque — an application of human simulated intelligent control in nonlinear system. *Control Theory and Applications*, 1999, **16**(2): 225–229 (李祖枢. 力矩受限单摆的摆起倒立控制 — 仿人智能控制在非线性系统中的应用. 控制理论与应用, 1999, **16**(2): 225–229)
- Xin X, Kaneda M. Design and analysis of swing-up control for a 3-link gymnastic robot with passive first joint. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 1923–1927



赖旭芝 中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为智能控制、机器人控制和非线性系统.

E-mail: xuzhi@mail.csu.edu.cn

(LAI Xu-Zhi Professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. Her research interest covers intelligent control, robot control, and nonlinear systems.)



张镇 中南大学信息科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为机器人控制.

E-mail: zhangzhen@wuhua.csu.edu.cn (ZHANG Zhen Master student at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His main research interest is robot control.)



吴敏 中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制. 本文通信作者.

E-mail: min@csu.edu.cn

(WU Min Professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers robust control, intelligent control, and process control. Corresponding author of this paper.)