时滞随机关联系统的群稳定性

施继忠 [1,2]　张继业 [1]　徐晓惠 [1]

摘　要　在假定激励是参数白噪声的前提下, 基于箱体理论, 研究了无限维时滞随机关联系统中各子系统的内部联系. 利用向量 Lyapunov 函数法, 研究了无限维时滞随机关联系统的群稳定性, 分别得到了无限维时滞非线性复合随机系统、无限维时滞弱耦合随机系统, 以及无限维时滞车辆跟随随机系统指数群稳定性的充分条件. 最后给出一个算例, 用以说明定理在实际中便于应用.

关键词　伊藤方程, 时滞, 随机关联系统, 箱体理论, 指数群稳定性

DOI　10.3724/SP.J.1004.2010.01744

String Stability of Stochastic Interconnected Systems with Time Delays

SHI Ji-Zhong[1,2]　ZHANG Ji-Ye[1]　XU Xiao-Hui[1]

Abstract　In this paper, the composite stochastic systems with time delays in their low order subsystems are studied in terms of their interconnecting structure by using the box theory. The excitations are assumed to be parametric white noises. By using the vector Lyapunov function method, the exponential string stability about the infinite composite systems with time delays is discussed and the sufficient conditions of exponential string stability for some classes of nonlinear composite stochastic systems are established. The case of exponential string stability for coupling systems with time delays and vehicle-following systems with time delays are considered. The given example shows that the theorem is convenient to be applied in practice.

Key words　Ito equation, time delay, stochastic interconnected systems, box theory, exponential string stability

在工业实际中, 许多系统的控制问题可转化为关联系统进行研究. 对于关联系统的研究主要集中在供电系统的控制[1−2]、分布参数系统的控制[3−4] 以及车辆跟随系统的控制等领域[5−8]. 目前国内外学者对于有限维关联系统的稳定性进行了大量的研究, 并取得了许多有意义的结论[1, 9−10]. Chu 在研究车辆跟随系统的控制时, 提出了无限维关联系统模型, 并定义了群稳定性概念[11], 给出车辆跟随系统群稳定的充分条件. 粗略地说, 关联系统的群稳定性意味着所有系统的状态一致有界. 很多实际问题中涉及到无限维关联系统的群稳定性. 智能交通系统是近年来研究的一个热点领域. 自动化公路系统是智能交通系统的重要组成部分. 在自动化公路系统中, 为了减少车辆拥挤, 避免公路堵塞, 增加车辆流容量, 提高公路运行效率和交通安全, 可以对车辆采取编队运行的控制策略. 伴随着高速公路上车辆的不断驶入和驶出, 车队中车辆的数目不断变化, 使高速公路上车辆的个数难以确定. 所以该系统一般用无限维关联系统来描述. 最近, Swaroop 等在研究自动高速公路系统的车辆跟随控制时, 研究了一类无限维关联系统的 Lyapunov 稳定性, 得到了非线性弱耦合系统群稳定性的充分条件[12−13]. 但是, 文献 [12−13] 研究关联系统稳定性的方法在解决具有强耦合的关联系统时有很大的局限性. 张继业等用向量 V 函数法研究了一类非线性耦合项的无限维关联系统, 建立了箱体理论, 得到了关联系统渐近群稳定的充分条件[14], 为非线性控制系统的设计提供了新的途径, 弥补了文献 [12−13] 中的不足. 但在以上文献的研究中没有考虑随机因素, 而在实际中存在许多随机不确定性因素. 例如车辆所运行的环境和车辆系统本身存在许多随机因素, 在车辆和道路信号的采集和传输中同样存在随机干扰. 系统的稳定性是控制器设计的基础, 因此研究无限维随机关联系统稳定性是有必要的. 近期, Socha 研究了一类非线性随机关联系统[15], 并得到该系统指数群稳定性的一个充分条件. 文中用于判定群稳定性的方法实质上是加权 Lyapunov 函数法, 这种方法在处理具有强耦合项的随机关联系统时比较困难. 此外, 该文献没有考虑时间滞后. 由于信息的传输和车辆的动力学行为对控制指令具有时间滞后, 故时间滞后在关联系统中是不可避免的[16−17].

收稿日期 2010-03-25　录用日期 2010-05-06
Manuscript received March 25, 2010; accepted May 6, 2010
国家自然科学基金 (10772152, 60974132), 国家教育部博士基金 (200806130003) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (10772152, 60974132), Doctoral Fund of Ministry of Education of China (200806130003)

1. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室 成都 610031　2. 巢湖学院数学系 巢湖 238000
1. National Traction Power Laboratory, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031　2. Department of Mathematics, Chaohu College, Chaohu 238000

本文利用箱体理论和向量 Lyapunov 函数法, 研究一类无限维时间滞后随机关联系统的指数群稳定性, 得到了无限维时滞非线性复合随机系统、无限维时滞弱耦合随机系统, 以及无限维时滞车辆跟随随机系统指数群稳定性的充分条件. 与文献 [15] 的结论相比, 本文所得到的参数范围较宽, 在处理具有强耦合项的关联系统时更为有效. 最后给出了一个算例.

1　预备知识与引理

1.1　模型描述及符号

考虑非线性自动复合随机系统

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}^{i-r+1})\mathrm{d}t+\\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}^{i-r+1})\mathrm{d}\xi^i\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $i\in\mathbf{N}$, r 是常数, 且是正整数, $t\in[t_0,+\infty)$, $\boldsymbol{x}^i$ 是每个子系统的状态, $\boldsymbol{x}^i\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{x}^{i-j}\equiv\mathbf{0},\forall i\le j$, $\boldsymbol{f}(\cdot)=\mathrm{col}\{f_1(\cdot),\cdots,f_n(\cdot)\}$ 和 $\boldsymbol{q}(\cdot)=\mathrm{col}\{q_1(\cdot),\cdots,q_n(\cdot)\}$ 是非线性向量函数, $\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})=\boldsymbol{q}(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})=\mathbf{0}$. ξ^i 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的一维标准维纳过程, 其中, Ω 是样本空间, F 是样本空间子集的 σ 代数, P 是概率测度. 假定对于每一个 $t_0\in\mathbf{R}^+$ 和每一个 $\boldsymbol{x}_0^i\in\mathbf{R}^n$, 方程 (1) 有唯一解 $\boldsymbol{x}^i(t,\varpi,x_0^i,t_0)$, $t\ge t_0$, $\boldsymbol{x}^i(t_0,\varpi,x_0^i,t_0)=\boldsymbol{x}_0^i$. 解 $\boldsymbol{x}^i(t,\varpi,x_0^i,t_0)$ 是依概率 1 绝对连续的随机过程[18].

由于信息的传输和硬件的执行等都需要一定的时间, 所以关联系统中包含时间滞后是不可避免的. 在式 (1) 中引入滞后项, 得到时滞非线性自治复合随机系统, 由伊藤方程给出:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}_t^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}_t^{i-r+1})\mathrm{d}t+\\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}_t^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}_t^{i-r+1})\mathrm{d}\xi^i\end{aligned}\tag{2}$$

其中, $i\in\mathbf{N}$, r 是常数, 且是正整数, $t\in[t_0,+\infty)$, $\boldsymbol{x}^i$ 是每个子系统的状态, $\boldsymbol{x}^i\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{x}^{i-j}=\mathbf{0},\forall i\le j$, 且 $\boldsymbol{x}_t^i\in Q_H=\{\boldsymbol{x}_t^i\in C(-\infty,0]:|\boldsymbol{x}_t^i|<H\}$, $\boldsymbol{x}_t^i(\theta)=\boldsymbol{x}^i(t+\theta)$, $\theta\in(-\infty,0]$ 表示固定的时间延迟. 假设系统 (2) 的初始条件为 $\boldsymbol{x}^i(\theta)=\boldsymbol{\phi}^i(\theta)$, $-\infty<\theta\le 0$, $\boldsymbol{\phi}^i$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上有界且连续, 并且假定系统 (2) 满足平衡点的存在性和唯一性条件. $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是非线性向量函数, 且 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}$: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})=\boldsymbol{q}(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})=\mathbf{0}$. ξ^i 是一维标准维纳过程. 假定对于 $\forall t_0\in\mathbf{R}^+$ 和 $\forall\boldsymbol{x}_0^i\in\mathbf{R}^n\times Q_H\times\cdots\times Q_H$, 方程 (2) 有唯一解 $\boldsymbol{x}^i(t,\varpi,x_0^i,t_0)$, $t\ge t_0$, $\boldsymbol{x}^i(t_0,\varpi,x_0^i,t_0)=\boldsymbol{x}_0^i$. 解 $\boldsymbol{x}^i(t,\varpi,x_0^i,t_0)$ 是依概率 1 绝对连续的随机过程[18]. 方便起见, 假定 $t_0=0$.

先定义下面的符号: $\forall p<\infty$, $|\boldsymbol{f}_i(t)|_\infty=\sup_{t\ge0}|\boldsymbol{f}_i(t)|$, $|\boldsymbol{f}_i(\theta)|_\infty=\sup_{\theta\in(-\infty,0]}|\boldsymbol{f}_i(\theta)|$, $||\boldsymbol{f}_i||_\infty^p=||\boldsymbol{f}_i(\cdot)||_\infty^p=\sup_{t\ge0}\mathrm{E}[|\boldsymbol{f}_i(t)|^p]$, $||\boldsymbol{f}(\theta)||_\infty^p=\sup_{i\in N}\mathrm{E}[|\boldsymbol{f}_i(\theta)|^p]$. 其中, $|\cdot|$ 表示欧几里德范数, $\mathrm{E}(\cdot)$ 表示期望.

系统 (2) 可看作如下孤立子系统 x^i, $i\in\mathbf{N}$ 的一个关联系统.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^i,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})\mathrm{d}t+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}^i,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})\mathrm{d}\xi^i\tag{3}$$

1.2　基本定义

定义 1. 考虑系统 (2), 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $\forall t>0$ 使得

$$||\boldsymbol{x}(\theta)||_\infty^p<\delta\Rightarrow\sup_{i\in\mathbf{N}}||\boldsymbol{x}^i(t)||_\infty^p<\varepsilon\tag{4}$$

则称系统 (2) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^i=\mathbf{0}$, $i\in\mathbf{N}$ 是 p 平均群稳定的, 其中 $\theta\in(-\infty,0]$ 表示固定的时间延迟, 这里是指常数.

定义 2. 如果系统 (2) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^i=\mathbf{0},i\in\mathbf{N}$ 是 p 平均群稳定的, 且存在正常数 M_i 和 α_i, $\forall t>0$, 使得

$$\mathrm{E}|\boldsymbol{x}^i(t)|^p<M_i\mathrm{e}^{-\alpha_i t}\tag{5}$$

则称系统 (2) 的平衡点 $\boldsymbol{x}^i=\mathbf{0}$, $i\in\mathbf{N}$ 是指数为 p 的群稳定. 特别地, 当 $p=1$ 时, 称为指数平均群稳定, 当 $p=2$ 时, 称为指数均方群稳定.

1.3　引理

本节运用箱体理论[14] 来证明一个引理.

引理 1. 假定 $V_i=V_i(t,\boldsymbol{x}^i(t))\ge0$ $(\forall t\ge0)$, $V_i(\theta)=V_i(\theta,\boldsymbol{x}^i(\theta))\ge0$, $\mathrm{E}[|V(t,\boldsymbol{x}^i(t))|]<\infty$, $i\in\mathbf{N}$ 且满足下面的微分不等式:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}L_{(1)}(V_i)\le g_i(\mathrm{E}V_i,\mathrm{E}V_{i-1}(t-\tau_1,\boldsymbol{x}^{i-1}(t-\tau_1)),\cdots,\\&\quad\mathrm{E}V_1(t-\tau_{i-1},\boldsymbol{x}^1(t-\tau_{i-1})),t)\cdot\{-\beta_{i0}(\mathrm{E}V_i)^m+\\&\quad\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}[\mathrm{E}V_{i-j}(t-\tau_j,\boldsymbol{x}^{i-j}(t-\tau_j))]^m+\\&\quad\frac{1}{(\mathrm{E}V_i)^m}[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(\mathrm{E}V_{i-j}(t-\tau_j,\boldsymbol{x}^{i-j}(t-\tau_j)))^m]^2\}\\&\qquad\qquad i=1,2,\cdots\end{aligned}\tag{6}$$

对于 $V_i>0$, 有 $g_i(\cdot)>0$, $\beta_{i0}>0$, $\beta_{ij}\ge0$; $\beta_{ij}=0$ $(j>i)$; 当 $i\le j$ 时, $V_{i-j}=0$, $\tau_j\in[0,+\infty)$ 为常数, $i,j=1,2,\cdots$; 其中, $L_{(1)}(\cdot)$ 表示与方程 (1) 有关的算子, 定义如下:

$$
\begin{aligned}
&L_{(1)}(\cdot)=\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}+\\
&\quad\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j^i}f_j(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}^{i-r+1})+\\
&\quad\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j^i\partial x_l^i}\sigma_{lj}(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}^{i-r+1})\\
&\sigma_{lj}=q_l(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}^{i-r+1})\times\\
&\quad q_j(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{i-1},\cdots,\boldsymbol{x}^{i-r+1})
\end{aligned}
$$

如果存在 $\mathrm{E}\boldsymbol{V}=(\mathrm{E}V_{10},\mathrm{E}V_{20},\cdots)$, 使得

$$
\begin{aligned}
&-\beta_{i0}(\mathrm{E}V_{i0})^m+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(\mathrm{E}V_{i-j,0})^m+\frac{1}{(\mathrm{E}V_{i0})^m}\times\\
&(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(\mathrm{E}V_{i-j,0})^m)^2<0,\quad i=1,2,\cdots
\end{aligned}\tag{7}
$$

且 $\inf_i\{\mathrm{E}V_{i0}\}=\alpha>0$, $\sup_i\{\mathrm{E}V_{i0}\}=\beta>0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得

$$
||V(\theta)||_\infty<\delta\Rightarrow\sup\nolimits_{i\in N}||V_i(\cdot)||_\infty<\varepsilon\tag{8}
$$

证明. 引入集合 $\gamma=\{z(l):z_i=l\mathrm{E}V_{i0},l>0,i=1,2,\cdots\}$, $\Omega(z)=\{u:0\le u\le z,z\in\gamma\}$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $l_0>0$ 满足 $\varepsilon=\sup_i\{l_0\mathrm{E}V_{i0}\}$. 取 $\delta=\inf_i\{l_0\mathrm{E}V_{i0}\}$, 令 $O=\{u:u_i=l_0\mathrm{E}V_{i0},u_j\le l_0\mathrm{E}V_{j0},j\ne i,i,j=1,2,\cdots\}$. 显然, $O\subset\Omega(z(l_0))$. 若 $||V(\theta)||_\infty<\delta$, 则 $\mathrm{E}V(\theta)\in\Omega(z(l_0))$ 且 $\mathrm{E}V(\theta)\notin O$. 下面证明, 当 $t>0$ 时, $\sup_{i\in N}||V_i||_\infty<\varepsilon$. 用反证法. 假定存在某一时刻 $t_0>0$, 使得 $\sup_i||V_i(t_0,\boldsymbol{x}^i(t_0))||_\infty=\varepsilon$, 则存在某时刻 $t_1\in[0,t_0]$ 和某个 i 使得 $\mathrm{E}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))\in O$, 即 $\mathrm{E}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))=l_0\mathrm{E}V_{i0}$, $\mathrm{E}V_j(t,\boldsymbol{x}^j(t))\le l_0\mathrm{E}V_{j0}$, $t\in(-\infty,t_1]$, $j=1,2,\cdots$, $j\ne i$. 这就意味着在 $t=t_1$ 时, 有 $\frac{\mathrm{dE}(V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1)))}{\mathrm{d}t}\ge0$, 从而有 $\mathrm{E}[\frac{\mathrm{d}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))}{\mathrm{d}t}]\ge0$, 可是, 根据式 (6) 得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}L_{(1)}(V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1)))\le g_i(\mathrm{E}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1)),\\
&\quad\mathrm{E}V_{i-1}(t_1-\tau_1,\boldsymbol{x}^{i-1}(t_1-\tau_1)),\cdots,\mathrm{E}V_1(t_1-\tau_{i-1},\\
&\quad\boldsymbol{x}^1(t_1-\tau_{i-1})),t_1)\{-\beta_{i0}\mathrm{E}[V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1)]^m+\\
&\quad\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}[\mathrm{E}V_{i-j}(t_1-\tau_j,\boldsymbol{x}^{i-1}(t_1-\tau_j))]^m+\\
&\quad\frac{1}{[\mathrm{E}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))]^m}\times\\
&\quad[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(\mathrm{E}V_{i-j}(t_1-\tau_j,\boldsymbol{x}^{i-1}(t_1-\tau_j)))^m]^2\}\le\\
&\quad g_i(\cdot)\{-\beta_{i0}[\mathrm{E}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))]^m+\\
&\quad\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}\sup_{\theta\in(-\infty,t_1]}[\mathrm{E}V_{i-j}(\theta,\boldsymbol{x}^{i-j}(\theta))]^m+\\
&\quad\frac{1}{[\mathrm{E}V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))]^m}[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}\times\\
&\quad\sup_{\theta\in(-\infty,t_1]}(\mathrm{E}V_{i-j}(\theta,\boldsymbol{x}^{i-j}(\theta)))^m]^2\}
\end{aligned}\tag{9}
$$

再由 $g_i(\cdot)>0$, 式 (7) 和式 (9) 推得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}L_{(1)}(V_i(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1)))\le g_i(\cdot)\{-\beta_{i0}(l_0\mathrm{E}V_{i0})^m+\\
&\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}\sup_{\theta\in(-\infty,t_1]}[\mathrm{E}V_{i-j}(\theta,\boldsymbol{x}^{i-j}(\theta))]^m+\\
&\frac{1}{(l_0\mathrm{E}V_{i0})^m}[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}\sup_{\theta\in(-\infty,t_1]}(\mathrm{E}V_{i-j}(\theta,\boldsymbol{x}^{i-j}(\theta)))^m]^2\}\le\\
&g_i(\cdot)\{-\beta_{i0}(l_0\mathrm{E}V_{i0})^m+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(l_0\mathrm{E}V_{i-j,0})^m+\\
&\frac{1}{(l_0\mathrm{E}V_{i0})^m}[\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}(l_0\mathrm{E}V_{i-j,0})^m]^2\}<0
\end{aligned}
$$

结合 $\mathrm{E}[\frac{\mathrm{d}V(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))}{\mathrm{d}t}]=\mathrm{E}[L_{(1)}V(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))]$[18], 得 $\mathrm{E}[\frac{\mathrm{d}V(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))}{\mathrm{d}t}]<0$. 这与 $\mathrm{E}[\frac{\mathrm{d}V(t_1,\boldsymbol{x}^i(t_1))}{\mathrm{d}t}]\ge0$ 矛盾, 所以假定不成立. 即不存在某一时刻 $t_0>0$, 使得 $\sup_i||V_i(t_0)||_\infty=\varepsilon$, 因而 $\sup_i||V_i(t_0)||_\infty<\varepsilon$. 因此对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $||V(\theta)||_\infty<\delta\Rightarrow\sup_i||V_i(t)||_\infty<\varepsilon$. □

2 主要结果

2.1 无限维时滞非线性复合随机系统的群稳定性

下面运用引理 1 得到无限维时滞非线性复合随机系统指数群稳定性的一个判据.

假设 1. 存在正定函数 $V_i=V(\boldsymbol{x}^i(t))$, $\boldsymbol{x}^i\in\mathbf{R}^n$, $i\in\mathbf{N}$ 关于 x_j^i 连续二次可微, 且存在正常数 α_k, $k=1,2,\cdots,5$ 使得下列不等式成立.

$$
\alpha_1|\boldsymbol{x}^i|^2\le V_i\le\alpha_2|\boldsymbol{x}^i|^2\tag{10}
$$

$$
L_{(3)}V_i\le-\alpha_3|\boldsymbol{x}^i|^2\tag{11}
$$

$$
\left|\frac{\partial V_i}{\partial x_j^i}\right|\le\alpha_4|\boldsymbol{x}^i|,\quad\left|\frac{\partial^2V_i}{\partial x_l^ix_j^i}\right|\le\alpha_5,
$$

$$l, j = 1, 2, \cdots, n, \quad i \in \mathbf{N} \tag{12}$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_3 + n\alpha_1^{-1}\alpha_4 \sum_{l=2}^{r} k_l^f + \frac{1}{2}n^2\alpha_1^{-1} \times \alpha_5 \left[(\sum_{l=2}^{r} k_l^q)^2 + 2k_1^q \sum_{l=2}^{r} k_l^q \right] < 0 \tag{13}$$

假设 2. 存在正常数 k_l^f 和 k_l^q, $l = 1, 2, \cdots, r$ 使得 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 关于它们的参数满足全局 Lipschitz 条件:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_r)| \le \sum_{l=1}^{r} k_l^f |\boldsymbol{y}_l - \boldsymbol{z}_l| \tag{14}$$

$$|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r) - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_r)| \le \sum_{l=1}^{r} k_l^q |\boldsymbol{y}_l - \boldsymbol{z}_l| \tag{15}$$

定理 1. 若时滞复合随机系统 (2) 满足假设 1 和假设 2, 则式 (2) 的零解是指数均方群稳定的.

证明. 为了方便起见, 令 $V_i = V(t, \boldsymbol{x}^i(t))$, 假设 $W_i = \mathrm{e}^{\xi t} V_i$, $\forall \varepsilon > 0$, ξ 为充分小的正数. 于是有

$$\begin{aligned} & L_{(2)} W_i = \xi \mathrm{e}^{\xi t} V_i + \mathrm{e}^{\xi t} L_{(2)} V_i = \\ & \xi \mathrm{e}^{\xi t} V_i + \mathrm{e}^{\xi t} \{ L_{(3)} V_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_j^i} [f_j(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i-1}, \cdots, \\ & \boldsymbol{x}_t^{i-r+1}) - f_j(\boldsymbol{x}^i, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})] + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_l^i \partial x_j^i} \times \\ & [\sigma_{lj}(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_t^{i-r+1}) - \sigma_{lj}(\boldsymbol{x}^i, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})] \} \end{aligned} \tag{16}$$

令 $\tau_j = j\tau \in [0, +\infty)$ 为常数, $j = 1, 2, \cdots, i-1$, 由式 (10) $\sim$ (12), 再使用 Holder 不等式, 得

$$\begin{aligned} & \mathrm{E} L_{(2)} W_i \le \mathrm{e}^{\xi t} (\mathrm{E} V_i)^{\frac{1}{2}} \{ (\xi - \alpha_2^{-1}\alpha_3)(\mathrm{E} V_i)^{\frac{1}{2}} + \\ & n\alpha_1^{-1}\alpha_4 \sum_{l=2}^{r} [k_l^f (\mathrm{E} V_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}}] + \\ & \frac{1}{2} n^2 \alpha_1^{-1} \alpha_5 [(\mathrm{E} V_i)^{-\frac{1}{2}} (\sum_{l=2}^{r} k_l^q (\mathrm{E} V_{i-l+1}(t - \\ & \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}})^2 + 2k_1^q \sum_{l=2}^{r} k_l^q (\mathrm{E} V_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}}] \} \end{aligned} \tag{17}$$

又因为 $W_i = \mathrm{e}^{\xi t} V_i$, 所以有

$$\begin{aligned} & \mathrm{E} L_{(2)} W_i \le (\mathrm{E} W_i)^{\frac{1}{2}} \{ (\xi - \alpha_2^{-1}\alpha_3)(\mathrm{E} W_i)^{\frac{1}{2}} + \\ & n\alpha_1^{-1}\alpha_4 \sum_{l=2}^{r} k_l^f \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} (\mathrm{E} W_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}} + \\ & \frac{1}{2} n^2 \alpha_1^{-1} \alpha_5 [(\mathrm{E} W_i)^{-\frac{1}{2}} (\sum_{l=2}^{r} k_l^q (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} \mathrm{E} W_{i-l+1} \times \\ & (t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}})^2 + 2k_1^q \sum_{l=2}^{r} k_l^q \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} \times \\ & (\mathrm{E} W_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}}] \} \end{aligned} \tag{18}$$

再根据式 (13) 得, 存在 $\xi > 0$, 使得

$$\xi - \alpha_2^{-1}\alpha_3 + n\alpha_1^{-1}\alpha_4 \sum_{l=2}^{r} k_l^f \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} + \frac{1}{2} n^2 \alpha_1^{-1} \alpha_5 \times \left[\left(\sum_{l=2}^{r} k_l^q \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\xi\tau_{l-1}} \right)^2 + 2k_1^q \sum_{l=2}^{r} k_l^q \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} \right] < 0 \tag{19}$$

于是存在 $\mathrm{E} W_{i-j,0} = 1, \quad j = 0, 1, \cdots, i-1$, 使得

$$\begin{aligned} & (\xi - \alpha_2^{-1}\alpha_3)(\mathrm{E} W_i)^{\frac{1}{2}} + n\alpha_1^{-1}\alpha_4 \sum_{l=2}^{r} k_l^f \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} \times \\ & (\mathrm{E} W_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} n^2 \alpha_1^{-1} \alpha_5 [(\mathrm{E} W_i)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\sum_{l=2}^{r} k_l^q (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} \mathrm{E} W_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \\ & 2k_1^q \sum_{l=2}^{r} k_l^q \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi\tau_{l-1}} (\mathrm{E} W_{i-l+1}(t - \tau_{l-1}))^{\frac{1}{2}}] < 0, \\ & i = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{20}$$

根据引理 1 得对于任意的 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$||W(\theta)||_\infty < \delta_0 \Rightarrow \sup_{i \in \mathbf{N}} ||W_i(t)||_\infty < \varepsilon_0 \tag{21}$$

由 $\alpha_1 > 0$, 存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 满足 $\varepsilon_0 = \alpha_1 \varepsilon^2, \delta_0 = \alpha_1 \delta^2$, 使得

$$||\boldsymbol{x}(\theta)||_\infty < \delta \Rightarrow \sup_{i \in \mathbf{N}} ||\boldsymbol{x}^i(t)||_\infty < \varepsilon \tag{22}$$

由定义 2 得系统 (2) 是 p 平均群稳定的. 由式 (10) 有

$$\sup_i |\boldsymbol{x}^i(t)|^2 \le \alpha_1^{-1}(V_i(\boldsymbol{x}_i)) = \alpha_1^{-1} W_i \mathrm{e}^{-\xi t} \tag{23}$$

又 $\sup_i ||W_i(t)||_\infty < \varepsilon_0$, 于是

$$\mathrm{E}|\boldsymbol{x}^i(t)|^2 \le \alpha_1^{-1}\mathrm{E}(V_i(\boldsymbol{x}_i)) = \alpha_1^{-1}\mathrm{E}(W_i)\mathrm{e}^{-\xi t} < \alpha_1^{-1}\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\xi t}$$

即

$$\mathrm{E}|\boldsymbol{x}^i(t)|^2 < \alpha_1^{-1}\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\xi t} \tag{24}$$

由定义 2 得, 时滞随机系统 (2) 的零解是指数均方群稳定. □

注 1. 文献 [15] 所研究的系统中不含时间滞后, 并且用于判定群稳定性的方法实质上是加权 Lyapunov 函数法, 但这种方法在处理具有强耦合项的关联系统时具有一定的局限性. 本文定理 1 的证明采用的是向量 Lyapunov 函数法, 不仅可以克服上述困难, 而且所得结论的参数范围较宽.

2.2 无限维时滞车辆跟随随机系统的群稳定性

我们很容易把定理 1 推广到车辆跟随系统. 观察下面给出的车辆跟随系统[11]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{i-1}, \dot{\boldsymbol{x}}^{i-1}) \tag{25}$$

相应的时滞随机模型可由下面的伊藤方程给出:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i =& \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i-1}, \boldsymbol{f}_{i-1}(\cdot))\mathrm{d}t + \\ & \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i-1}, \boldsymbol{q}_{i-1}(\cdot))\mathrm{d}\xi^i\end{aligned} \tag{26}$$

其中, $i \in \mathbf{N}$, $t \in [t_0, +\infty)$, $\boldsymbol{x}^i$ 是每个子系统的状态, $\boldsymbol{x}^i \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x}^{i-j} \equiv \mathbf{0}$, $\forall i \le j$, $\boldsymbol{x}_t^i \in Q_H = \{\boldsymbol{x}_t^i \in C[-h, 0] : ||\boldsymbol{x}_t^i|| < H\}$. $\boldsymbol{f}_i$ 和 $\boldsymbol{q}_i$ 是非线性向量函数, $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q} : \mathbf{R}^n \times Q_H \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{f}_i(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) = \boldsymbol{q}_i(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. ξ^i 是一维标准维纳过程.

观察孤立子系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0})\mathrm{d}t + \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0})\mathrm{d}\xi^i, \quad i \in \mathbf{N} \tag{27}$$

显然, 系统 (26) 是式 (27) 的一个关联系统, 下面的定理确立了系统 (26) 指数均方群稳定性的一个充分条件.

假设 3. 存在正定函数 $V_i = V(\boldsymbol{x}^i(t))$, $\boldsymbol{x}^i \in \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{N}$ 关于 x_j^i 连续二次可微, 且存在正常数 α_k, $k = 1, 2, \cdots, 5$ 使得下列不等式成立.

$$\alpha_1|\boldsymbol{x}^i|^2 \le V_i \le \alpha_2|\boldsymbol{x}^i|^2 \tag{28}$$

$$L_{(27)}V_i \le -\alpha_3|\boldsymbol{x}^i|^2 \tag{29}$$

$$\left|\frac{\partial V_i}{\partial x_j^i}\right| \le \alpha_4|\boldsymbol{x}^i|, \ \left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_l^i x_j^i}\right| \le \alpha_5, \quad l, j = 1, 2, \cdots, n, \quad i \in \mathbf{N} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}& -\alpha_2^{-1}\alpha_3 + n\alpha_1^{-1}\alpha_4(k_2^f + d_1^f k_1^f)\sum_{j=1}^{i-1}(d_1^f)^{j-1} + \\ & \frac{1}{2}n^2\alpha_1^{-1}\alpha_5\left[2k_1^q + (k_2^q + d_1^q k_1^q)\sum_{j=1}^{i-1}(d_1^q)^{j-1}\right] \times \\ & \left[(k_2^q + d_1^q k_1^q)\sum_{j=1}^{i-1}(d_1^q)^{j-1}\right] < 0\end{aligned} \tag{31}$$

假设 4. 存在正常数 k_l^f 和 k_l^q, $l = 1, 2, \cdots, r$ 使得 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 关于它们的参数满足全局 Lipschitz 条件:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)| \le k_1^f|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{z}_1| + k_2^f|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{z}_2| + d_1^f|\boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{z}_3| \tag{32}$$

$$|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)| \le k_1^q|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{z}_1| + k_2^q|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{z}_2| + d_1^q|\boldsymbol{y}_3 - \boldsymbol{z}_3| \tag{33}$$

定理 2. 若时滞复合随机系统 (26) 满足假设 3 和假设 4, 则其零解是指数均方群稳定的.

证明. 假设 $W_i = \mathrm{e}^{\xi t}V_i$, $\forall \varepsilon > 0$, ξ 为任意小的正数, 则

$$\begin{aligned}& L_{(26)}W_i = \xi\mathrm{e}^{\xi t}V_i + \mathrm{e}^{\xi t}L_{(26)}V_i = \xi\mathrm{e}^{\xi t}V_i + \mathrm{e}^{\xi t} \times \\ & \{L_{(27)}V_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^i}[f_j(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i-1}, f_{i-1}(\cdot)) - f_j(\boldsymbol{x}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0})] + \\ & \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V_i}{\partial \boldsymbol{x}_l^i \partial \boldsymbol{x}_j^i}[\sigma_{lj}(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i-1}, q_{i-1}(\cdot)) - \sigma_{lj}(\boldsymbol{x}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0})]\}\end{aligned}$$

令 $\tau_j = j\tau \in [0, +\infty)$, $j = 1, 2, \cdots, i-1$, 由式 (28) $\sim$ (30) 得

$$\begin{aligned}& \mathrm{E}L_{(26)}W_i \le (\mathrm{E}W_i)^{\frac{1}{2}}\{(\xi - \alpha_2^{-1}\alpha_3)(\mathrm{E}W_i)^{\frac{1}{2}} + \\ & n\alpha_1^{-1}\alpha_4(k_2^f + d_1^f k_1^f)\sum_{j=1}^{i-1}(d_1^f)^{j-1}(\mathrm{E}W_{i-j}(t - \tau_j))^{\frac{1}{2}} + \\ & \frac{1}{2}n^2\alpha_1^{-1}\alpha_5[2k_1^q + (k_2^q + d_1^q k_1^q)(\mathrm{E}W_i)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \sum_{j=1}^{i-1}(d_1^q)^{j-1}(\mathrm{E}W_{i-j}(t - \tau_j))^{\frac{1}{2}}] \times\end{aligned}$$

$$[(k_2^q + d_1^q k_1^q)\sum_{j=1}^{i-1}(d_1^q)^{j-1}(\mathrm{E}W_{i-j}(t-\tau_j))^{\frac{1}{2}}]\}$$

接下来的证明与定理 1 的证明类似, 因此无限维时滞车辆跟随随机系统 (26) 的零解是指数均方群稳定的. □

2.3 无限维时滞弱耦合随机系统的指数群稳定性

考虑下面的时滞复合随机系统, 它的每个子系统都是由它的相邻子系统连接而成:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i = f(\boldsymbol{x}_t^{i-1}, \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i+1})\mathrm{d}t + \\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_t^{i-1}, \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}_t^{i+1})\mathrm{d}\xi^i\end{aligned} \tag{34}$$

其中, $i \in \mathbf{N}$, $t \in [t_0, +\infty)$, $\boldsymbol{x}^i$ 是每个子系统的状态, $\boldsymbol{x}^i \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x}^{i-j} \equiv \mathbf{0}$, $\forall i \leq j$, $\boldsymbol{x}_t^i \in Q_H = \{\boldsymbol{x}_t^i \in C[-h, 0] : ||\boldsymbol{x}_t^i|| < H\}$. $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是非线性向量函数, $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q} : Q_H \times \mathbf{R}^n \times Q_H \to \mathbf{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \boldsymbol{q}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. ξ^i 是一维标准维纳过程. 观察如下孤立子系统:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}^i, \mathbf{0})\mathrm{d}t + \boldsymbol{q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}^i, \mathbf{0})\mathrm{d}\xi^i, \quad i \in \mathbf{N} \tag{35}$$

显然, 系统 (34) 是式 (35) 的一个关联系统. 下面的定理确立了时滞系统 (34) 的零解指数平均平方群稳定性的一个充分条件.

假设 5. 存在正定函数 $V_i = V(\boldsymbol{x}^i(t))$, $\boldsymbol{x}^i \in \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{N}$ 关于 x_j^i 连续二次可微, 且存在正常数 α_k, $k = 1, 2, \cdots, 5$ 使得下列不等式成立.

$$\alpha_1|\boldsymbol{x}^i|^2 \leq V_i \leq \alpha_2|\boldsymbol{x}^i|^2 \tag{36}$$

$$L_{(35)}V_i \leq -\alpha_3|\boldsymbol{x}^i|^2 \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial V_i}{\partial x_j^i}\right| \leq \alpha_4|\boldsymbol{x}^i|, \ \left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_l^i x_j^i}\right| \leq \alpha_5, \\ l, j = 1, 2, \cdots, n, \ i \in \mathbf{N}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}-\alpha_2^{-1}\alpha_3 + n\alpha_1^{-1}\alpha_4\left(k_1^f + k_3^f\right) + \frac{1}{2}n^2 \times \\ \alpha_1^{-1}\alpha_5(2k_2^q + k_1^q + k_3^q)(k_1^q + k_3^q) < 0\end{aligned} \tag{39}$$

假设 6. 存在正常数 k_l^f 和 k_l^q, $l = 1, 2, 3$ 使得 f 和 q 关于它们的参数满足全局 Lipschitz 条件:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)| \leq \sum_{l=1}^{3} k_l^f|\boldsymbol{y}_l - \boldsymbol{z}_l| \tag{40}$$

$$|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3)| \leq \sum_{l=1}^{3} k_l^q|\boldsymbol{y}_l - \boldsymbol{z}_l| \tag{41}$$

定理 3. 若时滞随机系统 (34) 满足假设 5 和假设 6, 则其零解是指数均方群稳定的.

证明. 假设 $W_i = \mathrm{e}^{\xi t}V_i$, $\forall \varepsilon > 0$, ξ 为任意小的正数.

$$\begin{aligned}&L_{(34)}W_i = \xi\mathrm{e}^{\xi t}V_i + \mathrm{e}^{\xi t}L_{(34)}V_i = \xi\mathrm{e}^{\xi t}V_i + \mathrm{e}^{\xi t}\times \\ &\{L_{(35)}V_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial x_j^i}[f_j(\boldsymbol{x}^{i-1}(t+\tau), \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{i+1}(t-\tau)) - \\ &f_j(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}^i, \mathbf{0})] + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_l^i \partial x_j^i}[\sigma_{lj}\times \\ &(\boldsymbol{x}^{i-1}(t+\tau), \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{i+1}(t-\tau)) - \sigma_{lj}(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}^i, \mathbf{0})]\}\end{aligned}$$

由式 (36) ~ (38) 得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}L_{(34)}W_i \leq (\mathrm{E}W_i)^{\frac{1}{2}}\{(\xi - \alpha_2^{-1}\alpha_3)(\mathrm{E}W_i)^{\frac{1}{2}} + \\ &n\alpha_1^{-1}\alpha_4[k_1^f(\mathrm{E}W_{i-1}(t+\tau))^{\frac{1}{2}} + \\ &k_3^f(\mathrm{E}W_{i+1}(t-\tau))^{\frac{1}{2}}] + \frac{1}{2}n^2\alpha_1^{-1}\alpha_5 \times \\ &[(\mathrm{E}W_i)^{-\frac{1}{2}}(k_1^q(\mathrm{E}W_{i-1}(t+\tau))^{\frac{1}{2}} + \\ &k_3^q(\mathrm{E}W_{i+1}(t-\tau))^{\frac{1}{2}}))(k_1^q(\mathrm{E}W_{i-1}(t+\tau))^{\frac{1}{2}} + \\ &2k_2^q(\mathrm{E}W_i)^{\frac{1}{2}} + k_3^q(\mathrm{E}W_{i+1}(t-\tau))^{\frac{1}{2}})]\}\end{aligned}$$

接下来的证明与定理 1 类似, 因此无限维时滞耦合随机系统 (34) 是指数均方群稳定的. □

3 例子

考虑系统 (1) 和 (2) 的一个特例, 设 $x^i, i \in \mathbf{N}$, $t \in [t_0, +\infty)$ 是标量, 取如下复合随机系统:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^i = \left[f(x^i) + \sum_{j=1}^{r}p_{i-j+1}x^{i-j+1}\right]\mathrm{d}t + \\ \left[g(x^i) + \sum_{j=1}^{r}q_{i-j+1}x^{i-j+1}\right]\mathrm{d}\xi^i, \quad i \in \mathbf{N}\end{aligned} \tag{42}$$

引入时滞项, 得到相应的由伊藤方程描述的非线性

时滞复合随机系统:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^i =&[f(x^i)+p_ix^i+\sum_{j=2}^{r}p_{i-j+1}x_t^{i-j+1}]\mathrm{d}t+\\&[g(x^i)+q_ix^i+\sum_{j=2}^{r}q_{i-j+1}x_t^{i-j+1}]\mathrm{d}\xi^i\end{aligned}\tag{43}$$

对应的孤立子系统为

$$\mathrm{d}x^i=[f(x^i)+p_ix^i]\mathrm{d}t+[g(x^i)+q_ix^i]\mathrm{d}\xi^i\tag{44}$$

其中, p_i 和 q_i 是常数参数, f 和 q 是非线性函数, 满足 $0\le f(x^i)x^i\le M_1|x^i|^2$, $f(0)=0$, $0\le g(x^i)x^i\le M_2|x^i|^2, g(0)=0$. ξ^i 是一维标准维纳过程. 假定关于每个子系统的 Lyapunov 函数为

$$V_i=V(x^i)=\alpha_i|x^i|^2,\quad i\in\mathbf{N}\tag{45}$$

其中, $a_i>0$ 是常数参数.

类似于第 2 节的讨论, 得到

$$\begin{aligned}L_{(43)}V_i=&2\alpha_ix^i[f(x^i)+p_ix^i+\\&\sum_{j=2}^{r}p_{i-j+1}x_t^{i-j+1}]+\alpha_i[g(x^i)+q_ix^i+\\&\sum_{j=2}^{r}q_{i-j+1}x_t^{i-j+1}]^2,\quad i\in\mathbf{N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}L_{(43)}W_i\le&(\mathrm{E}W_i)^{\frac12}\{\xi(\mathrm{E}W_i)^{\frac12}+2M_1\alpha_i^{-1}\times\\&(\mathrm{E}W_i)^{\frac12}+2\sum_{j=1}^{r}p_{i-j+1}(\mathrm{E}W_{i-j+1}t-\tau_{j-1})^{\frac12}]+\\&[M_2+(\mathrm{E}W_i)^{-\frac12}\sum_{j=1}^{r}q_{i-j+1}(\mathrm{E}W_{i-j+1}t-\tau_{j-1})^{\frac12}]^2\}\end{aligned}$$

根据定理 1, 系统 (43) 的零解是指数均方群稳定的充分条件为

$$2M_1\alpha_i^{-1}+2\sum_{j=1}^{r}p_{i-j+1}+(M_2+\sum_{j=1}^{r}q_{i-j+1})^2<0$$

4 结论

本文基于箱体理论, 利用向量 Lyapunov 函数法, 分别得到了无限维时滞非线性复合随机系统、无限维时滞弱耦合随机系统, 以及无限维时滞车辆跟随随机系统指数群稳定性的充分条件. 与文献 [15] 相比, 所得结论的参数范围较宽, 在处理具有强耦合项的关联系统时更为有效. 此外, 以箱体理论为基础, 本文的结果还可以进一步推广到非自治复合随机系统[19] 和非线性奇异摄动复合随机系统[20].

References

1 Siljak D D. *Large-Scale Dynamic Systems Stability and Structure*. North-Holland: Amstrerdam, 1978

2 Davison E J, Tripathi N. The optimal decentralized control of a large power system: load and frequence control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, **23**(2): 312−325

3 Ei-Sayed M L, Krishnaprasad P S. Homogenous interconnected systems: an example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(4): 894−901

4 Ozguner U, Barbieri E. Decentralized control of a class of distributed parameter systems. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. Florida, USA: IEEE, 1985. 932−935

5 Melzer S M, Kuo B C. Optimal regulation of systems described by a countably infinite number of objects. *Automatica*, 1971, **7**(3): 359−366

6 Caudill R J, Garrard W L. Vehicle-follower longitudinal control for automated transit vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1977, **99**(4): 241−248

7 Levine W, Athans M. On the optimal error regulation of a string of moving vehicles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966, **11**(3): 355−361

8 Barbieri E. Stability analysis of a class of interconnected systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1993, **115**(3): 546−551

9 Socha L, Popp K. The *p*-moment global exponential stability of linear large scale systems. *Large Scale Systems*, 1986, **10**(1): 75−93

10 Mao X. *P*th moment exponential stability of large-scale stochastic delay systems in hierarchical form. In: Proceedings of the International Conference on Differential Equations and Control Theory. Wuhan, China: Marcel Dekker, 1995. 213−229

11 Chu K C. Decentralized control of high-speed vehicular strings. *Transportation Science*, 1974, **8**(4): 361−384

12 Swaroop D, Hedrick J K, Chen C C, Ioannou P. A comparison of spacing and headway control laws for automatically controlled vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1994, **23**(1): 597−625

13 Swaroop D, Hedrick J K. String stability of interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(3): 349−357

14 Zhang Ji-Ye, Yang Yi-Ren, Zeng Jing. String stability of infinite interconnected system. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, **21**(7): 715−719
(张继业, 杨翊仁, 曾京. 无限维关联系统的弦稳定性. 应用数学和力学, 2000, **21**(7): 715−719)

15 Socha L. Stochastic stability of interconnected string systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, **19**(4): 949−955

16 Ren Dian-Bo, Zhang Ji-Ye, Sun Lin-Fu. Stability analysis of vehicle following system with delays based on vector Lyapunov function. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2007, **7**(4): 89−92
(任殿波, 张继业, 孙林夫. 基于向量 Lyapunov 函数的时滞车辆跟随系统稳定性分析. 交通运输工程学报, 2007, **7**(4): 89−92)

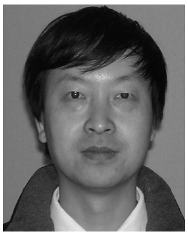
17 Ren Dian-Bo, Zhang Ji-Ye. Lyapunov function approach to longitudinal following control of vehicles in platoon with delays. *Control and Decision*, 2007, **22**(8): 918−921
(任殿波, 张继业. 基于 Lyapunov 函数方法的时滞车辆纵向跟随控制. 控制与决策, 2007, **22**(8): 918−921)

18 Has′minski R Z, Swierczkowski S. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Berlin: Springer, 1980

19 Socha L. The asymptotic stochastic stability in large of the composite stochastic systems. *Automatica*, 1986, **22**(5): 605−610

20 Socha L. Exponential stability of singularly perturbed stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(3): 576−580

施继忠 讲师, 西南交通大学牵引动力国家重点实验室博士研究生. 2007 年获得西南交通大学理学硕士学位. 主要研究方向为系统稳定性分析与控制. 本文通信作者.
E-mail: shijizhong2006@126.com
(**SHI Ji-Zhong** Lecturer, Ph. D. candidate at the National Traction Power Laboratory, Southwest Jiaotong University. He received his master degree from Southwest Jiaotong University in 2007. His research interest covers analysis and control on stability of systems. Corresponding author of this paper.)



张继业 西南交通大学牵引动力国家重点实验室教授. 主要研究方向为系统稳定性分析与控制, 空气动力学和智能交通系统.
E-mail: jyzhang@home.swjtu.edu.cn
(**ZHANG Ji-Ye** Professor at the National Traction Power Laboratory, Southwest Jiaotong University. His research interest covers analysis and control on stability of systems, aerodynamics, and intelligent transportation systems.)

徐晓惠 西南交通大学牵引动力国家重点实验室博士研究生. 主要研究方向为系统稳定性分析与控制.
E-mail: xhxu@163.com
(**XU Xiao-Hui** Ph. D. candidate at the National Traction Power Laboratory, Southwest Jiaotong University. Her research interest covers analysis and control on stability of systems.)