

基于网络通信的多机器人系统的稳定性分析

吴俊¹ 陆宇平¹

摘要 研究多机器人系统的协同一致性问题. 在考虑了系统中存在采样、保持以及时延的情况下, 对多机器人系统进行稳定性分析. 提出了一种简便的图形的稳定性判据, 以保证多机器人协同控制系统的一致性收敛. 在此基础上, 推导出了时延为一个采样周期时系统的稳定域. 最后, 利用 Matlab 进行车辆编队控制系统的仿真, 结果证明了提出的稳定性判据的可行性.

关键词 多机器人系统, 协同控制, 一致性算法, 系统稳定性

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.01706

Stability Analysis of Multi-robot System Based on Network Communication

WU Jun¹ LU Yu-Ping¹

Abstract This paper investigated the cooperative consensus problem for multi-robot systems. The stability of the multi-robot system was analyzed with the presence of sampling, hold and time delays. A simple diagrammatic stability criterion was presented to guarantee that the cooperative control of multi-robot system could achieve consensus. Based on this criterion, the system stability region was derived when the time delay was equal to a sampling period. Finally, simulation examples of vehicle formations were provided to show the validity of the diagrammatic stability criterion.

Key words Multi-robot system, cooperative control, consensus algorithm, system stability

多机器人的协同控制^[1-2], 是使一群机器人根据通信协议和分布的信息去完成一个共同的任务. 与单个机器人执行任务相比, 协同控制多个机器人能够执行更复杂的任务、缩短执行任务的时间、提高工作的效率, 并且能够提高系统的鲁棒性能. 因而, 被大量应用于编队控制系统^[3-5]、大型物体搬运^[6]等各个领域.

协同控制多机器人系统, 一个必要条件是机器人能通过通信网络进行信息交换^[7], 但这也带来了一些控制和镇定方面的问题. 首先, 机器人是一个连续系统, 而机器人之间进行信息交换只能在某些离散的时刻. 这样, 系统就同时表现出连续和离散两种动态特性. 其次, 有限的信道数据率自然会产生不可忽略的通信时延. 再次, 系统的动态性能不仅取决于单个机器人的动力学特征, 还取决于它们之间的互连本质. 另外, 系统中存在大量的输入和输出, 用集中式控制来实现是不实际的.

使网络化的机器人收敛至同一稳态, 即所谓的一致性^[7-8], 是协同控制研究的重要内容, 受到了国内外的广泛关注. Fax 等^[9] 和 Olfati-Saber 等^[10] 将图论和 Nyquist 稳定性判据用于协同控制之中. Kim 等^[11] 提出了一种基于采样通信的多智

能体连续动态系统的分布式编队控制方案. 该方案局限于单输入单输出 (Simple input simple output, SISO) 系统. Massioni 等^[12] 为互连的同构子系统设计了分布式控制器. 其只适合无时滞系统. Munz 等^[13] 研究了互连的二阶时滞系统的稳定性. 但其中采用的是时间连续通信的网络, 而不是采样通信的网络.

本文研究了多机器人系统在协同一致算法下的稳定性. 考虑了采样通信以及时延等约束条件, 提出了一种图形的稳定性判据. 最后, 提供一个车辆编队的算例来验证判据是有效的.

符号: I_N 表示 $N \times N$ 单位阵, M^T 表示矩阵 M 的转置, \otimes 表示 Kronecker 积.

1 编队控制系统

考虑一组相同的机器人, $P = \{P_i, i = 1, \dots, N\}$, 其中, N 为机器人的数量. P_i 的连续状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{xi}(t) \\ \dot{r}_{yi}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \\ \dot{v}_i(t) \\ \dot{\omega}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i(t) \cos \theta_i(t) \\ v_i(t) \sin \theta_i(t) \\ \omega_i(t) \\ \frac{f_i(t)}{m_i} \\ \frac{\tau_i(t)}{J_i} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, 点 (r_{xi}, r_{yi}) 是 P_i 的位置, v_i 、 θ_i 、 ω_i 、 f_i 和 τ_i 分别为 P_i 的线速度、偏转角度、角速度、控制力和控制力矩. m_i 和 J_i 分别 P_i 的质量和转动惯量.

收稿日期 2010-01-21 录用日期 2010-06-04
Manuscript received January 21, 2010; accepted June 4, 2010
国家自然科学基金 (90605007) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (90605007)

1. 南京航空航天大学自动化学院 南京 210016
1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

为了避免式 (1) 引入的非完整约束, 定义

$$\mathbf{h}_i(t) = \begin{bmatrix} r_{xi}(t) + l \cdot \cos \theta_i(t) \\ r_{yi}(t) + l \cdot \sin \theta_i(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, \mathbf{h}_i 为引导点的位置, l 为导引点与点 (r_{xi}, r_{yi}) 之间的距离.

根据文献 [14], 对机器人引导点的动力学模型进行输出反馈线性化, 令

$$\mathbf{u}_i(t) = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_i(t)}{m_i} & -\frac{l \cdot \sin \theta_i(t)}{J_i} \\ \frac{\sin \theta_i(t)}{m_i} & \frac{l \cdot \cos \theta_i(t)}{J_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i(t) \\ \tau_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_i(t)\omega_i(t) \sin \theta_i(t) - l \cdot \omega_i^2(t) \cos \theta_i(t) \\ v_i(t)\omega_i(t) \cos \theta_i(t) - l \cdot \omega_i^2(t) \sin \theta_i(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

则模型 (1) 转化为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = A\mathbf{x}_i(t) + B\mathbf{u}_i(t) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i \\ \dot{\mathbf{h}}_i \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$.

为了保证协调合作, 每个机器人必须知道某些其他机器人的状态, 并与其相互作用. 对任一机器人, 通过通信链路与其相连的机器人的集合称为邻域. P_i 的邻域表示为 $\mathfrak{S}_i \subset [1, N] \setminus \{i\}$. 因此, 考虑系统如下: 机器人的输出每 T 秒采样一次, 其中, T 为固定采样周期. 采样数据经过通信时延 τ 秒后传输到邻域中的机器人. 机器人的局部控制器根据控制律和接收的信息产生一个控制信号. 零阶保持器将离散的控制信号维持一个采样周期 T , 以获得连续的输入信号. 从而, 多机器人系统构成了一个闭环结构, 以完成预期的目标.

本文考虑的控制率为协同的一致性算法, 描述如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & -k_h \mathbf{h}_i(kT) - k_v \dot{\mathbf{h}}_i(kT) - \\ & \sum_{j \in \mathfrak{S}_i} \frac{1}{D(i)} \left\{ d_h [\mathbf{h}_i(kT) - \mathbf{h}_j(kT)] + \right. \\ & \left. d_v [\dot{\mathbf{h}}_i(kT) - \dot{\mathbf{h}}_j(kT)] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, k_h 、 k_v 、 d_h 、 d_v 均为实数, $D(i)$ 等于集合 \mathfrak{S}_i 的势, $\tau = dT$, $d = 1, 2, \dots$.

2 系统稳定性分析

2.1 系统稳定性判据

令 $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \ \mathbf{x}_2^T(t) \ \dots \ \mathbf{x}_N^T(t)]^T$ 及 $\mathbf{u}(t) =$

$[\mathbf{u}_1^T(t) \ \mathbf{u}_2^T(t) \ \dots \ \mathbf{u}_N^T(t)]^T$ 分别表示系统中所有机器人的状态和输入. 根据式 (4) 和式 (5) 得到全局闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (I_N \otimes A)\mathbf{x}(t) + (I_N \otimes B)\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) = -(I_N \otimes [k_h I_2 \ k_v I_2])\mathbf{x}(kT) - \\ \quad (L \otimes [d_h I_2 \ d_v I_2])\mathbf{x}(kT), \\ t \in [kT + \tau, (k+1)T + \tau) \end{cases} \quad (6)$$

其中, Laplacian 矩阵^[9] $L \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 定义为

$$L(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\frac{1}{D(i)}, & j \in \mathfrak{S}_i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

采用该架构, 文献 [9] 中的定理 3 表明, 系统 (6) 稳定等价于对所有的 λ_i , N 个子系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = A\mathbf{x}_i(t) + B\mathbf{u}_i(t) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & -[(k_h + \lambda_i d_h)I_2 \ (k_v + \lambda_i d_v)I_2]\mathbf{x}_i(kT), \\ & t \in [kT + \tau, (k+1)T + \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

同时稳定, 其中 λ_i 为 L 的特征值.

下面给出系统的稳定性判据.

引理 1. 设 $G(z)$ 为开环传递函数, 且有 $G(\infty)$ 为常数. a 表示 $G(z)$ 在单位圆上的极点, r 表示 $G(z)$ 在单位圆外的极点. 则闭环系统稳定当且仅当 $z = e^{j\omega}$, ω 从 0 到 2π 变化且跳过所有在单位圆上的极点时, $G(z)$ 逆时针围绕 $(-1, j0)$ 的角度为 $(a/2 + r) \times 2\pi$.

证明. 根据文献 [15] 易证得. □

定理 1. 当 $\omega \in (0, 2\pi)$ 时, 对所有 λ_i , 如果 $(pe^{j\omega} + q)/(2e^{jd\omega}(e^{j\omega} - 1)^2)$ 与实轴交点均在点 $(-1, j0)$ 的右侧, 则多机器人协同控制系统 (6) 渐近稳定. 其中, $p = T^2(k_h + \lambda_i d_h) + 2T(k_v + \lambda_i d_v)$, $q = T^2(k_h + \lambda_i d_h) - 2T(k_v + \lambda_i d_v)$.

证明. 将状态方程 (7) 写成传递函数的形式

$$\mathbf{x}_i(s) = H(s)\mathbf{u}_i(s)$$

其中, $H(s) = [I_2/s^2 \ I_2/s]^T$.

$H(s)$ 零阶保持器后的等价离散传递函数为

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\}$$

其中, Z 表示 z 变换.

于是式 (7) 和式 (8) 构成的系统的闭环传递函

数为

$$G_i(z) = \left(I_4 + z^{-d} H(z) [(k_h + \lambda_i d_h) I_2 (k_v + \lambda_i d_v) I_2] \right)^{-1} H(z) \quad (9)$$

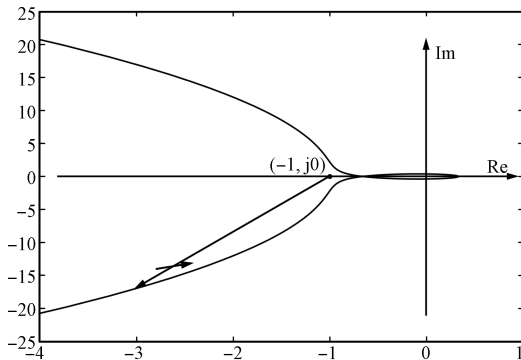
显然, 若 h_i 稳定, 则有 \hat{h}_i 稳定. 因此, 只需考虑 h_i 的稳定性. 由式 (9) 可得

$$\frac{h_i(z)}{u_i(z)} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} \times I_2 \quad (10)$$

其中, $g_i(z) = (pz + q)/(2z^d(z - 1)^2)$ 表示开环传递函数.

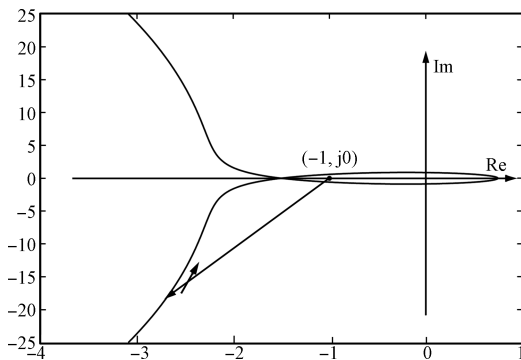
根据引理 1 可知, $a = 2, r = 0, (a/2 + r) \times 2\pi = 2\pi$. 所以, 当 $z = e^{j\omega}$, ω 从 0 到 2π 变化且跳过所有在单位圆上的极点时, 若 $g_i(z)$ 逆时针围绕 $(-1, j0)$ 的角度为 2π , 则闭环传递系统 (9) 稳定.

观察 $g_i(z)$ 的极坐标图 1 可知, 当 $g_i(z)$ 与实轴交点都在 $(-1, j0)$ 右侧 (如图 1(a)) 时, $g_i(z)$ 逆时针围绕 $(-1, j0)$ 的角度为 2π ; 当 $g_i(z)$ 与实轴有交点在 $(-1, j0)$ 左侧 (如图 1(b)) 时, $g_i(z)$ 逆时针围绕 $(-1, j0)$ 的角度不等于 2π .



(a) 交点均在 $(-1, j0)$ 右侧

(a) All the intersection points are on the right side of $(-1, j0)$



(b) 交点不全在 $(-1, j0)$ 右侧

(b) Not all the intersection points are on the right side of $(-1, j0)$

图 1 $g_i(z)$ 的极坐标图

Fig. 1 Polar plots of $g_i(z)$

所以, 当 $\omega \in (0, 2\pi)$ 时, 对所有 λ_i , 如果 $(pe^{j\omega} + q)/[2e^{jd\omega}(e^{j\omega} - 1)^2]$ 与实轴交点均在点 $(-1, j0)$ 的右侧, 则多机器人协同控制系统 (6) 稳定.

当 h_i 稳定, 则有 $\hat{h}_i \rightarrow 0$, 从而 $u_i \rightarrow 0$. 由式 (5) 可知, 此时 $h_i \rightarrow 0$. 因此, 多机器人系统 (6) 渐近稳定. \square

2.2 系统稳定域

若时延 $\tau = T$, 则 $g_i(z)$ 可表示为

$$g_i(z) = \frac{p \cos \omega + q \cos 2\omega - j(p \sin \omega + q \sin 2\omega)}{4(\cos \omega - 1)}$$

从而, 当 $\omega \in (0, 2\pi)$ 时, $g_i(z)$ 与实轴的交点为 $((p - q)/8, 0)$ 和 $(q^2/(2p + 4q), 0)$. 根据定理 1, 对所有 λ_i , 当 $(p - q)/8 > -1$ 且 $q^2/(2p + 4q) > -1$ 时, 多机器人系统渐近稳定. 画出其稳定域, 如图 2 中阴影部分所示.

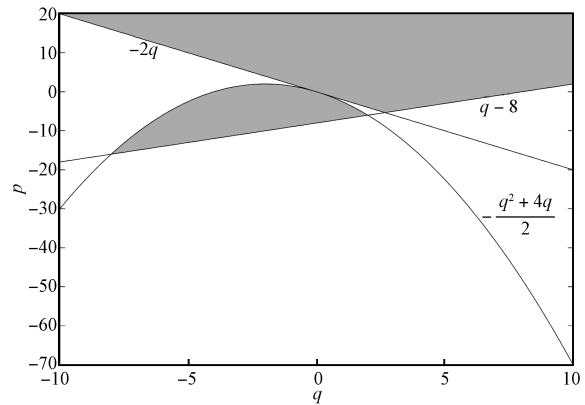


图 2 时延为 T 时, (q, p) 的稳定域

Fig. 2 Stability region of (q, p) when $\tau = T$

3 系统仿真

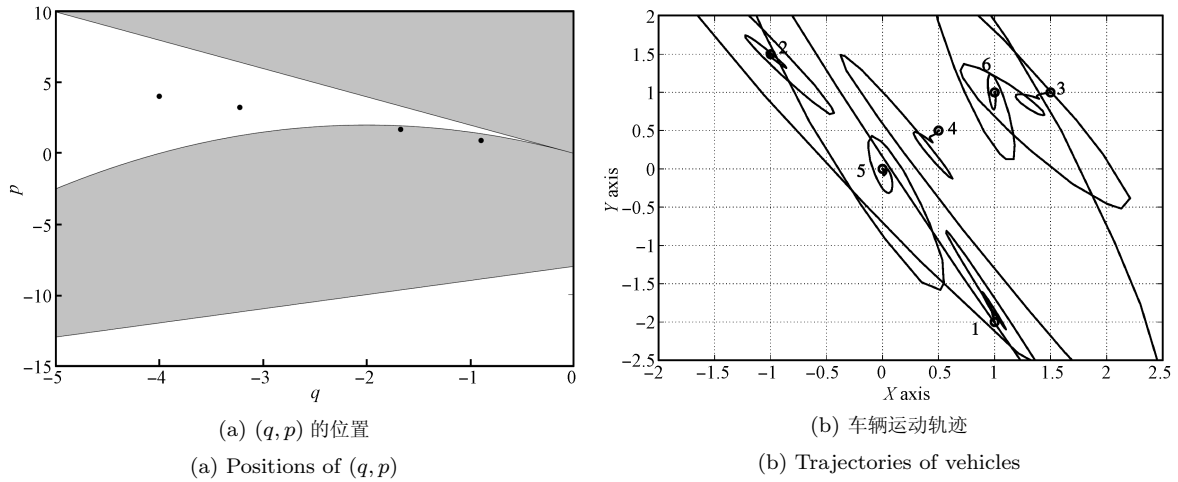
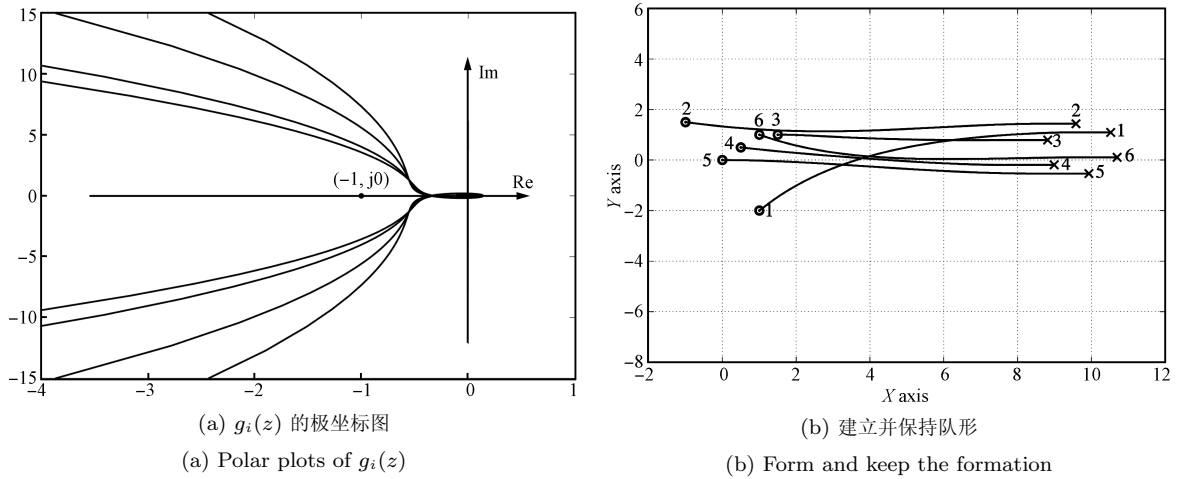
本文考虑 6 辆车编队机动的例子. 其目标是构成并保持一个正六边形的队形. 文献 [8-9, 16] 均有相似的例子. 这是一个典型的多机器人协同一致性问题.

设车辆的状态方程为式 (1), 控制律为式 (5), 其中 $m_i = 10.1 \text{ kg}$, $J_i = 0.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $l = 0.12 \text{ m}$. Laplacian 矩阵是一个循环矩阵, 定义为

$$L = \text{circ}(1, -0.5, 0, 0, 0, -0.5)$$

设 $T = 0.01 \text{ s}$, 进行两组仿真, 第一组仿真中 $\tau = T$, $k_h = 60$, $k_v = 45$, $d_h = 50$, $d_v = 78$; 第二组仿真中 $\tau = 2T$, $k_h = 4.01$, $k_v = 22.078$, $d_h = 5.403$, $d_v = -1.177$.

车辆编队系统的开环极坐标图及运动轨迹如图 3 和图 4 所示. 车辆的初始位置标记为 “o”, 终点位置标记为 “x”.

图 3 仿真 1 中 (q, p) 的位置和运动轨迹Fig. 3 Positions of (q, p) and trajectories of vehicles in Simulation 1图 4 仿真 2 中 $g_i(z)$ 的极坐标图和运动轨迹Fig. 4 Polar plots of $g_i(z)$ and trajectories of vehicles in Simulation 2

从图 3(a) 中可以看出, (q, p) 不全在稳定域内, 因此系统是不稳定的. 图 3(b) 的运动轨迹也表明了车辆不能形成期望队形. 图 4(a) 显示, $g_i(z)$ 与实轴的交点均在点 $(-1, j0)$ 的右侧, 根据定理 1, 编队控制系统渐近稳定. 运动轨迹显示车辆能建立并保持正六边形的队形.

4 结论

本文分析了多机器人协同控制系统的稳定性, 以实现在通信约束下多机器人系统的一致性收敛. 根据离散系统的 Nyquist 稳定性判据, 提出了一种图形化方法来检验系统的稳定性. 当时延为一个采样周期时, 得出系统的稳定域, 以便于分析系统稳定性和设计控制律参数. Matlab 仿真结果也证明了所提出方法的可行性.

References

- Murray R M. Recent research in cooperative control of multi-vehicle systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2007, **129**(5): 571–583
- Dong W J, Farrell J A. Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic dynamic systems with uncertainty. *Automatica*, 2009, **45**(3): 706–710
- Wolfe J D, Chichka D F, Speyer J L. Decentralized controllers for unmanned aerial vehicle formation flight. In: *Proceedings of the AIAA Conference on Guidance, Navigation, and Control*. San Diego, USA: AIAA, 1996. AIAA 96-3833
- Smith T R, Hansmann H, Leonard N E. Orientation control of multiple underwater vehicles. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, USA: IEEE, 2001. 4598–4603
- Sabol C, Burn R, McLaughlin C A. Satellite formation flying design and evolution. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001, **38**(2): 270–278

- 6 Ota J, Miyata N, Arai T, Yoshida E, Kurabatashi D, Sasaki J. Transferring and regrasping a large object by cooperation of multiple mobile robots. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Pittsburgh, USA: IEEE, 1995. 543–548
- 7 Qu Z H, Wang J, Hull R A, Martin J. Cooperative control design and stability analysis for multi-agent systems with communication delays. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Orlando, USA: IEEE, 2006. 970–975
- 8 Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, **17**(10–11): 1002–1033
- 9 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1465–1476
- 10 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- 11 Kim T H, Hara S. Cyclic pursuit strategy for multi-agent dynamical systems with sampled communication. In: Proceedings of the SICE Annual Conference. Tokyo, Japan: IEEE, 2008. 2436–2441
- 12 Massioni P, Verhaegen M. Distributed control for identical dynamically coupled systems: a decomposition approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(1): 124–135
- 13 Munz U, Papachristodoulou A, Allgower F. Delay-dependent rendezvous and flocking of large scale multi-agent systems with communication delays. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico: IEEE, 2008. 2038–2043
- 14 Lawton J R T, Beard R W, Young B J. A decentralized approach to formation maneuvers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2003, **19**(6): 933–941
- 15 Yeung K S, Lai H M. A reformulation of the Nyquist criterion for discrete systems. *IEEE Transactions on Education*, 1988, **31**(1): 32–34
- 16 Fax J A. Optimal and Cooperative Control of Vehicle Formations [Ph.D. dissertation], California Institute Technology, USA, 2002



吴俊 南京航空航天大学自动化学院博士研究生。2005 年获得南京航空航天大学自动化学院学士学位。主要研究方向为协同控制技术。本文通信作者。

E-mail: wj_nuaa@163.com

(**WU Jun** Ph.D. candidate at the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and

Astronautics. He received his bachelor degree from the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 2005. His main research interest is cooperative control. Corresponding author of this paper.)



陆宇平 南京航空航天大学自动化学院教授。1985 年获得南京航空航天大学自动控制专业硕士学位。主要研究方向为网络化控制系统理论与应用。

E-mail: yplac@nuaa.edu.cn

(**LU Yu-Ping** Professor at the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and As-

tronautics. He received his master degree in automatic control from Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 1985. His research interest covers theory and application of networked control systems.)