

## 带丢包一致性滤波算法研究

王帅<sup>1</sup> 杨文<sup>1</sup> 侍洪波<sup>1</sup>

**摘要** 提出了一种基于一致性的分布式滤波算法, 针对实际应用中存在的网络丢包问题, 重点研究了有丢包时的分布式滤波算法, 通过理论分析给出了估计误差系统收敛的充分条件. 应用数值仿真将本文提出的算法与已有的经典滤波算法分别在理想状况与有丢包状况时进行比较, 研究表明本算法在丢包时具有较优的滤波效果. 并进一步研究了一致性步长对估计误差协方差的影响, 发现存在估计误差达到最小值的最优步长. 最后, 研究了丢包率对算法的影响, 发现起“领导”作用的传感器在滤波时发挥重要作用, 可通过控制这些传感器的丢包率来减小丢包对整个网络系统的影响.

**关键词** 分布式滤波, 一致性算法, 卡尔曼滤波, 传感器网络, 多智能体系统

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.01689

### Consensus-based Filtering Algorithm with Packet-dropping

WANG Shuai<sup>1</sup> YANG Wen<sup>1</sup> SHI Hong-Bo<sup>1</sup>

**Abstract** This paper introduces a consensus-based distributed filtering algorithm. Aiming at the problem of network packet-dropping in practical applications, we focus on the distributed filtering algorithm with packet-dropping. By theoretical analysis, we give a sufficient condition for the convergence of the estimation error system. We compare our algorithm with a classical filtering one by some simulations in ideal and packet-dropping cases, respectively. The results show that our algorithm does better filtering in the packet-dropping case. Furthermore, we study the influence of the consensus step-size on the estimation error covariance, and find out that an optimal step-size may lead to the minimum of estimation error covariance. Finally, we study the influence of the packet-dropping rate on our algorithm, and find that the leaders of the sensors play an important role in the filtering. We can decrease the influence of the packet-dropping on the whole network system by controlling the packet-dropping rate of the leaders.

**Key words** Distributed filtering, consensus algorithm, Kalman filtering, sensor network, multi-agent system

近年来, 分布式估计与跟踪问题受到越来越多研究者的关注<sup>[1-4]</sup>, 作为无线传感器网络中协作式信息处理问题的基础, 分布式估计被广泛应用于环境监测、危险区域搜救等领域, 比如, 在灾区、沙漠和深海等无人深入地区进行搜救工作, 可以向该地区撒入大量微型传感器, 传感器之间通过互相通讯形成自组织网络对目标环境进行全方位的监测并进行目标搜救. 传感器网络的分布式问题研究在信号处理、控制理论以及计算机技术领域已经有很长的历史<sup>[5-6]</sup>. 在分布式估计机制中, 每个传感器只与周围可通讯范围内的传感器进行信息传递, 这样大大减少了传感器的通讯能量损耗. 传感器节点可以根据自身的位置和能量情况自组网络, 网络拓扑结构可以随着传感器节点数量、位置以及外界环境的变化动态调整, 从而达到既节能又容错的效果, 也大大减少了计算量.

如何设计有效的分布式滤波算法, 利用传感器采集到的信息精确地对目标状态进行估计是一个重要而又困难的问题, 其关键在于寻找一种收敛速度快、融合精度高的网络级分布式算法对传感器之间的共享信息进行处理. 一致性算法<sup>[7]</sup>正是满足这些要求的行之有效的网络级分布式算法. Spanos 等最早研究了一致性算法在传感器网络中的应用<sup>[8-9]</sup>, 文中应用加权平均一致性算法设计了分布式最小二乘估计机制. 之后, Olfati-Saber 在文献 [10] 所提算法的基础上提出了三种将卡尔曼滤波器与一致性算法相结合的分布式算法<sup>[11]</sup>, 可应用于具有不同观测矩阵的传感器网络, 经数值仿真表明算法具有较高的状态估计精度. 最近, Stanković 等研究了网络拓扑切换时的分布式估计问题<sup>[12]</sup>, 通过对局部卡尔曼滤波器的预测状态值进行一致化处理提出了一种分布式估计算法, 并对算法进行了收敛分析.

在实际传感器网络应用中, 网络丢包不可避免. 然而, 综观上述研究工作, 均建立在网络无丢包的理想情况上. 关于网络丢包问题目前已有大量的研究成果, Sinopoli 等研究了带丢包的离散滤波器, 给出了丢包率的上界值<sup>[13]</sup>, 在此基础上, Epstein 等研究了带丢包最优滤波估计误差协方差有界的概率问题<sup>[14]</sup>. 张冬梅等针对一类网络控制系统, 采用

收稿日期 2010-04-26 录用日期 2010-07-01  
Manuscript received April 26, 2010; accepted July 1, 2010  
上海市重点学科建设项目 (B504), 华东理工大学优秀青年教师科研基金 (YH0157130) 资助  
Supported by Shanghai Leading Academic Discipline Project (B504) and Young Scholars Research Foundation of East China University of Science and Technology (YH0157130)  
1. 华东理工大学信息科学与工程学院自动化系 上海 200237  
1. School of Information Science and Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237

Lyapunov-Krasovskii 方法分析了变时延和数据丢包对闭环系统稳定性的影响<sup>[15]</sup>. Sun 等研究了基于多丢包的线性离散随机系统的最优无偏滤波器、最优线性估计器、最优全阶及最优降阶估计器<sup>[16-18]</sup>. 郭戈等针对多丢包情况下的离散时变系统的鲁棒滤波问题, 设计了相应的鲁棒滤波器策略<sup>[19]</sup>. 本文研究了一种带丢包的基于一致性的分布式滤波算法, 通过应用图论、矩阵论与线性系统理论对算法进行收敛分析, 找出网络拓扑结构、算法参数、丢包概率与网络估计误差协方差之间的关系. 并在此基础上, 研究丢包率对网络估计系统的影响, 提出改善丢包问题的可行性方案. 最后, 应用数值仿真对算法进行验证, 并与已有典型的基于一致性的分布式滤波算法在理想状况及有丢包状况时分别进行对比.

## 1 问题描述

本节首先应用图论对传感器网络拓扑结构进行建模. 定义  $G = (V, E, A)$  为传感器网络的拓扑结构图, 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为网络中节点集合,  $v_i$  表示第  $i$  个传感器;  $E = \{e_{ij}\}$  为边集合,  $e_{ij}$  表示第  $i$  个传感器能接收第  $j$  个传感器的信息. 在无向图中, 传感器节点之间的边没有方向. 定义邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$  表示任意两个传感器之间联系的紧密程度. 若第  $i$  个传感器能接收第  $j$  个传感器的信息, 即  $(v_i, v_j) \in E$ , 则  $a_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ ), 否则  $a_{ij} = 0$ . 邻接矩阵所有对角元素  $a_{ii} = 0, \forall i$ . 在每一时刻, 每个传感器能与其邻居传感器进行通讯. 定义  $N_i$  表示第  $i$  个传感器的邻居集, 即  $N_i = \{v_j \in V : (v_i, v_j) \in E\}$ . 拉普拉斯矩阵  $L$  是另一种描述网络拓扑结构的矩阵, 它的取值如下:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_j a_{ij}, & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

在无向图中  $a_{ij} = a_{ji}$ , 因此无向图的拉普拉斯矩阵  $L$  为一对称矩阵, 如果网络连通, 则  $L$  有且仅有一个零特征值, 其余特征值均大于零<sup>[1]</sup>. 在本文中, 我们重点研究具有无向网络拓扑结构的分布式估计问题.

假设一个传感器网络包含  $n$  个传感器, 我们应用该网络对一被高斯噪声干扰的目标系统状态进行估计. 目标系统的运动状态模型和传感器的观测模型如下:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k^i = H^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{v}_k^i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  和  $\mathbf{z}_k^i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  为目标的状态向量和观测向量,  $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$  为系统矩阵,  $H^i \in \mathbf{R}^{m \times m}$

为测量矩阵且假定可逆,  $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  为过程噪声且  $\mathbf{w}_k \sim N(0, Q)$ ,  $\mathbf{v}_k^i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  为观测噪声且  $\mathbf{v}_k^i \sim N(0, R^i)$ . 假设过程噪声和观测噪声是相互独立的零均值高斯白噪声序列, 其方差为

$$\text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l) = Q\delta(k-l) \quad (3)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{v}_k^i, \mathbf{v}_l^j) = R^i\delta(i-j)\delta(k-l) \quad (4)$$

其中,

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

在第 2 节中, 将重点介绍基于一致性的分布式滤波算法.

## 2 基于一致性的分布式滤波算法

### 2.1 算法描述

在文献 [11] 中, Olfati-Saber 提出了一种新颖的估计算法. 该算法引入一致性滤波器对传感器测量值以及协方差值进行融合. 每个传感器可从邻居处接收的信息包括传感器测量值、协方差值的融合值以及状态估计值, 从而使每个传感器对状态的估计值都将趋于一致. 然而在实际应用中, 由于网络通讯带宽有限, 或网络丢包、延时等干扰影响, 传感器之间传递的信息量过多反而使得算法的抗干扰能力弱、鲁棒性差. 而且随着网络规模的增加, Olfati 算法的复杂性增加, 算法的收敛速度也会减慢. 本文将提出一种简单的基于一致性的分布式滤波算法, 该算法仅需要传感器之间交换对目标的估计值.

定义  $\hat{\mathbf{x}}_k^i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  为时刻  $k$  传感器  $i$  对目标的状态估计值. 在包含  $n$  个传感器的网络中, 假设在第  $k$  时刻, 第  $i$  个传感器从它的邻居处可接收对目标的估计值, 并应用一致性协议处理为  $\sum_{j \in N_i} (\hat{\mathbf{x}}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k^j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 定义  $P_k$  为第  $k$  步的增益矩阵, 并假定  $(A, H^i)$  可观,  $(A, Q^{\frac{1}{2}})$  可控. 每个传感器的具体算法如下:

**步骤 1.** 初始化.

即对初始先验估计状态量和增益矩阵给定初值, 表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_0^i = \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

$$P_0^i = P_0 \quad (6)$$

**步骤 2.** 在时刻  $k$  检测到新的测量值  $\mathbf{z}_k^i$ .

**步骤 3.** 更新滤波增益  $K_k^i$ :

$$K_k^i = AP_k^i H^{iT} (H^i P_k^i H^{iT} + R^i)^{-1} \quad (7)$$

更新估计增益矩阵  $P_k^i$ :

$$P_{k+1}^i = AP_k^i A^T - AP_k^i H^{iT} (H^i P_k^i H^{iT} + R^i)^{-1} H^i P_k^i A^T + Q \quad (8)$$

步骤 4. 融合状态估值.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i = A\hat{\mathbf{x}}_k^i + K_k^i (\mathbf{z}_k^i - H^i \hat{\mathbf{x}}_k^i) - \epsilon \sum_{j \in N_i} (A\hat{\mathbf{x}}_k^i - A\hat{\mathbf{x}}_k^j) \quad (9)$$

其中,  $\epsilon \in (0, 1/\Delta)$  为步长,  $\Delta = \max_i (\sum_{i \neq j} a_{ij})$ . 根据 Riccati 方程的收敛条件, 式 (8) 将最终收敛于  $P^i \succeq 0$ . 在后面的分析中, 我们假设  $P^i \succ 0$ , 所需的条件可参考文献 [20].

## 2.2 丢包情况下的算法收敛分析

在实际的网络数据传输过程中, 由于网络延时、网络阻塞、传感器故障等, 经常出现丢包现象. 丢包问题会降低估计精度甚至导致估计值发散, 所以近年来成为传感器网络研究的一个热点. 丢包主要分为两种: 1) 网络内部节点间通讯值的丢包, 即网络中的节点向邻近节点发送的数据包丢失; 2) 网络中各节点检测数据的丢包. 本文将重点研究第 2 种情况. 丢包率是指检测中发生丢包情况的概率, 它是衡量一个网络的通信好坏的重要指标. 为了使算法 (9) 更具实用性, 本文将重点研究带丢包的基于一致性的分布式滤波算法.

下面我们给出带丢包的基于一致性的分布式滤波算法:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i = A\hat{\mathbf{x}}_k^i + \gamma_k^i K_k^i (\mathbf{z}_k^i - H^i \hat{\mathbf{x}}_k^i) - \epsilon \sum_{j \in N_i} (A\hat{\mathbf{x}}_k^i - A\hat{\mathbf{x}}_k^j) \quad (10)$$

式中,  $\gamma_k^i$  是一个二进制的随机变量, 正常情况下取 1, 丢包情况下取 0, 并设  $\lambda^i = p\{\gamma_k^i = 1\}$ ,  $\lambda^i \in [0, 1]$ ,  $1 - \lambda^i$  表示丢包率.

当有网络丢包时, 滤波算法 (10) 在丢包率过大时无法收敛. 为了分析网络估计误差协方差的收敛性, 找出丢包率、算法参数及网络拓扑结构对收敛性的影响, 我们进一步做以下工作.

定义网络中传感器  $i$  的估计误差为  $\mathbf{e}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_k^i - \mathbf{x}_k$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 结合式 (10) 可得

$$\mathbf{e}_{k+1}^i = A\mathbf{e}_k^i - \gamma_k^i K_k^i H^i \mathbf{e}_k^i + \gamma_k^i K_k^i \mathbf{v}_k^i - \epsilon A \sum_{j \in N_i} (\mathbf{e}_k^i - \mathbf{e}_k^j) - \mathbf{w}_k \quad (11)$$

令网络中所有传感器的估计误差为向量  $\mathbf{e}_k = [\mathbf{e}_k^1, \mathbf{e}_k^2, \dots, \mathbf{e}_k^n]^T$ , 观测噪声向量为  $\mathbf{v}_k = [\mathbf{v}_k^1, \mathbf{v}_k^2, \dots,$

$\mathbf{v}_k^n]^T$ . 根据式 (11) 可得

$$\mathbf{e}_{k+1} = (I_n \otimes A) \cdot \mathbf{e}_k - \epsilon \cdot (L \otimes A) \cdot \mathbf{e}_k - \text{diag}\{\gamma_k^i K_k^i H^i\} \cdot \mathbf{e}_k + \text{diag}\{\gamma_k^i K_k^i\} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{w}_k = \tilde{\Gamma}_k \cdot \mathbf{e}_k + \tilde{W}_k \quad (12)$$

式中

$$\tilde{\Gamma}_k = (I_n \otimes A) \cdot (I_n \otimes I_m - \epsilon \cdot L \otimes I_m - \text{diag}\{\gamma_k^i \tilde{K}_k^i H^i\}), \quad A\tilde{K}_k^i = K_k^i \quad (13)$$

$$\tilde{W}_k = \text{diag}\{\gamma_k^i K_k^i\} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{w}_k \quad (14)$$

故可推出

$$E(\mathbf{e}_{k+1}) = E(\tilde{\Gamma}_k) \cdot E(\mathbf{e}_k) \quad (15)$$

$$E(\mathbf{e}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^T) = E(\tilde{\Gamma}_k) \cdot E(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T) \cdot E(\tilde{\Gamma}_k)^T + E(\tilde{W}_k \cdot \tilde{W}_k^T) \quad (16)$$

令  $D_k^i = \gamma_k^i \tilde{K}_k^i H^i$ ,  $D_k = \text{diag}\{D_k^1, D_k^2, \dots, D_k^n\}$ , 定义实对称矩阵  $\tilde{D}_k = \frac{1}{2}(D_k + D_k^T)$ .

在给出我们的主要结论前, 先给出以下 4 条引理<sup>[21]</sup>.

**引理 1.**  $A \succ 0$  且  $C$  为可逆矩阵, 则  $C^T A C \succ 0$ .

**引理 2.**  $A \succ 0$  且  $B$  是 Hermitian 矩阵, 则  $AB$  可对角化且特征值是实数, 并且  $AB$  与  $B$  的正负特征值数目相等.

**引理 3.** 若  $A, B \in M_n$  是 Hermitian 矩阵, 并假定  $A \succ 0, B \succeq 0$ , 那么当且仅当  $\rho(BA^{-1}) \leq 1$  时,  $A \succeq B$ ; 当且仅当  $\rho(BA^{-1}) < 1$  时,  $A \succ B$ .

**引理 4.** 对于  $A \in M_n$  且任意给定的  $\Theta > 0$ , 存在  $\tau$  使得  $\rho(A) \leq \|A\|_\tau \leq \rho(A) + \Theta$ .

下面给出本文的主要结论.

**定理 1.** 考虑一个由  $n$  个传感器构成的无向连通网络, 其中每个传感器根据算法 (10) 对被噪声干扰系统 (1) 的状态进行估计, 令系统矩阵  $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$  的谱半径  $\rho(A) = \alpha$ , 如果

$$\left| 1 - \lambda_{\min}(E(\tilde{D}_k)) \right| < \frac{1}{\alpha} \quad (17)$$

$$\left| 1 - \epsilon \lambda_n(L) - \lambda_{\max}(E(\tilde{D}_k)) \right| < \frac{1}{\alpha} \quad (18)$$

成立且网络连通, 则网络估计误差协方差  $E(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T)$  收敛,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T) \rightarrow \bar{e} > 0$$

$$\tilde{Q} = E(\text{diag}\{\gamma_k^i K_k^i\}) \times \begin{bmatrix} R^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R^n \end{bmatrix} \times E(\text{diag}\{\gamma_k^i K_k^{iT}\}) + \begin{bmatrix} Q & \dots & Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q & \dots & Q \end{bmatrix}$$

且  $\bar{e}$  满足

$$E(\tilde{\Gamma}_k) \times \bar{e} \times E(\tilde{\Gamma}_k)^T - \bar{e} + \tilde{Q} = 0 \tag{19}$$

**证明.** 根据引理 1,  $H^{iT}(H^{iT}P_k^i H^i + R_k^i)^{-1}H^i \succ 0$ . 因为增益矩阵最终收敛于  $P^i \succ 0$ , 根据引理 2,  $E(P^i \cdot H^{iT}(H^{iT}P^i H^i + R_k^i)^{-1}H^i)$  可对角化. 因为  $\lambda^i \in [0, 1]$ , 故  $E(D_k^i)$  也可对角化且特征值均为正实数. 易得

$$0 \prec E(H^{iT}(H^{iT}P^i H^i + R_k^i)^{-1}H^i) \prec E(H^{iT}(H^{iT}P^i H^i)^{-1}H^i) = (P^i)^{-1} \tag{20}$$

设  $\hat{D}_k^i = \tilde{K}_k^i H^i$ , 则  $\hat{D}_k = \text{diag}\{\hat{D}_k^1, \hat{D}_k^2, \dots, \hat{D}_k^n\}$ . 根据引理 3, 得

$$\rho(E(\hat{D}_k^i)) = \rho(E(P^i H^{iT}(H^{iT}P^i H^i + R_k^i)^{-1}H^i)) < 1 \tag{21}$$

因此,  $0 < \lambda_q(E(\hat{D}_k)) < 1, \forall q \in (1, 2, \dots, nm)$ . 故  $\lambda_q(E(D_k)) \leq \lambda_q(\hat{D}_k) < 1$ . 根据 Gerschgorin 定理,  $0 < \lambda_p(L) < n, p \in (1, 2, \dots, nm)$ , 而  $\epsilon \in (0, 1/\Delta)$ , 易推出  $0 < 1 - \epsilon\lambda_p(L) \leq 1$ . 因为网络连通, 设  $L$  的特征值为  $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) < \dots < \lambda_n(L)$ , 则对于非零向量  $\mathbf{y} \in C^{mn}$ , 有

$$1 - \epsilon\lambda_n(L) \leq \frac{\mathbf{y}^*(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m)\mathbf{y}}{\mathbf{y}^*\mathbf{y}} \leq 1 \tag{22}$$

又因为对于任意矩阵  $M \in \mathbf{R}^{n \times n}, \frac{\mathbf{x}^* M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^*(M+M^T)\mathbf{x}}{2\mathbf{x}^* \mathbf{x}}$  对于任意非零向量  $\mathbf{x}$  成立, 则有

$$\min(\lambda(E(\tilde{D}_k))) \leq \frac{\mathbf{x}^* E(D_k) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^* E(\tilde{D}_k) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \leq \max(\lambda(E(\tilde{D}_k))) \tag{23}$$

因此

$$\max_{\mathbf{y} \neq 0} \left| \frac{\mathbf{y}^*(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k))\mathbf{y}}{\mathbf{y}^*\mathbf{y}} \right| \leq \max_{p,q} \left| 1 - \epsilon\lambda_p(L) - \lambda_q(E(\tilde{D}_k)) \right| \tag{24}$$

因为对于任意矩阵  $M \in M_n$ , 有

$$\min_{\mathbf{x} \neq 0} \left| \frac{\mathbf{x}^* M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \right| \leq |\lambda_i| \leq \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left| \frac{\mathbf{x}^* M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \right| \tag{25}$$

其中,  $\lambda_i$  是  $M$  的特征值,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 因此, 对于  $j \in (1, 2, \dots, nm)$ , 有

$$\lambda_j(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k)) \leq \max_{\mathbf{y} \neq 0} \left| \frac{\mathbf{y}^*(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k))\mathbf{y}}{\mathbf{y}^*\mathbf{y}} \right| \tag{26}$$

根据以上分析, 若条件 (17) 和 (18) 成立, 则可得  $\rho(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k)) < 1/\alpha$ . 根据引理 4, 对于给定足够小的  $\Theta_1, \Theta_2$ , 一定存在  $\tau$ , 使得

$$\|A\|_\tau \leq \rho(A) + \Theta_1$$

$$\|E(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k))\| < \rho(E(I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k))) + \Theta_2$$

因此,  $\rho(E(\tilde{\Gamma}_k)) < \|E(\tilde{\Gamma}_k)\| \leq (\alpha + \Theta_1)(1/\alpha + \Theta_2)$  且因为  $I_n \otimes I_m - \epsilon L \otimes I_m - E(\tilde{D}_k)$  总是可以找到满足条件 (17) 和 (18) 的  $\epsilon$  使得  $\rho(E(\tilde{\Gamma}_k)) < 1$ . 从而式 (16) 为一收敛迭代过程, 误差协方差收敛至一有界值. 进一步, 我们给出该值.

注意到  $E(\tilde{\Gamma}_k)$  与时间不相关, 因此  $E(\tilde{\Gamma}_m \dots \tilde{\Gamma}_1) = [E(\tilde{\Gamma}_k)]^m, k \in [1, m]$ , 结合式 (15), 可得

$$E(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T) = E\left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Gamma}_{k-1}^i \cdot \tilde{W}_{k-1-i} \times \tilde{W}_{k-1-j}^T \cdot \tilde{\Gamma}_{k-1}^j\right) = \sum_{i=0}^{k-1} E(\tilde{\Gamma}_{k-1}^i) \cdot \tilde{Q} \cdot E(\tilde{\Gamma}_{k-1}^{iT}) \tag{27}$$

已证明  $\rho(E(\tilde{\Gamma}_k)) < 1$ , 则  $\|E(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T)\| < \infty$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T) \rightarrow \bar{e} > 0$$

且

$$E(\tilde{\Gamma}_k) \cdot \bar{e} \cdot E(\tilde{\Gamma}_k)^T - \bar{e} + \tilde{Q} = 0 \tag{28}$$

□

**评论 1.** 定理 1 给出了  $\rho(E(\tilde{\Gamma}_k)) < 1$  成立的充分条件, 根据式 (15) 可知  $E(\mathbf{e}_k)$  将最终收敛至 0. 由  $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ , 可知  $k \rightarrow \infty$  时,  $E(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k) = 0$ , 即  $E(\hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{x}_k$ , 所以本文中的估计量  $\hat{\mathbf{x}}_k$  是渐近无偏的. 另外, 若  $\gamma_k^i = 0$  对任意  $i$ , 则算法 (11) 退化为一般化的带噪声一致性算法. 当系统矩阵  $A$  不稳定时, 则算法无法收敛.

**评论 2.** 在实际应用中, 初始化算法阶段, 可根据系统矩阵和传感器测量矩阵给出稳态增益矩阵, 控制一定的网络丢包率, 判断式 (17) 是否满足条件. 若满足, 则根据给定的网络拓扑结构, 根据式 (18) 选取  $\epsilon$  值, 即,  $\frac{1-1/\alpha-\lambda_{\max}(E(\tilde{D}_k))}{\lambda_n(L)} < \epsilon < \frac{1+1/\alpha-\lambda_{\max}(E(\tilde{D}_k))}{\lambda_n(L)}$ . 整个算法在执行过程中是分布式的, 无需依赖某一中心传感器进行信息传播. 若网络拓扑结构未知, 随机播撒传感器, 可根据网络密度大致估算拉普拉斯矩阵的特征根来选择  $\epsilon$ . 注意到, 当丢包率过大而导致式 (17) 无法满足时, 估计误差将会发散; 若估算的  $\epsilon$  值不满足式 (18) 而导致估计误差发散时, 传感器可减小  $\epsilon$  的值来保证算法的收敛, 当  $\epsilon = 0$  时, 算法退化为离散卡尔曼滤波器. 关于如何自适应调整  $\epsilon$  值的问题也是我们正在研究的问题.

以上我们已经证明了当系统满足一定条件时, 网络估计误差协方差能够收敛至一有界值. 根据式 (13) 和 (19) 我们易发现, 当保持系统其他参数不变而减小  $\lambda^i$  时,  $\bar{e}$  有增大的趋势. 当  $\lambda^i$  减小到一定值时, 条件 (17) 和 (18) 便无法成立, 则状态估计误差无法收敛. 另外, 从估计误差收敛条件易发现, 网络拓扑结构可以帮助弥补一定丢包带来的影响.

在传感器网络中, 有部分传感器的邻居节点较多, 在无向网络中意味着, 它们发送出去的信息较多, 因而它们的估计值对最终估计误差的影响较大. 这种现象在复杂网络理论中已有较多研究, 表明度大的节点对网络的很多性能起着至关重要的作用. 对于这些在网络中起“领导”作用的节点, 如果它们发生丢包的概率较大, 直观上可通过减少它们的邻居数来减小它们对最终估计值的影响. 在接下的仿真研究中, 我们试图从改变网络拓扑结构的角度对算法进行改善, 以减小因为网络中部分传感器丢包给最终估计值带来的影响.

### 3 仿真结果与分析

在本节中, 将应用 Matlab 进行数值仿真验证本文提出的算法的有效性, 并与文献 [11] 中 Olfati-Saber 提出的第三种算法 (该算法在文献 [11] 中已被验证具有最优的滤波性能) 在理想情况及有丢包发生时的性能进行比较. 通过分析丢包对算法带来的影响, 提出对算法进行改善的措施.

考虑把 50 个传感器播撒在面积为  $5 \times 5$  的区域里, 以每个传感器节点为圆心, 半径为 3 画圆范围内的其他节点为邻居, 构造传感器网络拓扑结构. 其对应的拉普拉斯矩阵  $L$ , 其第二小特征值  $\lambda_2(L) = 12.5$  (网络连通). 应用传感器网络对系统 (1) 进行状态估计, 传感器量测方程如式 (2). 为了让问题更有意义, 我们考虑系统 (1) 不稳定. 系统矩阵及其他参数选

取如下:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.0015 \\ 0.003 & 1 \end{bmatrix}$ , 系统过程噪声协方差取为  $Q = I_2$ , 初始条件  $\mathbf{x}_0 = [15, -10]^T$ ,  $P_0^i = I_2$ . 网络中传感器的量测矩阵  $H^i = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}$ , 其中  $h_1 \in [0.6, 0.8]$ ,  $h_2 \in [0.6, 0.8]$ . 每个传感器的观测噪声协方差矩阵设为  $R^i = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$ , 其中  $r_1 \in [0.8, 1.3]$ ,  $r_2 \in [0.8, 1.3]$ . 如无特殊介绍, 以下仿真均应用以上系统参数.

#### 3.1 两种算法的仿真对比

首先定义系统估计误差为  $\|\mathbf{e}_k\| = (\sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_k^{iT} \cdot \mathbf{e}_k^i))^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $\mathbf{e}_k^i = 1/n \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_k^i - \mathbf{x}_k$ ; 系统非一致估计值为  $\|\delta_k\| = (\sum_{i=1}^n (\delta_k^{iT} \cdot \delta_k^i))^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $\delta_k^i = (1/n \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_k^i) - \hat{\mathbf{x}}_k^i$ , 其表征了每时刻传感器估计值之间的偏差程度. 如果  $\|\delta_k\|$  越大, 则传感器之间估计值偏差越大. 考虑由 50 个传感器组成的网络, 取步长  $\epsilon = 0.004$ , 丢包率  $1 - \lambda^i = 0$ , 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

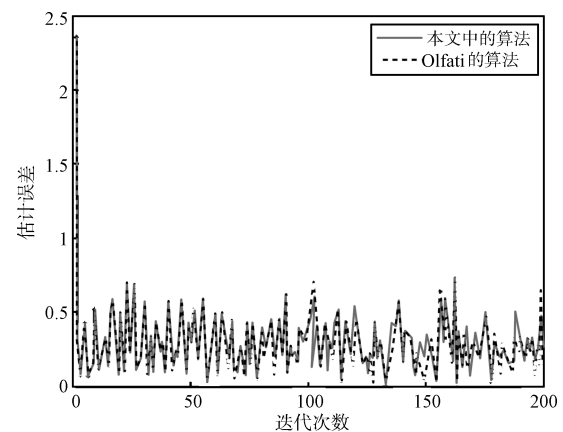


图 1 估计误差比较

Fig. 1 Comparison of estimation errors

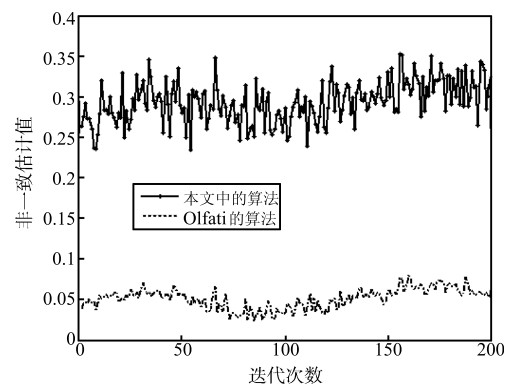


图 2 非一致估计值比较

Fig. 2 Comparison of disagreement of estimates

从图 1 和图 2 易看出, 对系统 (1) 状态进行估计, 本文给出的算法最终的估计误差接近于 Olfati 的算法, 但非一致估计值相差较大. 其原因是 Olfati 算法较本文给出的算法需要的信息量多, 其每时刻需要传送  $m^2 + 3m$  位数据给每位邻居, 包括系统的测量矩阵与测量值进行一致化处理, 而本文算法只需要传送  $m$  位数据给每位邻居. 另外, 经计算, 本算法时间复杂度为  $O(n^3)$ , 空间复杂度为  $O(n^2)$ . 当网络规模较大时, Olfati 算法所需的运算时间较长. 且在实际应用中, 网络传输带宽有限且容易发生时延等, 一旦传感器出现故障或发生丢包等情况, Olfati 算法受这些干扰的影响更大, 从而使得传感器网络在估计过程中的鲁棒性变差. 下面进一步给出有丢包情况时的性能比较图, 如图 3 所示.

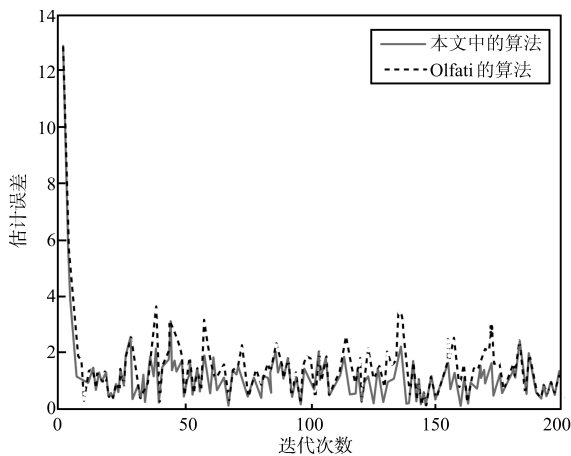


图 3 丢包情况的估计误差比较

Fig. 3 Comparison of estimation errors with packet-dropping

从图 3 可看出, 本文提出的算法在有丢包情况时的状态估计误差比 Olfati 算法的估计误差小, 这与图 1 中理想情况下的比较结果正好相反. 这表明本文提出的算法对抵抗网络丢包等故障具有更好的鲁棒性.

### 3.2 步长对估计精度影响的仿真分析

根据条件 (17) 和 (18), 发现在本算法中, 步长的取值会影响算法的估计误差精度及算法收敛速度, 是一个十分重要的参数. 当步长超过一定值时, 估计误差将发散. 下面将通过仿真来进行验证.

依旧考虑由 50 个传感器组成的网络, 对目标执行 200 步跟踪, 步长与估计误差的关系如图 4 所示. 由图 4 可明显看出, 当  $\epsilon$  取在 0.0048 左右时估计误差达到最小, 当  $\epsilon$  接近 0.025 时, 算法无法收敛, 估计误差趋于无穷. 这表明对于任意一组给定的系统参数, 当步长取到最优时, 网络估计误差达到最小

值, 而当步长超过某一临界值时, 算法将发散.

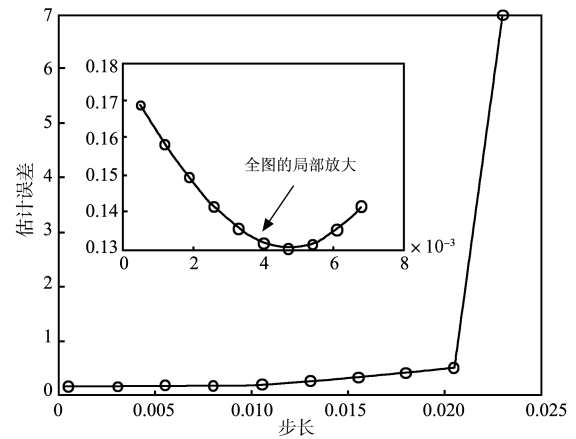


图 4 步长与估计误差的关系

Fig. 4 Comparing step-sizes with estimation errors

在实际应用中, 当出现选取步长过大导致误差发散时, 可通过减小  $\epsilon$  的值来保证算法收敛. 然而, 基于对一致性问题研究, 可知第二大特征根  $1 - \epsilon \cdot \lambda_2(L)$  表征了算法的收敛速度, 特征根越小算法收敛越快, 这意味着减小  $\epsilon$  会导致算法收敛速度变慢. 要既保证算法收敛的同时也保证算法收敛速度, 可仅仅通过减少网络中少量影响力大的节点的  $\epsilon$ , 而保持剩余节点的  $\epsilon$  不变来实现.

针对图 4 中步长过大会使算法发散的情况, 在改进前令所有节点步长  $\epsilon = 0.025$ , 网络中节点邻居数最大值为 45. 改进后邻居数大于 25 的节点的  $\epsilon$  减小到 0.005, 其他不变. 仿真结果如图 5 所示.

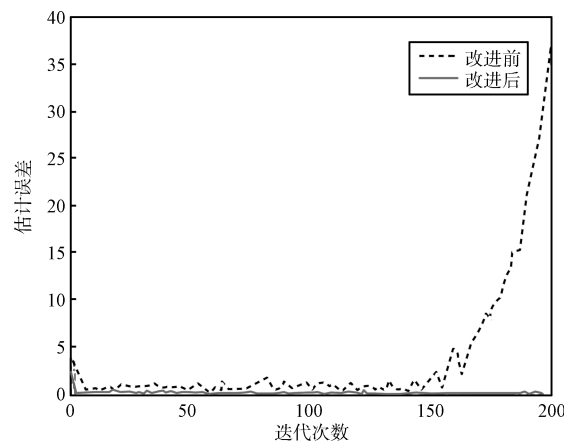


图 5 步长改进前后估计误差对比

Fig. 5 Comparison of estimation errors with previous step-size and improved

由图 5 可知, 当出现步长取的过大而使估计误差发散时, 不一定要减小全部节点的步长来改善精度, 而只需适当减小在全局中起“领导”作用的节点

步长, 便可保证一定的估计精度, 这也再次说明步长的选取对算法估计精度有着十分重要的作用.

### 3.3 丢包问题及改善方案仿真

在实际应用中, 丢包概率  $1 - \lambda^i$  对估计值影响很大, 丢包情况越严重, 则估计值误差越大. 在以下仿真中, 取所有传感器的丢包概率相同, 以到达率  $\lambda^i$  为横坐标反应丢包对估计误差的影响. 由图 6 所示, 随到达率的增加, 估计误差递减.

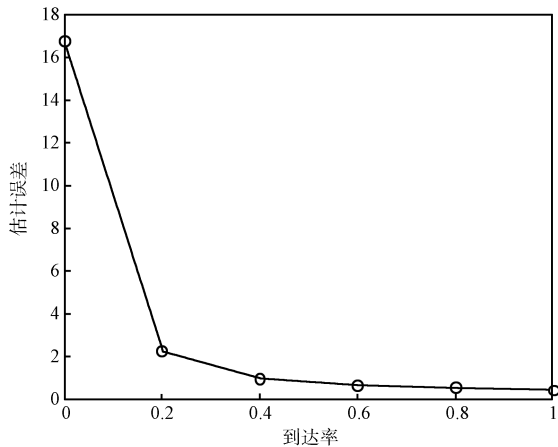


图 6 到达率与估计误差的关系

Fig. 6 Comparing receiving rates with estimation errors

在传感器网络中, 有部分传感器的邻居节点较多, 在无向网络中意味着, 它们发送出去的信息较多, 因而它们的估计值对最终估计误差的影响较大. 这种现象在复杂网络理论中已有较多研究, 表明度大的节点对网络的很多性能起着至关重要的作用. 对于这些在网络中起“领导”作用的节点, 如果它们发生丢包的概率较大, 直观上可通过减少它们的邻居数来减小它们对最终估计值的影响. 在第 3.2 节中, 仿真发现网络中具有“领导”作用的节点在估计中起着较重要的作用. 为了进一步验证这些节点在有丢包情况下相较于其他节点给估计值带来的影响, 我们对以下两种典型情况进行比较. 系统参数及网络拓扑参照第 3.1 节, 步长取  $\epsilon = 0.005$ .

**情况 1.** 网络中邻居数大于 25 的传感器节点丢包率为 0.7, 余下的丢包率为 0.

**情况 2.** 网络中邻居数大于 25 的传感器节点丢包率为 0, 余下的丢包率为 0.7.

由图 7 可以看出所示, 情况 2 的状态估计误差较情况 1 小. 这说明: 在网络有丢包情况下, 若传感器丢包率相同, 可通过减小网络中起“领导作用”的传感器节点的邻居数, 或者控制其丢包的概率在某一范围来提高全局的估计精度.

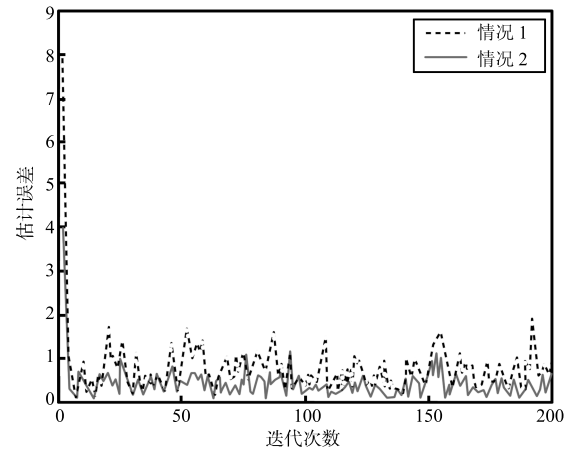


图 7 两种情况估计误差对比

Fig. 7 Comparison of estimation error of two cases

## 4 结论

本文提出了一种基于一致性的卡尔曼滤波算法对目标系统进行状态估计. 结合矩阵论、线性系统理论、图论对带丢包的基于一致性分布式滤波算法的收敛性进行分析, 给出了系统估计误差收敛的充分条件. 通过与已有经典的算法进行比较, 本文提出的算法具有状态估计精度高、需要信息量小等特点, 且在网络有丢包时具有较好的鲁棒性. 仿真研究表明, 本文提出的滤波算法取最优步长时, 网络估计误差可达到最小值, 当步长超过某一临界值时, 网络估计误差发散. 仿真研究进一步表明, 网络中起“领导者”作用的传感器的估计值对整个系统的估计误差影响较大. 当取过大步长导致估计算法发散时, 为保证算法的收敛速度, 可通过减小部分领导者的步长来确保算法的收敛. 类似的研究表明, 当网络存在丢包时, 可通过削弱起领导者作用的传感器的影响力来减小丢包对整个网络系统状态估计精度的影响.

## References

- 1 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661
- 2 Olfati-Saber R, Murray R W. Consensus problems in networks of agent with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- 3 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1465–1476
- 4 Rao B S, Durrant-Whyte H F. Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 1991, **138**(5): 413–420
- 5 Reid D B. An algorithm for tracking multiple targets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(6): 843–854

- 6 Fox V, Hightower J, Liao L, Schulz D, Borriello G. Bayesian filtering for location estimation. *IEEE Pervasive Computing*, 2003, **2**(3): 24–33
- 7 Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215–233
- 8 Spanos D P, Olfati-Saber R, Murray R M. Dynamic consensus for mobile networks. In: Proceedings of the 16th IFAC World Congress. Prague, Czech: IFAC, 2005. 1–6
- 9 Spanos D P, Olfati-Saber R, Murray R M. Approximate distributed Kalman filtering in sensor networks with quantifiable performance. In: Proceedings of the 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks. Los Angeles, USA: IEEE, 2005. 133–139
- 10 Olfati-Saber R. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Seville, Spain: IEEE, 2005. 8179–8184
- 11 Olfati-Saber R. Distributed Kalman filtering for sensor networks. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 5492–5498
- 12 Stanković S S, Stankovic M S, Stipanovic D M. Consensus based overlapping decentralized estimation with missing observations and communications faults. *Automatica*, 2009, **45**(6): 1397–1406
- 13 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Jordan M I, Sastry S S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1453–1464
- 14 Epstein M, Shi L, Tiwari A, Murray R M. Probabilistic performance of state estimation across a lossy network. *Automatica*, 2008, **44**(12): 3046–3053
- 15 Zhang Dong-Mei, Yu Li, Zhou Ming-Hua. Stabilization of networked control systems with fast-varying delay and packet-dropout. *Control Theory and Applications*, 2008, **25**(3): 480–484  
(张冬梅, 俞立, 周明华. 具有快变时延和丢包的网路控制系统镇定. *控制理论与应用*, 2008, **25**(3): 480–484)
- 16 Sun S L, Xie L H, Xiao W D, Xiao N. Optimal filtering for systems with multiple packet dropouts. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2008, **55**(7): 695–699
- 17 Sun S L, Xie L H, Xiao W D, Soh Y C. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1333–1342
- 18 Sun S L, Xie L H, Xiao W D. Optimal full-order and reduced-order estimators for discrete-time systems with multiple packet dropouts. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(8): 4031–4038
- 19 Guo Ge, Wang Bao-Feng. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems with multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 767–772  
(郭戈, 王宝凤. 多丢包不确定离散系统的鲁棒 Kalman 滤波. *自动化学报*, 2010, **36**(5): 767–772)
- 20 Richardson T J, Kwong R H. On positive definite solutions to the algebraic Riccati equation. *Systems and Control Letters*, 1986, **7**(2): 99–104
- 21 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. UK: Cambridge University Press, 1985

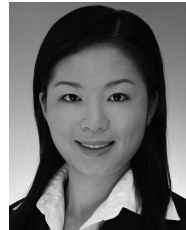


王 帅 华东理工大学自动化系硕士研究生. 主要研究方向为网络丢包问题和分布式控制.

E-mail: smartwang1020@163.com

(WANG Shuai Master student at East China University of Science and Technology (ECUST). His research interest covers packet-dropping in sensor

network, and distributed control.)



杨 文 华东理工大学自动化系讲师. 2009 年于上海交通大学获博士学位. 主要研究方向为多智能体系统、合作/协调控制和复杂动态网络控制. 本文通信作者. E-mail: weny@ecust.edu.cn

(YANG Wen Lecturer at ECUST. She received her Ph.D. degree from Shanghai Jiao Tong University in 2009.

Her research interest covers multi-agent system, cooperative and coordinated control, and complex networks. Corresponding author of this paper.)



侍洪波 华东理工大学自动化系教授. 主要研究方向为流程工业过程模型化与先进控制技术, 综合自动化系统的理论和方法, 工业过程工况监控与故障诊断.

E-mail: hbshi@ecust.edu.cn

(SHI Hong-Bo Professor at ECUST. His research interest covers modeling of industrial process and

advanced control technology, theory and methods of integrated automation systems, and condition monitoring and fault diagnosis of industrial process.)