

Acrobot 动态伺服控制及其对称虚约束方法研究

程红太¹ 赵旖旎¹ 张晓华¹

摘要 研究了 Acrobot 这一垂直平面欠驱动机械臂的动态伺服控制问题. 该问题期望驱动 Acrobot 到达构形空间中任意目标位置. 由于 Acrobot 不能稳定在除平衡点外的位置, 因此考虑将系统镇定到经过目标点的周期轨道上. 利用虚约束来描述这样的轨道, 进而给出了在所选虚约束作用下系统的零动态和积分曲线. 接着设计了级联形式的控制器, 内环控制器基于改进的反馈线性化方法, 引入了一个使内环呈现二阶系统特性的虚拟输入, 在该虚拟输入的基础上, 设计了基于 Lyapunov 稳定性理论的外环控制器. 最后通过数字仿真证明所提出的方法合理有效, 并且获得比基于能量的动态伺服方法更优的结果.

关键词 Acrobot, 欠驱动, 动态伺服控制, 虚约束, Lyapunov 稳定性理论

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.01594

Dynamical Servo Control and Symmetrical Virtual Constraints Method for the Acrobot

CHENG Hong-Tai¹ ZHAO Yi-Ni¹ ZHANG Xiao-Hua¹

Abstract The dynamical servo control problem of a vertical planar underactuated manipulator acrobot is studied in this paper. This problem aims to drive acrobot to any position in the construction space. Since the acrobot cannot be stabilized at any position except the equilibrium points, we consider to stabilize the system to a periodic orbit which passes through the target position. The virtual constraint is used to describe these periodic orbits, and then the zero dynamics and the relative integral curve under the selected virtual constraint are given. A cascade form controller is designed. The inner loop controller is based on the improved feedback linearization method and a virtual input which makes the inner loop like a second-order system is introduced. With this virtual input, an outer loop controller is designed based on Lyapunov stabilizing theory. The simulation results show the effectiveness of the designed control law, and that this method is better than the energy based method.

Key words Acrobot, underactuated, dynamical servo control, virtual constraint, Lyapunov stability theory

欠驱动系统是指拥有比其自身自由度少的驱动的系统. 它代表了一大类实际系统, 比如太空飞行器、移动机器人和柔性机器人. 这些系统与全驱动系统相比更加难于控制, 是控制研究中的一个热点. 图 1 中所示的 Acrobot 系统是一个典型的结构相对简单的欠驱动机械系统^[1-3], 它由一根连杆和一根摆杆组成, 摆杆连接有一驱动输入, 连杆绕肩部自由转动. 它具有两个自由度却只有一个控制输入.

Acrobot 有 4 个开环平衡点, 其中比较典型的是垂直向下和垂直向上两个, 前者是稳定的而后者是不稳定的. 以 Acrobot 为对象, 人们展开了一系列研究工作. 最早研究的是不稳定平衡点的镇定问题^[1-2], 然后 Spong 将上摆与平衡控制一起研究^[2]; Xin 等提出了一种基于能量的上摆控制策略, 他们利用系统机械能、摆杆摆角和角速度构造了一个

Lyapunov 函数, 并通过对该函数的控制实现三个变量的整体镇定, 所提出的控制策略可以将 Acrobot 镇定到一个经过最高点的轨道上, 进而可以很容易实现起摆及平衡的切换^[3].

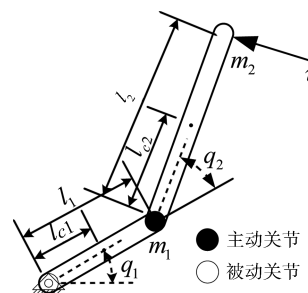


图 1 Acrobot 示意图
Fig. 1 Structure of the Acrobot

除平衡控制之外, Berkemeier 等^[4] 研究了倒立轨迹跟踪问题. 他们选择了一个将 Acrobot 约束到一个特殊流形的输出函数, 从而生成了一簇周期轨道. Shiriaev 等^[5-6] 研究了欠驱动机械系统附加虚约束后的特性, 给出了闭环系统积分曲线方程的显式解, 设计了基于 LQR 的轨道镇定控制器, 并将其应用于多种系统中^[7-10].

收稿日期 2009-09-10 录用日期 2010-08-13
Manuscript received September 10, 2009; accepted August 13, 2010

国家自然科学基金 (60875066) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60875066)

1. 哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院 哈尔滨 150001
1. Department of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

针对欠驱动系统的特点, 本文研究一种新的运动控制问题—动态伺服控制问题, 它所针对的不是特定点的镇定或者特定轨迹的跟踪, 而是任意状态的瞬时可达, 进而实现任意轨迹的动态跟踪; 不仅适用于 Acrobot 对象, 类似的问题也存在于球棒系统、直线倒立摆等系统中. 动态伺服控制可以应用于一些简单的任务, 比如机械臂从一个点到另一个点的搬运工作, 也可以为其他任务提供协助, 比如为平衡控制提供合适的末端姿态或为灵长类仿生机器人飞跃控制提供足够的起飞能量.

对欠驱动机械系统来说, 构形空间任意点的镇定是不可能的, 然而一种可能的方式是将其镇定到通过给定点的周期轨道上. 虚约束将原始系统限制到一个子流形, 因而可以用来描述状态空间中的周期轨道. 它并不存在于实际系统, 而是由控制输入引入的. Shiriaev 等给出了一般积分曲线的表达式, 但并未给出通过某一点的周期轨道的设计方法.

文献 [11] 采用了基于能量的方法实现了动态伺服的控制, 其中存在着摆动姿态不优美, 所需驱动输入大等问题, 本文针对这些问题, 结合虚约束方法对问题重新分析, 并采用改进的反馈线性化方法实现动态伺服控制.

1 Acrobot 动力学模型

根据图 1 给出的结构以及给出的物理量定义, 建立系统动力学模型.

物理参数定义如下:

m_1, m_2 : 两杆质量

l_1, l_2 : 两杆长度

l_{c1}, l_{c2} : 两杆铰链至质心距

I_1, I_2 : 两杆绕质心转动惯量

g : 重力加速度

τ : 输入力矩

利用 Lagrange 方程建立系统动力学模型.

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

$$d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + \varphi_2 = \tau \quad (2)$$

其中

$$d_{11} = \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2$$

$$d_{12} = d_{21} = \theta_2 + \theta_3 \cos q_2$$

$$d_{22} = \theta_2$$

$$h_1 = -\theta_3 \dot{q}_2 \sin q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$h_2 = \theta_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2$$

$$\varphi_2 = \theta_5 g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\varphi_1 = \theta_4 g \cos q_1 + \varphi_2$$

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1$$

$$\theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$\theta_3 = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$\theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1$$

$$\theta_5 = m_2 l_{c2}$$

其中, d_{11}, d_{22} 为自耦惯量加速度项, d_{12}, d_{21} 为互耦惯量加速度项, h_1, h_2 为柯氏力项, φ_1, φ_2 为重力矩项.

2 动态伺服定义及虚约束方程设计

下面给出动态伺服问题的相关定义^[6]:

定义 1 (动态伺服控制). 对于系统: $\dot{x} = f(x, u)$, $x(t_0) = x_0$, 在控制作用下, 对于任意给定轨迹 $\gamma(t)$ 及允许误差 δ :

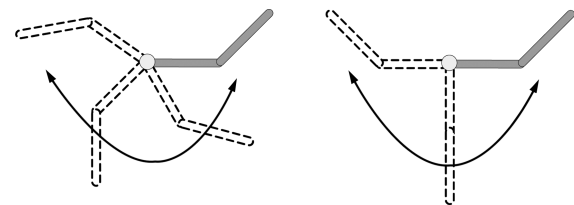
若 $\exists T_0$ 使得, $t > T_0$ 时, 有 $|x(t) - \gamma(t)| < \delta$ 成立, 则称其为伺服轨迹跟踪;

若 $\exists T_0$ 及 $t_i > T_0$, $i = 1, 2, 3$, 使得 $|x(t_i) - \gamma(t_i)| < \delta$, 则称其为动态伺服轨迹跟踪.

两者之间的区别是前者使得系统状态连续地收敛到目标轨迹上; 而后者只要求它可以重复地到达轨迹上的点. 这种弱化的控制目标使得它对欠驱动系统是可以实现的.

对于 Acrobot 系统, 动态伺服实现的一个基本要求是其可以重复到达任一状态点, 本文只讨论形如 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [q_{1d}, q_{2d}, 0, 0]$ 这样的目标点. 实际上, 基于能量的动态伺服控制中采用的虚约束为 $q_2 = q_{2d}$, 这样的虚约束作用下系统能量守恒, 分析与控制比较方便, 但姿态呆板, 不符合仿生学原理 (如图 2 (a) 所示).

Acrobot 亦称体操机器人, 从体操运动员的实际运动中可以看出, 当运动员在摆动过程中, 特别是当身体摆动至垂直向下位置时, 其身体是伸展开的. 由于不需要维持固定的角度, 身体随着惯性自由摆动, 比较节省力气 (如图 2 (b)).



(a) 基于能量的方法摆动过程姿态

(b) 体操运动员摆动过程姿态

(a) The swing gesture of the energy based method

(b) The swing gesture of the gymnast

图 2 基于能量的方法与体操运动员摆动过程姿态对比
Fig. 2 Comparison of the swing gesture of energy based method and the gymnast

运动员摆动过程中上下躯体夹角是变化的, 到达垂直位置时伸直, 即其经过点 $[-\pi/2, 0, \dot{q}_1, \dot{q}_2]$. 为了保证目标位置 $[q_{1d}, q_{2d}, 0, 0]$ 可达, 需要寻找使得这两点同时成立的虚约束, 容易看出最简单的是由两点确定的线性虚约束, 可以表示为

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 = 0 \quad (3)$$

若 $a_1 \neq 0$, 上式可以转化为

$$q_1 = a q_2 + b \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} = a \cdot 0 + b \\ q_{1d} = a \cdot q_{2d} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{q_{1d} + \frac{\pi}{2}}{q_{2d}} \\ b = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

若 $a_2 \neq 0$, 上式可以转化为

$$q_2 = c q_1 + d \quad (5)$$

一般情况下, 两种约束所得到的结果是一致的, 统一起见, 文中采用第一种形式.

3 虚约束作用下系统零动态分析

3.1 虚约束作用下系统零动态方程

定理 1 (动态伺服控制). 对于 Acrobot 系统, 在完整虚约束 $p = \phi(q)$ 作用下 (p, q 分别表示 q_1 或 q_2), 无论虚约束形式如何, 系统零动态方程均可以写为如下形式:

$$\alpha(q)\ddot{q} + \beta(q, \dot{q})\dot{q}^2 + \gamma(q) = 0 \quad (6)$$

证明. 假设 $p = q_1, q = q_2$, 则有 $q_1 = \phi(q_2)$, 两边对时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_2^2} (\dot{q}_2)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \ddot{q}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

将其代入模型中式 (1) 有

$$d_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial q_2^2} (\dot{q}_2)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \ddot{q}_2 \right) + d_{12} \ddot{q}_2 + h_1 + \varphi_1 = 0 \quad (8)$$

整理有

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_2} d_{11} + d_{12} \right) \ddot{q}_2 + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial q_2^2} d_{11} - \theta_3 \sin q_2 \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial q_2} + 1 \right) \right) \dot{q}_2^2 + \\ &\quad (\theta_4 g \cos(\phi(q_2)) + \theta_5 g \cos(\phi(q_2) + q_2)) \end{aligned}$$

将各项系数定义为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial \phi}{\partial q_2} d_{11} + d_{12} \\ \beta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_2^2} d_{11} - \theta_3 \sin q_2 \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial q_2} + 1 \right) \\ \gamma &= \theta_4 g \cos(\phi(q_2)) + \theta_5 g \cos(\phi(q_2) + q_2) \end{aligned}$$

于是有

$$\alpha(q)\ddot{q} + \beta(q, \dot{q})\dot{q}^2 + \gamma(q) = 0 \quad (9)$$

同理可证, 当 $p = q_1, q = q_2$ 时结论也成立. \square

3.2 零动态方程的一次积分

式 (9) 是虚约束作用下系统的零动态微分方程, 对应于不同的初值, 该微分方程将对应不同的积分曲线, 而对于所研究的问题, 它的期望轨道是惟一的, 因此需要获得描述该曲线的参数.

定理 2. 零动态微分方程 (9) 是可积的, 记:

$$\begin{aligned} \beta_0(q) &= 2 \frac{\beta(q)}{\alpha(q)} \\ \gamma_0(q) &= -2 \frac{\gamma(q)}{\alpha(q)} \end{aligned} \quad (10)$$

并且令积分因子:

$$I = e^{\int_{q_0}^q \beta_0(x) dx} \quad (11)$$

则其从 $[q_0, \dot{q}_0]$ 起始的一次积分的解的表示为

$$\dot{q}^2 = I^{-1} \int_{q_0}^q I \gamma_0(x) dx + Y_0 I^{-1} \quad (12)$$

其中 $Y_0 = \dot{q}_0^2$.

证明. 令 $Y = \dot{q}^2$, 则有

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \dot{q} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{q}^2}{dq} = \frac{1}{2} \frac{dY}{dq} \quad (13)$$

因此式 (9) 可写为

$$\frac{1}{2} \alpha(q) \frac{dY}{dq} + \beta(q) Y + \gamma(q) = 0 \quad (14)$$

于是有

$$\frac{dY}{dq} + \beta_0(q) Y - \gamma_0(q) = 0 \quad (15)$$

两侧同乘积分因子 I 有

$$\frac{d(IY)}{dq} = I \gamma_0(q) \quad (16)$$

对其进行积分有

$$IY = \int_{q_0}^q I\gamma_0(x)dx + Y_0 \quad (17)$$

由于 $I > 0$, 因此有

$$Y = Y(q) = I^{-1} \int_{q_0}^q I\gamma_0(x)dx + Y_0 I^{-1} \quad (18)$$

3.3 对称虚约束的积分表达式

将虚约束 (4) 两边对时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= a\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 &= a\ddot{q}_2 \end{aligned} \quad (19)$$

进一步代入式 (8), 并记:

$$\begin{aligned} A &= \theta_2 + a\theta_1 + a\theta_2 \\ B &= (1 + 2a)\theta_3 \end{aligned} \quad (20)$$

于是有

$$\begin{aligned} \alpha &= A + B \cos q_2 \\ \beta &= -B \sin q_2 \\ \gamma &= \theta_4 g \cos(aq_2 + b) + \theta_5 g \cos[(1 + a)q_2 + b] \end{aligned}$$

根据前面的推导过程有

$$I = e^{\int_{q_{20}}^{q_2} \beta_0(x)dx} = \left(\frac{A + B \cos q_2}{A + B \cos q_{20}} \right)^2 \quad (21)$$

于是可得:

$$\begin{aligned} Y(q) &= -\frac{2g(F(q_2) - F(q_{20}))}{(A + B \cos q_2)^2} + \\ &Y_0 \left(\frac{A + B \cos q_{20}}{A + B \cos q_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{A\theta_4 + 0.5B\theta_5}{a} \sin(ax + b) + \\ &\frac{A\theta_5 + 0.5B\theta_4}{a + 1} \sin[(a + 1)x + b] + \\ &\frac{0.5B\theta_4}{a - 1} \sin[(a - 1)x + b] + \\ &\frac{0.5B\theta_5}{a + 2} \sin[(a + 2)x + b] \end{aligned}$$

4 周期轨道控制器设计

为了保证系统准确收敛到目标轨道上, 除对虚约束函数进行控制外, 还需对轨道参数方程进行控制. 总的来说, 需要对以下两个输出函数进行镇定.

$$\begin{cases} h = \phi(q) - p \\ U = \dot{q}^2 - Y(q) \end{cases} \quad (23)$$

在文献 [5] 中, 作者采用了基于线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 的方法设计控制器, 获得了非线性反馈系数的表达式, 这种方法计算起来比较繁琐, 需要求解一系列非线性方程, 下面采用级联形式的控制方法, 将虚约束作为内环, 轨道参数作为外环实现系统由外自内逐级镇定.

4.1 虚约束镇定控制器设计

针对虚约束:

$$q_1 = aq_2 + b \quad (24)$$

对虚约束输出函数及其二次时间求导有

$$\begin{aligned} h &= aq_2 + b - q_1 \\ \dot{h} &= a\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \ddot{h} &= a\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 \end{aligned} \quad (25)$$

从 Acrobot 系统动力学模型中可以反解出:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{-d_{12}\tau - d_{22}(h_1 + \varphi_1) + d_{12}(h_2 + \varphi_2)}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} = \\ &f_1 + g_1\tau \\ \ddot{q}_2 &= \frac{d_{11}\tau + d_{21}(h_1 + \varphi_1) - d_{11}(h_2 + \varphi_2)}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} = \\ &f_2 + g_2\tau \end{aligned}$$

将其代入式 (25), 与反馈线性化方法不同, 这里引入虚拟输入变量 v 使得:

$$\ddot{h} + K_1\dot{h} + K_2h = v \quad (26)$$

其中

$$v = af_2 + ag_2\tau - f_1 - g_1\tau + K_1\dot{h} + K_2h \quad (27)$$

该子系统具有如下形式的传递函数:

$$G(s) = \frac{H(s)}{\nu(s)} = \frac{1}{s^2 + K_1s + K_2} \quad (28)$$

因此只需选择合适的参数, 即可实现子系统输入输出稳定. 上述设计过程可以看作是反馈线性化设计与状态反馈方法^[12]的结合, 虚拟输入变量实际上是闭环子系统的给定, 当该变量为 0 时, 系统输出收敛至 0. 同时, 该虚拟输入可以作为外环的控制变量, 以达到镇定外环的目的. 下面来设计这样的周期轨道镇定控制器.

4.2 周期轨道镇定控制器设计

对虚约束 (24), 假设目标状态速度为 0, 即 $Y_0 = 0$, 则其轨道方程为

$$U = \dot{q}_2^2 - I^{-1} \int I\gamma_0 dx \quad (29)$$

构造控制 Lyapunov 函数 (Control Lyapunov function, CLF) 如下:

$$V = \frac{1}{2}U^2 \quad (30)$$

上式两边对时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{U} &= 2\dot{q}_2\ddot{q}_2 + I^{-1}\beta_0\dot{q}_2 \int I\gamma_0 dx - \gamma_0\dot{q}_2 = \\ &\dot{q}_2 \left(2\ddot{q}_2 + I^{-1}\beta_0 \int I\gamma_0 dx - \gamma_0 \right) \end{aligned} \quad (31)$$

于是有

$$\dot{V} = U\dot{q}_2 \left(2\ddot{q}_2 + I^{-1}\beta_0 \int I\gamma_0 dx - \gamma_0 \right) \quad (32)$$

由式 (25)、式 (26) 及系统模型 (1) 可知:

$$d_{11}(a\ddot{q}_2 + K_1\dot{h} + K_2h - \nu) + d_{12}\ddot{q}_2 + h_1 + \varphi_1 = 0 \quad (33)$$

于是可得:

$$\ddot{q}_2 = \frac{d_{11}\nu - d_{11}(K_1\dot{h} + K_2h) - h_1 - \varphi_1}{ad_{11} + d_{12}} \quad (34)$$

代入式 (32):

$$\dot{V} = U\dot{q}_2 (g(\cdot)\nu + f(\cdot)) \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} f(\cdot) &= -2 \frac{d_{11}(K_1\dot{h} + K_2h) + h_1 + \varphi_1}{ad_{11} + d_{12}} + \\ &I^{-1}\beta_0 \int I\gamma_0 dx - \gamma_0 \\ g(\cdot) &= 2 \frac{d_{11}}{ad_{11} + d_{12}} \end{aligned}$$

因此只需:

$$\nu = - \frac{K_3|U| \operatorname{sign}(U\dot{q}_2) + f(\cdot)}{g(\cdot)} \quad (36)$$

即可实现外环镇定. 综上所述, 总的控制律为

$$\tau = \frac{- \frac{K_3|U| \operatorname{sgn}(U\dot{q}_2) + f(\cdot)}{g(\cdot)}}{\frac{ag_2 - g_1}{K_1\dot{h} + K_2h + af_2 - f_1} - \frac{ag_2 - g_1}{ag_2 - g_1}} \quad (37)$$

在上述控制律的作用下, 首先外环 Lyapunov 函数 $V \rightarrow 0$, 因此内环虚拟输入 $v \rightarrow 0$, 最终实现内外环的共同收敛.

4.3 与基于能量的方法的比较

两者在运动形式上的区别是明显的, 下面来分析它们之间在所需控制输入之间的差异.

对于基于能量的动态伺服控制算法, 稳态时它的控制输入具有这样的形式:

$$\tau = \frac{d_{11}(h_2 + \varphi_2) - d_{21}(h_1 + \varphi_1)}{d_{11}} \quad (38)$$

展开有

$$\tau = \theta_3\dot{q}_1^2 \sin q_{2d} + \theta_5g \cos(q_1 + q_{2d}) - \frac{d_{12}}{d_{11}}(\theta_4g \cos q_1 + \theta_5g \cos(q_1 + q_{2d})) \quad (39)$$

稳态时, 杆 1 摆动速度与角度有对应关系, 可以利用机械能守恒来得到它们之间的关系, 由于

$$\begin{aligned} E &= 0.5d_{11}\dot{q}_1^2 + \theta_4g \sin q_1 + \theta_5g \sin(q_1 + q_{2d}) = \\ &\theta_4g \sin q_{1d} + \theta_5g \sin(q_{1d} + q_{2d}) \end{aligned} \quad (40)$$

因此有:

$$\dot{q}_1^2 = 2g \frac{\theta_4 \sin q_{1d} + \theta_5 \sin(q_{1d} + q_{2d})}{d_{11}} - \frac{\theta_4 \sin q_1 + \theta_5 \sin(q_1 + q_{2d})}{d_{11}} \quad (41)$$

由式 (39) 和式 (41) 确定了 τ 与 q_1 之间的函数关系, 由此可以计算出给定为 $[q_{1d}, q_{2d}]$ 时所需的最大力矩, 图 3(a) 给出了 $q_{1d} \in [-1, 1], q_{2d} \in [0.1, 1]$ 时的最大力矩曲面.

对于前述基于虚约束的动态伺服控制方法: 其控制输入式 (37), 当稳态时有 $v = 0$, 因此有

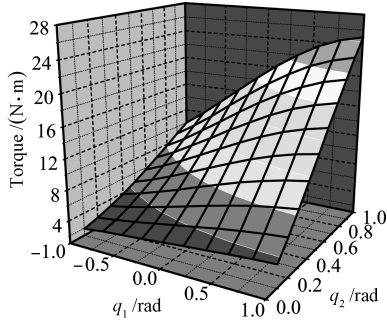
$$\tau = h_2 + \varphi_2 - \frac{d_{22} + ad_{21}}{ad_{11} + d_{12}}(h_1 + \varphi_1) \quad (42)$$

展开有

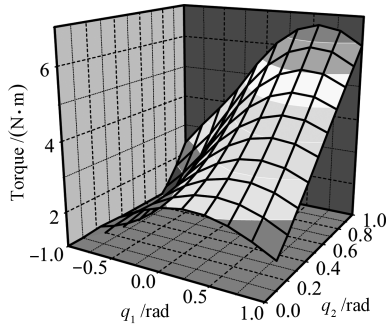
$$\begin{aligned} \tau &= (a^2 - 2a - 1)\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2^2 + \\ &\theta_5g \cos(aq_2 + b + q_2) - \\ &\frac{\theta_2 + a(\theta_2 + \theta_3 \cos q_2)}{a(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2) + \theta_2 + \theta_3 \cos q_2} - \\ &\frac{\theta_4g \cos(aq_2 + b) + \theta_5g \cos(aq_2 + b + q_2)}{a(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2) + \theta_2 + \theta_3 \cos q_2} \end{aligned} \quad (43)$$

由式 (22) 和式 (43) 确定了 τ 与 q_2 之间的函数关系, 由此可以计算出给定为 q_{1d}, q_{2d} 时所需的最大力矩, 图 3(b) 给出了 $q_{1d} \in [-1, 1], q_{2d} \in [0.1, 1]$ 时的最大力矩曲线.

从图中可以明显看出这种差异,事实上,由于不再强制要求 $q_2 = q_{2d}$,而是在摆动过程中向着自然伸展的方向运动,意味着不必要消耗很大的力矩去维持虚约束函数,使系统状态集中在曲面的中心区域,从而大大降低了控制力矩的需求。



(a) 基于能量的方法
(a) Energy based method



(b) 基于对称虚约束的方法
(b) Symmetrical virtual constraints based method

图 3 两种方法作用下最大稳态力矩

Fig. 3 The maximum torques under the two methods

5 仿真实验

为了验证所提出的基于虚约束的控制器设计方法的有效性,在 Matlab/Simulink 平台上进行仿真。所搭建的 Acrobot 模型采用下述参数:

表 1 仿真模型参数

Table 1 Model parameters for simulation

m_1 (kg)	m_2 (kg)	l_1 (m)	l_2 (m)	l_{c1} (m)	l_{c2} (m)	I_1 (kg·m ²)	I_2 (kg·m ²)	g (m/s ²)
1	1	1	2	0.5	1	1/12	1/3	9.81

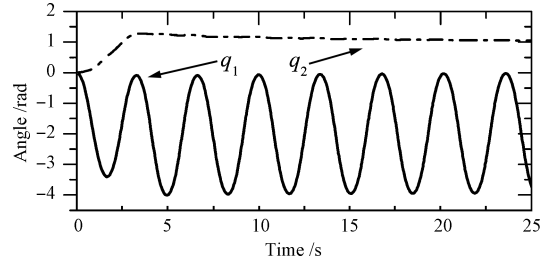
从前面的设计过程可以看出,整个控制器包含 3 个参数,分别为 K_1, K_2, K_3 。其中, K_1, K_2 是用于内环控制以使其产生二阶系统的输入输出特性,可以通过经典控制理论来选择合适的参数以保证稳定及快速性; K_3 是外环切换控制律的增益因子,在一定限度内, K_3 越大,外环收敛速度将越快,因此仿真中选择了如下一组控制参数,它们保证了内环响应时间约 0.2s。

$$K_1 = 20, \quad K_2 = 200, \quad K_3 = 50 \quad (44)$$

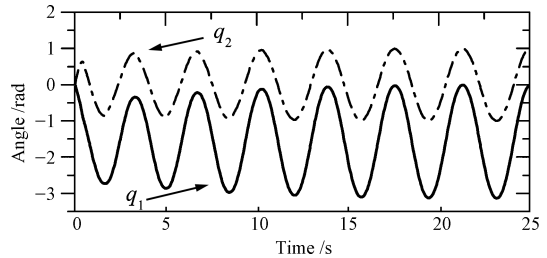
仿真实验以 $[q_{10}, q_{20}] = [0, 0]$ 为起始点,以 $[q_{1d}, q_{2d}] = [0, 1]$ (速度均为 0) 为目标点。即从起始点出发,经过若干次摆动到达目标点。作为对比,利用文献 [11] 中给出的基于能量的动态伺服控制方法进行同样的实验,其控制参数为

$$k_D = 15, \quad k_E = 0.5, \quad k_P = 22, \quad k_V = 45 \quad (45)$$

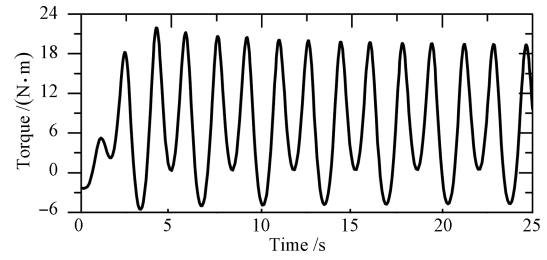
图 4 (a)~4 (d) 给出了两种控制方法的仿真结果。



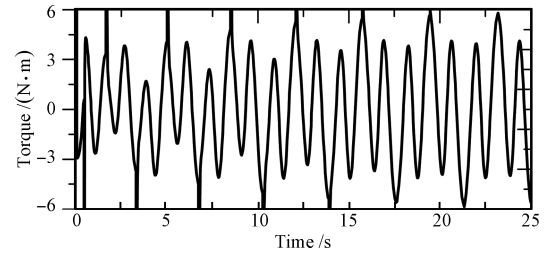
(a) 能量方法状态曲线
(a) State curves of energy based method



(b) 虚约束方法状态曲线
(b) State curves of virtual constraints method



(c) 能量方法力矩曲线
(c) Torque curve of energy based method



(d) 虚约束方法力矩曲线
(d) Torque curve of virtual constraints method

图 4 两给定目标点 $[q_{1d}, q_{2d}] = [0, 1]$ 时的仿真结果

Fig. 4 Simulation results when $[q_{1d}, q_{2d}] = [0, 1]$

从曲线中可以看出,虽然两种方法的最终轨道是不同的,基于能量的方法摆杆摆角是常值,而虚约束方法摆杆摆角随连杆摆角而变,但它们在运动过程中均达到了目标点,实现了动态伺服控制的目标.另外基于能量的方法稳态时,需要最大 24 N·m 的力矩,而虚约束法由于不需要维持固定的摆杆摆角,因此稳态时只需要最大 6 N·m 的力矩.这使得它更适合于力矩有一定限制的 Acrobot 系统中.

6 结论

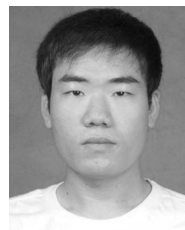
本文以 Acrobot 为对象研究了欠驱动机械系统的动态伺服问题,首先给出了其动力学模型以及动态伺服问题的数学定义.接着从问题入手设计了一个线性虚约束,该约束可以保证系统经过目标点时,具有固定形态并且经过垂直向下平衡点,从而达到拟人的运动效果.

然后给出了 Acrobot 系统在虚约束作用下零动态方程的规范形式并结合所设计的虚约束推导了其积分曲线.为了保证其可以收敛至目标轨道,设计了级联形式的控制器.控制器分为内外两环,内环采用改进的反馈线性化方法,引入了一个使内环呈现二阶系统特性的虚拟输入,在该虚拟输入的基础上,构造了由轨道参数构成的 Lyapunov 函数,并利用符号函数控制律实现外环控制.仿真实验证明了所提方法的有效性,并且与基于能量的方法相比,该方法收敛过程更快、更平滑,精度更高,所需的驱动输入更小,具有更良好的性能,相关实物实验正在进行中.

References

- Murray R M, Hauser J. A Case Study in Approximate Linearization: the Acrobot Example, Technical Report UCB/ERL M91/46, University of California, USA, 1991
- Spong M W. The swing up control problem for the acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, **15**(1): 49–55
- Xin X, Kaneda M. The swing up control for the acrobot based on energy control approach. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis, USA: IEEE, 2002. 3261–3266
- Berkemeier M D, Fearing R S. Tracking fast inverted trajectories of the underactuated acrobot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1999, **15**(4): 740–750
- Shiriaev A, Perram J W, Canudas-de-Wit C. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(8): 1164–1176
- Shiriaev A, Perram J W, Robertsson A, Sandberg A. Explicit formulas for general integrals of motion for a class of mechanical systems subject to virtual constraints. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Nassau, Bahamas: IEEE, 2004. 1158–1163

- Shiriaev A, Sandberg A, Canudas-de-Wit C. Motion planning and feedback stabilization of periodic orbits for an acrobot. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Nassau, Bahamas: IEEE, 2004. 290–295
- Shiriaev A, Freidovich L B, Gusev S V. Transverse linearization for controlled mechanical systems with several passive degrees of freedom. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 893–906
- Freidovich L B, Mettin U, Shiriaev A, Spong M W. A passive 2-DOF walker: hunting for gaits using virtual holonomic constraints. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, **25**(5): 1202–1208
- La-Hera P M, Shiriaev A, Freidovich L B, Mettin U. Orbital stabilization of a pre-planned periodic motion to swing up the Furuta pendulum: theory and experiments. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Kobe, Japan: IEEE, 2009. 2971–2976
- Zhang Xiao-Hua, Cheng Hong-Tai, Zhao Yi-Ni. Energy based dynamical servo control for the acrobot. *Control and Decision*, 2008, **23**(11): 1258–1262
(张晓华, 程红太, 赵旖旎, 基于能量的 Acrobot 动态伺服控制. 控制与决策, 2008, **23**(11): 1258–1262)
- Slotine J J, Li W. *Applied Nonlinear Control*. New York: Prentice-Hall, 1991. 208–236



程红太 哈尔滨工业大学博士研究生. 主要研究方向为机器人非线性控制. 本文通信作者.

E-mail: redsuncheng@gmail.com

(**CHENG Hong-Tai** Ph.D. candidate at Harbin Institute of Technology. His main research interest is nonlinear control of robotics. Corresponding author of this paper.)



赵旖旎 哈尔滨工业大学电力电子与电力传动研究所博士研究生. 主要研究方向为仿生机器人运动控制.

E-mail: yinihit@126.com

(**ZHAO Yi-Ni** Ph.D. candidate at Harbin Institute of Technology. His main research interest is biomimetic robot motion control.)



张晓华 哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院教授. 主要研究方向为智能机器人与运动控制、机器视觉.

E-mail: zxhhit@126.com

(**ZHANG Xiao-Hua** Professor at Harbin Institute of Technology. His research interest covers intelligent robots and motion control research, and machine vision.)