

随机系统的多模型直接自适应解耦控制器

郑益慧¹ 王昕¹ 李少远² 姜建国³

摘要 针对多变量离散时间随机系统, 提出了一种采用广义最小方差性能指标的多模型直接自适应解耦控制器. 该多模型控制器由多个固定控制器和两个自适应控制器构成. 固定控制器用以覆盖系统参数的可能变化范围, 自适应控制器用以保证系统的稳定性和提高暂态性能. 该多模型控制器利用矩阵的伪交换性和拟 Diophantine 方程性质, 基于广义最小方差性能指标, 将随机系统辨识算法和最优控制器设计相结合, 直接辨识出控制器的参数, 通过广义最小方差性能指标中加权多项式的选取, 不但实现了多变量系统的动态解耦控制, 而且消除了稳态误差、配置了闭环极点. 文末给出了全局收敛性分析. 仿真结果表明该方法明显优于常规自适应控制器.

关键词 多模型, 随机系统, 直接自适应控制, 动态解耦

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.01295

Multiple Models Direct Adaptive Decoupling Controller for a Stochastic System

ZHENG Yi-Hui¹ WANG Xin¹ LI Shao-Yuan² JIANG Jian-Guo³

Abstract For a multivariable discrete-time stochastic system, a multiple models direct adaptive decoupling controller based on generalized minimum variance performance index is presented. It is composed of multiple fixed models and two adaptive models. The fixed models are used to cover the region where the system parameters jump, while the adaptive models are used to guarantee the stability and improve the transient response. For the fixed models, it utilizes the matrix pseudo-commutativity and quasi-Diophantine equation to design the generalized minimum variance controller. For the adaptive models, it adopts the stochastic system identification algorithm with optimal controller design method to identify the controller parameter directly. Then, through the choice of the weighting polynomial matrices, it not only realizes the dynamic decoupling control but also eliminates the steady state error and places the closed-loop poles arbitrarily. Finally, the global convergence is given. The simulation proves the effectiveness of the controller proposed.

Key words Multiple models, stochastic system, direct adaptive control, dynamic decoupling

多模型控制器的设计可以追溯到 70 年代. 从 1971 年 Lainiotis 提出的基于后验概率加权的多模型控制器^[1-3], 到目前基于切换指标的多模型自适应控制器^[4-6], 已经经历了近 40 年的发展. 1984 年, Badr 等提出了加权多模型控制器, 每个控制器采用二次型最优指标进行设计, 控制器输出采用加权和形式^[7]. 该方法本质上相当于一种软切换^[8], 因而切换过程比较平滑, 对系统的执行机构损害小, 易于

在实际工业过程中使用^[9], 但也正因为采用控制器输出的加权和形式, 因而难以得到稳定性、收敛性等理论证明. 1986 年, Fu 等针对状态空间模型, 构造多个不同的状态反馈建立多模型集, 按编号顺序从小到大进行控制器切换, 成功地保证了闭环系统是指数稳定的^[10]. 但由于采用了顺序切换方式, 导致系统的过渡过程很差^[11], 难以在实际中得到应用. 1994 年, Narendra 等为了提高系统的暂态性能, 采用多个初值不同的自适应模型构成多模型集, 然后根据切换指标选出最优模型, 进而选出与之相对应的控制器实行切换控制^[12]. 该控制器在系统首次发生跳变时可以提高系统的暂态性能, 但当多个初值不同的自适应模型收敛到同一邻域时, 会退化成常规自适应控制器而丧失了多模型的优点. 为了解决上述问题, 文献 [13] 采用多个固定模型构成多模型集覆盖系统参数变化的可能范围, 但由于固定模型不具有自适应能力而无法消除系统的稳态误差. 文献 [14] 在上述多固定模型的基础上加入一个自适应模型解决了上述问题, 同时给出了全局收敛性证明. 为了进一步加快系统的辨识速度, 提高系统的暂态性能, 文献 [15] 在上述模型集的基础上, 再加入一个可重新赋值的自适应模型. 该自适应模型的参数值

收稿日期 2009-02-23 录用日期 2010-04-16
Manuscript received February 23, 2009; accepted April 16, 2010
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2008AA04Z129), 国家自然科学基金 (60504010, 60864004, 60774015), 上海市教委支出预算项目 (2008093), 上海市教委科研创新项目 (09YZ241) 资助
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2008AA04Z129), National Natural Science Foundation of China (60504010, 60864004, 60774015), Disbursal Budget Program of Shanghai Municipal Education Commission of China (2008093), and Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission of China (09YZ241)
1. 上海交通大学电工与电子技术中心 上海 200240 2. 上海交通大学自动化系 上海 200240 3. 上海交通大学电气系 上海 200240
1. Center of Electrical and Electronic Technology, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 2. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 3. Department of Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240

可被重新赋值为最优模型的参数值以加快系统的辨识速度,同时给出全局收敛性证明.但以上方法都是针对连续时间系统.1998年,Narendra等将上述方法推广到离散时间系统^[16].文献[17-19]采用直接算法、分层递阶和逐维定位策略优化多模型集的数目,减少计算量,但上式方法都是针对确定性系统,没有考虑到实际过程中噪声的影响,因而难以在工业生产中得到应用.为此,文献[20]考虑有色噪声的影响,将以上结果推广到随机系统.但该方法仅限于单输入单输出系统,采用辨识系统参数的间接自适应算法,不但加大了计算量,而且容易造成矩阵方程求解的病态问题^[21].另外,该方法的性能指标采用最小方差形式,没有对控制输入加以限制,往往造成性能指标最优时,控制输入要求过大,在实际工业过程中会造成阀门开度超过最大值而无法实现^[22].

本文针对多变量离散时间随机系统,提出了一种采用广义最小方差性能指标的多模型直接自适应解耦控制器.该多模型控制器由多个固定控制器和两个自适应控制器构成.固定控制器利用矩阵的伪交换性和拟Diophantine方程性质,基于广义最小方差性能指标进行设计,用以覆盖系统参数的可能变化范围.自适应控制器是将随机系统辨识算法和最优控制器设计相结合,直接辨识出控制器参数的直接算法,用以保证系统的稳定性和提高暂态性能.最后通过广义最小方差性能指标中加权多项式的选取,不但实现了多变量系统的动态解耦控制,而且消除了稳态误差、配置了闭环极点.文末给出了全局收敛性分析.仿真结果表明与常规自适应控制器相比,无论模型参数发生跳变,还是动态解耦能力都得到明显改善.

1 被控系统描述

设多输入多输出线性离散时间随机系统用下述ARMAX模型描述

$$A(t, z^{-1})\mathbf{y}(t+k) = B(t, z^{-1})\mathbf{u}(t) + C(t, z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ 分别为 n 维输入、输出向量, $\boldsymbol{\xi}(t)$ 为 n 维独立同分布白噪声向量, 满足:

$$E[\boldsymbol{\xi}(t)|\mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \text{a.s.} \quad (2)$$

$$E[\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2|\mathcal{F}_{t-1}] = \sigma^2, \quad \text{a.s.} \quad (3)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (4)$$

式中, a.s. 是 almost surely 的缩略语, \mathcal{F}_t 表示非降子 δ 代数族, $A(t, z^{-1})$, $B(t, z^{-1})$, $C(t, z^{-1})$ 是时间 t 和单位后移算子 z^{-1} 的矩阵多项式, 具有如下形式

$$A(t, z^{-1}) = I + A_1(t)z^{-1} + \cdots + A_{n_a}(t)z^{-n_a} \quad (5)$$

$$B(t, z^{-1}) = B_0(t) + B_1(t)z^{-1} + \cdots + B_{n_b}(t)z^{-n_b} \quad (6)$$

$$C(t, z^{-1}) = I + C_1(t)z^{-1} + \cdots + C_{n_a}(t)z^{-n_a} \quad (7)$$

且 $\forall t$, $B_0(t)$ 非奇异, k 为系统的传输时延. 系统满足如下假设:

假设 1. 系统为时不变系统或含跳变参数的时变系统, 同时假设相邻跳变时间间隔足够长, 系统在此期间内参数保持不变;

假设 2. t 变化时, $A(t, z^{-1})$, $B(t, z^{-1})$, $C(t, z^{-1})$ 构成的参数矩阵在一紧集 Σ 中变化;

假设 3. $A(t, z^{-1})$, $B(t, z^{-1})$, $C(t, z^{-1})$ 的阶次上限 n_a , n_b , n_c 和时延 k 已知;

假设 4. $C(t, z^{-1})$ 是稳定的, 即 $\det[C(t, z^{-1})] \neq 0$, $|z| \geq 1$, $\forall t$;

假设 5. 系统是最小相位系统, 即 $\det[B(t, z^{-1})] \neq 0$, $|z| \geq 1$, $\forall t$.

由假设 1 可知, $A_i(t)$, $B_j(t)$ 和 $C_k(t)$ 为常值矩阵(时不变系统)或分段常值矩阵(含跳变参数的时变系统). 因此, 在相邻跳变时间间隔内, 系统可写成时不变形式而不失一般性:

$$A(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) = B(z^{-1})\mathbf{u}(t) + C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) \quad (8)$$

下文将针对系统(8)进行研究.

2 多模型自适应控制器

针对被控系统模型的各个参数在一定范围内变化的特点, 首先确定系统模型参数的变化区域, 然后将该变化区域划分为 m 个小的子区域, 在每个子区域中建立一个固定模型, 得到 m 个固定模型. 接着对每个固定模型设计最优控制器, 得到 m 个参数不变的固定控制器. 在此基础上, 添加一个常规自适应控制器保证系统的稳定性, 再添加一个可重新赋值的自适应控制器用以提高系统的暂态性能. 这样得到的 m 个固定控制器与 2 个自适应控制器一起构成多控制器集, 基于切换指标选取最优控制器作为当前控制器进行控制.

2.1 m 个固定控制器

2.1.1 m 个系统参数模型

定义 1. 由矩阵多项式 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的各系数矩阵构成的矩阵 Φ 称为系统参数模型. $\Phi(t)$ 所有取值构成的集合 Σ 称为系统参数模型集.

将系统参数模型集 Σ 分为 m 个模型子集 Σ_s , 并且 Σ_s 满足

- 1) $\Sigma_s \subset \Sigma$, Σ_s 非空, $s = 1, \dots, m$;

2) $\bigcup_{s=1}^m \Sigma_s \supseteq \Sigma$;

3) $\forall \Phi \in \Sigma_s, \exists \Phi_s \in \Sigma_s, 0 \leq r_s < \infty$, 满足 $\|\Phi - \Sigma_s\| \leq r_s$, 称 Φ_s 为模型子集 Σ_s 的中心, r_s 为半径, 其存在性由假设 2 保证.

这样建立的 m 个模型 $\Phi_s (s = 1, \dots, m)$ 就构成 m 个固定模型.

2.1.2 广义最小方差控制器的设计

设性能指标为

$$J_p = E[\|P(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) - R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) + Q(z^{-1})\mathbf{u}(t)\|^2] \quad (9)$$

式中, $\mathbf{y}^*(t)$ 为 n 维期望输出向量, $P(z^{-1}), Q(z^{-1}), R(z^{-1})$ 为加权多项式矩阵, 且满足 $P(z^{-1})$ 稳定. 针对式 (8) 中的 $A(z^{-1})$ 和式 (9) 中的 $P(z^{-1})$, 引入 $\bar{A}(z^{-1}), \bar{P}(z^{-1})$ 满足矩阵的伪交换性^[23]

$$\bar{A}(z^{-1})P(z^{-1}) = \bar{P}(z^{-1})A(z^{-1}) \quad (10)$$

式中, $\bar{A}(z^{-1}), \bar{P}(z^{-1})$ 满足

$$\det[\bar{A}(z^{-1})] = \det[A(z^{-1})] \quad (11)$$

$$\det[\bar{P}(z^{-1})] = \det[P(z^{-1})] \quad (12)$$

令

$$\bar{C}(z^{-1}) = \bar{P}(z^{-1})C(z^{-1}) \quad (13)$$

对于式 (10) 中的 $\bar{A}(z^{-1})$, 引入 Diophantine 方程^[24], 得

$$\bar{C}(z^{-1}) = \bar{A}(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k}G(z^{-1}) \quad (14)$$

同理, 针对式 (14) 中 $F(z^{-1}), G(z^{-1})$, 引入 $\bar{F}(z^{-1}), \bar{G}(z^{-1})$ 满足矩阵的伪交换性^[23], 有

$$\bar{F}(z^{-1})G(z^{-1}) = \bar{G}(z^{-1})F(z^{-1}) \quad (15)$$

且满足

$$\det[\bar{F}(z^{-1})] = \det[F(z^{-1})] \quad (16)$$

$$\det[\bar{G}(z^{-1})] = \det[G(z^{-1})] \quad (17)$$

利用上述矩阵多项式构造 $\tilde{C}(z^{-1})$, 满足

$$\tilde{C}(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) + z^{-k}\bar{G}(z^{-1}) \quad (18)$$

下面用三个定理给出 $\tilde{C}(z^{-1})$ 的性质.

定理 1. 拟 Diophantine 方程性质.

$$\tilde{C}(z^{-1})P(z^{-1}) = \tilde{F}(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-k}\tilde{G}(z^{-1}) \quad (19)$$

式中

$$\tilde{F}(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})\bar{P}(z^{-1}) \quad (20)$$

$$\tilde{G}(z^{-1}) = \bar{G}(z^{-1})\bar{P}(z^{-1}) \quad (21)$$

证明. 用 $P(z^{-1})$ 右乘式 (18), 考虑式 (10) 得

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z^{-1})P(z^{-1}) &= \\ \bar{F}(z^{-1})\bar{A}(z^{-1})P(z^{-1}) + z^{-k}\bar{G}(z^{-1})P(z^{-1}) &= \\ \bar{F}(z^{-1})\bar{P}(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-k}\bar{G}(z^{-1})P(z^{-1}) &= \\ \tilde{F}(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-k}\tilde{G}(z^{-1}) & \end{aligned}$$

□

定理 2. 伪交换性.

$$\bar{C}(z^{-1})F(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})C(z^{-1}) \quad (22)$$

证明. 用 $F(z^{-1})$ 右乘式 (18), 利用式 (13)~(15) 和式 (20), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z^{-1})F(z^{-1}) &= \\ \bar{F}(z^{-1})\bar{A}(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k}\bar{G}(z^{-1})F(z^{-1}) &= \\ \bar{F}(z^{-1})\bar{A}(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k}\bar{F}(z^{-1})G(z^{-1}) &= \\ \bar{F}(z^{-1})[\bar{A}(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k}G(z^{-1})] &= \\ \bar{F}(z^{-1})\bar{P}(z^{-1})C(z^{-1}) &= \\ \tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1}) & \end{aligned}$$

□

定理 3. 稳定性.

$\tilde{C}(z^{-1})$ 是稳定的, 即

$$\det[\tilde{C}(z^{-1})] \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (23)$$

证明. 由式 (20) 和式 (22) 可知

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z^{-1})F(z^{-1}) &= \tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1}) = \\ \bar{F}(z^{-1})\bar{P}(z^{-1})C(z^{-1}) & \end{aligned}$$

考虑式 (12), (16) 及假设条件 $P(z^{-1}), C(z^{-1})$ 稳定, 可得

$$\begin{aligned} \det[\tilde{C}(z^{-1})] &= \det[P(z^{-1})] \\ \det[C(z^{-1})] &\neq 0, \quad |z| \geq 1 \end{aligned}$$

□

为了求得最优控制律和系统闭环方程, 用 $\tilde{F}(z^{-1})$ 左乘式 (8), 得

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z^{-1})A(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) &= \\ \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) & \end{aligned} \quad (24)$$

利用定理 1 和定理 2, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z^{-1})P(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) &= \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \\ \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \\ &\tilde{C}(z^{-1})F(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(z^{-1})[P(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) - F(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k)] = \\ &\tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})\mathbf{u}(t) \quad (25) \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^0(t+k) = P(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) - F(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) \quad (26) \end{aligned}$$

代入性能指标 (9) 中, 并考虑式 (2), 得

$$\begin{aligned} J_P = E[\|P(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) - \\ R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) + Q(z^{-1})\mathbf{u}(t)\|^2] = \\ E[\|\mathbf{y}^0(t+k) + F(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) - \\ R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) + Q(z^{-1})\mathbf{u}(t)\|^2] = \\ \|\mathbf{y}^0(t+k) - R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) + \\ Q(z^{-1})\mathbf{u}(t)\|^2 + E[\|F(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k)\|^2] \end{aligned}$$

为使性能指标最小, 可得

$$\mathbf{y}^0(t+k) - R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) + Q(z^{-1})\mathbf{u}(t) = 0 \quad (27)$$

此时, 性能指标最小值为

$$J_{P\min} = \sum_{i=0}^{k-1} f_i \sigma^2 \quad (28)$$

将式 (27) 代入式 (25) 和式 (26) 中, 可得最优控制律为

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(z^{-1})[R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) - Q(z^{-1})\mathbf{u}(t)] = \\ &\tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1})\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &[\tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) + \tilde{C}(z^{-1})Q(z^{-1})]\mathbf{u}(t) + \\ &\tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) = \tilde{C}(z^{-1})R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \quad (29) \end{aligned}$$

联立式 (28) 和式 (29), 利用定理 1 和定理 2, 得

$$\begin{aligned} &\tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{F}(z^{-1})A(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) + \\ &\tilde{C}(z^{-1})Q(z^{-1})B^{-1}(z^{-1})A(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) - \\ &\tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) - \\ &\tilde{C}(z^{-1})Q(z^{-1})B^{-1}(z^{-1})C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) = \\ &\tilde{C}(z^{-1})R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(z^{-1})[\tilde{P}(z^{-1}) + Q(z^{-1})B^{-1}(z^{-1})A(z^{-1})]\mathbf{y}(t+k) - \\ &\tilde{C}(z^{-1})[\tilde{F}(z^{-1}) + Q(z^{-1})B^{-1}(z^{-1})C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t+k) = \\ &\tilde{C}(z^{-1})R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \end{aligned}$$

由定理 3, 可得系统的闭环方程为

$$\begin{aligned} &[\tilde{P}(z^{-1}) + Q(z^{-1})B^{-1}(z^{-1})A(z^{-1})]\mathbf{y}(t+k) - \\ &[\tilde{F}(z^{-1}) + Q(z^{-1})B^{-1}(z^{-1})C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t+k) = \\ &R(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \quad (30) \end{aligned}$$

由假设 5 知 $B(z^{-1})$ 稳定, 因此可以令

$$Q(z^{-1}) = R_1 B^{-1}(z^{-1}) \quad (31)$$

$$P(z^{-1}) + R_1 A^{-1}(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (32)$$

$$R(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (33)$$

式中, R_1 为定常矩阵, $T(z^{-1}) = T_0 + T_1(z^{-1}) + \dots + T_{n_t}(z^{-n_t})$ 为稳定的对角形多项式矩阵, 其零点为期望的闭环系统极点, 满足 $n_p = n_a, n_t \leq n_a$, 则系统闭环方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+k) = \mathbf{y}^*(t) + T^{-1}(z^{-1})[F(z^{-1}) + \\ R_1 C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t+k) \quad (34) \end{aligned}$$

因此通过上述加权多项式矩阵的选取, 系统不但配置了闭环极点, 而且实现了动态解耦。

式 (29) 得到的即为固定控制器的最优控制律, 但为了和自适应控制器采用相同的结构形式, 下面给出该控制器的另一种形式。

首先用 $\tilde{C}(z^{-1})R_1$ 左乘式 (8), 得

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(z^{-1})R_1 A(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) = \\ &\tilde{C}(z^{-1})R_1 B(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \\ &\tilde{C}(z^{-1})R_1 C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t+k) \quad (35) \end{aligned}$$

与式 (25) 相加, 得

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(z^{-1})\{[P(z^{-1}) + R_1 A(z^{-1})]\mathbf{y}(t+k) - \\ &[F(z^{-1}) + R_1 C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t+k)\} = \\ &\tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + [\tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) + \\ &\tilde{C}(z^{-1})R_1 B(z^{-1})]\mathbf{u}(t) \quad (36) \end{aligned}$$

考虑式 (31) 和式 (32), 得

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(z^{-1})\{T(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) - [F(z^{-1}) + \\ &R_1 C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t+k)\} = \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \\ &[\tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) + \tilde{C}(z^{-1})Q(z^{-1})]\mathbf{u}(t) \quad (37) \end{aligned}$$

定义广义输出预测

$$\hat{\mathbf{y}}^0(t+k) = \hat{\mathbf{y}}(t+k) - \hat{\mathbf{v}}(t+k) \quad (38)$$

$$\hat{\mathbf{y}}^0(t+k) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t+k) \quad (39)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(t+k) = [F(z^{-1}) + R_1 C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t+k) \quad (40)$$

代入式 (37), 得

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z^{-1})\hat{\mathbf{y}}^0(t+k) &= \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \\ &[\tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) + \tilde{C}(z^{-1})Q(z^{-1})]\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (41)$$

即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}^0(t) &= H_1(z^{-1})\mathbf{y}(t-k) + \\ &H_2(z^{-1})\mathbf{u}(t-k) + H_3(z^{-1})\hat{\mathbf{y}}^0(t-k) \end{aligned} \quad (42)$$

式中,

$$H_1(z^{-1}) = \tilde{G}(z^{-1}) \quad (43)$$

$$H_2(z^{-1}) = \tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) + \tilde{C}(z^{-1})Q(z^{-1}) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} H_3(z^{-1}) &= \tilde{C}_1 + \dots + \tilde{C}_{n_\varepsilon}(z^{-n_\varepsilon+1}) = \\ &z[\tilde{C}(z^{-1}) - I] \end{aligned} \quad (45)$$

为了求取最优控制律, 令

$$\hat{\mathbf{y}}^0(t) = \hat{\mathbf{y}}^*(t) \quad (46)$$

$$\hat{\mathbf{y}}^*(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \quad (47)$$

则最优控制律为

$$\begin{aligned} H_1(z^{-1})\mathbf{y}(t) + H_2(z^{-1})\mathbf{u}(t) - \\ H_3(z^{-1})\hat{\mathbf{y}}^*(t-1) = \hat{\mathbf{y}}^*(t) \end{aligned} \quad (48)$$

2.1.3 m 个固定控制器

定义 2. 系统参数模型 Φ 经过式 (24), (25), (43) ~ (48) 变换后得到的矩阵 $H_1(z^{-1})$, $H_2(z^{-1})$, $H_3(z^{-1})$ 构成的矩阵 Θ 称为控制器模型. 对应 $\Phi(t)$ 的所有 $\Theta(t)$ 的集合 Ω 称为控制器模型集. 对应 $\Phi(t) \in \Sigma_s$ 的 $\Theta(t)$ 的集合 Ω_s 称为控制器模型子集. 对应 $\Phi_s \in \Sigma_s$ 的 Θ_s 称为该模型子集的中心.

因此, 上述变换得到的 m 个控制器 $\Theta_s, s = 1, \dots, m$ 就构成了多模型集中的 m 个固定控制器.

2.2 常规自适应控制器

定义数据向量 $\mathbf{X}_0(t-k)$ 和控制器矩阵 Θ_0 为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(t-k) &= [\mathbf{y}(t-k)^\top, \dots, \mathbf{y}(t-k-n_{h_1})^\top, \\ &\mathbf{u}(t-k)^\top, \dots, \mathbf{u}(t-k-n_{h_2})^\top, \\ &-\hat{\mathbf{y}}^0(t-1)^\top, \dots, -\hat{\mathbf{y}}^0(t-n_{h_3})^\top]^\top \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= [\boldsymbol{\theta}_{01}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{0n}] = \\ &[H_{10}, H_{11}, \dots, H_{1n_{h_1}}, H_{20}, H_{21}, \dots, H_{2n_{h_2}}, \\ &H_{30}, H_{31}, \dots, H_{3n_{h_3}}]^\top \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{0i} &= [h_{i1}^{10}, \dots, h_{in}^{10}, h_{i1}^{11}, \dots, h_{in}^{11}, \dots, h_{i1}^{20}, \dots, h_{in}^{20}, \\ &h_{i1}^{21}, \dots, h_{in}^{21}, \dots, h_{i1}^{30}, \dots, h_{in}^{30}, \\ &h_{i1}^{31}, \dots, h_{in}^{31}, \dots]^\top, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (51)$$

则方程 (42) 可以写为

$$\hat{\mathbf{y}}^0(t) = \Theta_0^\top \mathbf{X}_0(t-k) \quad (52)$$

由式 (52) 可以定义自适应控制器的辨识方程为

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\Theta}(t-k)^\top \mathbf{X}(t-k) \quad (53)$$

式中,

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(t-k) &= [\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(t-k), \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(t-k)] = \\ &[\hat{H}_{10}(t-k), \hat{H}_{11}(t-k), \dots, \hat{H}_{1n_{h_1}}(t-k), \\ &\hat{H}_{20}(t-k), \hat{H}_{21}(t-k), \dots, \hat{H}_{2n_{h_2}}(t-k), \\ &\hat{H}_{30}(t-k), \hat{H}_{31}(t-k), \dots, \hat{H}_{3n_{h_3}}(t-k)]^\top \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t-k) &= [\hat{h}_{i1}^{10}(t-k), \dots, \hat{h}_{i1}^{20}(t-k), \dots, \\ &\hat{h}_{i1}^{30}(t-k), \dots]^\top, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t-k) &= [\mathbf{y}(t-k)^\top, \dots, \mathbf{y}(t-k-n_{h_1})^\top, \\ &\mathbf{u}(t-k)^\top, \dots, \mathbf{u}(t-k-n_{h_2})^\top, \\ &-\hat{\mathbf{y}}(t-1)^\top, \dots, -\hat{\mathbf{y}}(t-k-n_{h_3})^\top]^\top \end{aligned} \quad (56)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \hat{\Theta}(t)^\top \mathbf{X}(t-k) \quad (57)$$

表示广义输出 $\hat{\mathbf{y}}(t+k) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t+k)$ 的后验预报.

采用如下辨识算法

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t-1) + \\ &\frac{\mathbf{X}(t-k)}{r(t-k-1) + \mathbf{X}(t-k)^\top \mathbf{X}(t-k)} \times \\ &[\hat{\mathbf{y}}_i(t) - \hat{\mathbf{y}}_i(t)] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{X}(t-k)^\top \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t-1) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} r(t-k) &= r(t-k-1) + \mathbf{X}(t-k)^\top \mathbf{X}(t-k), \\ &r(-1), r(-2), \dots, r(-d) > 0 \end{aligned} \quad (60)$$

为了求取最优控制律, 令

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{y}}^*(t) \quad (61)$$

则最优控制律为

$$\begin{aligned} \hat{H}_1(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \hat{H}_2(z^{-1})\mathbf{u}(t) - \\ \hat{H}_1(z^{-1})\hat{\mathbf{y}}^*(t-1) = \hat{\mathbf{y}}^*(t) \end{aligned} \quad (62)$$

2.3 可重新赋值自适应控制器

1) 当可重新赋值自适应控制器是当前选定的最优控制器时, 采用式 (58)~(60) 进行辨识, 以获得控制器参数, 最优控制律可由式 (62) 给出.

2) 当可重新赋值自适应控制器不是当前选定的最优控制器时, 则将可重新赋值自适应控制器的参数初值赋值为当前选定的最优控制器的参数值.

定义 3. 多模型控制器由 m 个参数已知的控制器 $\Theta_s, s = 1, \dots, m$ 及常规自适应控制器 Θ_{m+1} 和可重新赋值的自适应控制器 Θ_{m+2} 构成.

2.4 最优控制器

对于上述 $m + 2$ 个控制器, 采用如下切换指标:

$$J_s = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{e}}_s(t)\|^2, \quad s = 1, \dots, m + 2 \quad (63)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_s(t) = \hat{\mathbf{y}}_s(t) - \hat{\mathbf{y}}^*(t) \quad (64)$$

式中, $\hat{\mathbf{y}}_s(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}_s(t)$ 为第 s 个模型的广义输出, $\hat{\mathbf{y}}^*(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}^*(t)$ 为系统期望的广义输出, 则 $\hat{\mathbf{e}}_s(t) = \hat{\mathbf{y}}_s(t) - \hat{\mathbf{y}}^*(t)$ 为第 s 个模型的广义输出误差.

为了选取最优控制器, 首先, 类似于式 (53) 自适应控制器的表达形式, 将所有 $m + 2$ 个控制器写为

$$\hat{\mathbf{y}}_s(t) = \Theta_s^T \mathbf{X}(t - k), \quad s = 1, \dots, m + 2 \quad (65)$$

式中, Θ_s 为第 s 个模型的控制器参数矩阵. 然后, 任一时刻, 根据切换指标, 选取广义输出误差最小的控制器作为当前控制器实行控制. 即, 若

$$J_j = \min(J_s), \quad s = 1, \dots, m + 2 \quad (66)$$

记作

$$j = \arg \min(J_s), \quad s = 1, \dots, m + 2 \quad (67)$$

则选取 Θ_j 为当前控制器实现控制.

3 全局收敛性分析

为了分析上述多模型控制器的全局收敛性, 现增加如下假设:

假设 6. $\left[\frac{1}{\tilde{C}(z^{-1})} - \frac{1}{2} \right]$ 是严格正实的.

下面给出全局收敛性的证明.

引理 1. 对于随机系统 (8), 有

1)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{y}(t)\|^2 + K_2 \quad (68)$$

2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{y}(t)\|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_3}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{y}}(t)\|^2 + K_4 \quad (69)$$

3)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{y}}(t)\|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_5}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{e}}(t) - \hat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + K_6 \quad (70)$$

式中,

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \hat{\mathbf{y}}^*(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t) - T(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \quad (71)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(t + k) = [F(z^{-1}) + R_1 C(z^{-1})]\boldsymbol{\xi}(t + k) \quad (72)$$

4)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{y}}(t)\|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_7}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{e}}(t) - \hat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + K_8 \quad (73)$$

5)

$$\frac{1}{N} r(N - 1) \leq \frac{K_9}{N} \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{e}}(t) - \hat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + K_{10} \quad (74)$$

证明.

1) 在随机系统 (8) 中, 由假设 4 和假设 5 可知 $B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 稳定, 又由式 (3) 可知白噪声均方有界, 故由文献 [25] 可证.

2) 由式 (39) 中 $\hat{\mathbf{y}}(t + k) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t + k)$, 及 $T(z^{-1})$ 稳定可证.

3) 由式 (71) 知

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{e}}(t) + \hat{\mathbf{y}}^*(t) = \hat{\mathbf{e}}(t) - \hat{\mathbf{v}}(t) + \hat{\mathbf{y}}^*(t) + \hat{\mathbf{v}}(t) \quad (75)$$

$$\|\hat{\mathbf{y}}(t)\|^2 = \|\hat{\mathbf{e}}(t) - \hat{\mathbf{v}}(t) + \hat{\mathbf{y}}^*(t) + \hat{\mathbf{v}}(t)\|^2 \leq$$

$$3\|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 + 3\|\widehat{\mathbf{y}}^*(t)\|^2 + 3\|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 \quad (76)$$

针对式 (72) 及 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的性质式 (2) ~ (4), 有

$$\mathbf{E}[\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)|\mathcal{F}_{t-n_a}] = 0, \quad \text{a.s.} \quad (77)$$

$$\mathbf{E}[\|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2|\mathcal{F}_{t-1}] = \delta^2, \quad \text{a.s.} \quad (78)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (79)$$

由式 (79) 及期望广义输出 $\widehat{\mathbf{y}}^*(t)$ 有界, 所以得证.

4) 将式 (58) 左乘 $\mathbf{X}(t-k)^T$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t-k)^T \widehat{\boldsymbol{\theta}}_i(t) &= \mathbf{X}(t-k)^T \widehat{\boldsymbol{\theta}}_i(t-1) + \\ &\frac{\mathbf{X}(t-k)^T \mathbf{X}(t-k)}{r(t-k-1) + \mathbf{X}(t-k)^T \mathbf{X}(t-k)} \times \\ &[\widehat{\mathbf{y}}_i(t) - \widehat{\mathbf{y}}_i(t)] \end{aligned} \quad (80)$$

即

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{y}}_i(t) &= \widehat{\mathbf{y}}_i(t) + \\ &\frac{\mathbf{X}(t-k)^T \mathbf{X}(t-k)}{r(t-k-1) + \mathbf{X}(t-k)^T \mathbf{X}(t-k)} \times [\widehat{\mathbf{e}}_i(t)] \end{aligned} \quad (81)$$

用 $\widehat{\mathbf{y}}_i(t)$ 减式 (81), 写成多变量形式, 有

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \widehat{\mathbf{e}}(t) - \\ &\frac{\mathbf{X}(t-k)^T \mathbf{X}(t-k)}{r(t-k-1) + \mathbf{X}(t-k)^T \mathbf{X}(t-k)} \times \widehat{\mathbf{e}}(t) \end{aligned} \quad (82)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \widehat{\mathbf{y}}(t) - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t) - T(z^{-1})\widehat{\mathbf{y}}(t) \quad (83)$$

由式 (60), 得

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \frac{r(t-k-1)}{r(t-k)} \widehat{\mathbf{e}}(t) \quad (84)$$

代入式 (83), 有

$$\begin{aligned} \|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 &= \|\widehat{\mathbf{y}}(t) - \widehat{\boldsymbol{\eta}}(t)\|^2 = \\ &\|\widehat{\mathbf{y}}(t) - \frac{r(t-k-1)}{r(t-k)} \widehat{\mathbf{e}}(t)\|^2 = \\ &\|\widehat{\mathbf{y}}(t) - \frac{r(t-k-1)}{r(t-k)} [\widehat{\mathbf{e}} - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t) + \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)]\|^2 \leq \\ &3\|\widehat{\mathbf{y}}(t)\|^2 + 3\|\frac{r(t-k-1)}{r(t-k)} [\widehat{\mathbf{e}} - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)]\|^2 + \\ &3\|\frac{r(t-k-1)}{r(t-k)} \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 \leq \\ &3\|\widehat{\mathbf{y}}(t)\|^2 + 3\|\widehat{\mathbf{e}} - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 + 3\|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (85)$$

由式 (73) 可证.

5) 由式 (60) 可知,

$$r(N-1) = r(N-2) + \mathbf{X}(N-1)^T \mathbf{X}(N-1) \quad (86)$$

则 $r(N-1)$ 可求解得到

$$r(N-1) = r(-1) + \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{X}(t)^T \mathbf{X}(t) \quad (87)$$

由 $\mathbf{X}(t)$ 是由 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\widehat{\mathbf{y}}(t)$ 、 $\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)$ 构成及式 (68) ~ (73) 可证.

□

引理 2. 对于常规自适应模型, 具有如下性质:

1)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 = 0 \quad (88)$$

2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\| \|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\| = 0 \quad (89)$$

证明.

1) 对于自适应辨识算法 (58) ~ (60), 有^[25]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|}{r(t-1)} < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (90)$$

由式 (74) 及随机的基本引理^[25] 可证.

2) 对于自适应辨识算法 (58) ~ (60), 由式 (74) 及随机的基本引理^[25], 可以得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} r(N-1) < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (91)$$

由式 (78), (90) 及 (91), 有

$$\sum_{t=1}^N \frac{1}{t^2} \mathbf{E}\{\|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 \cdot \|\widehat{\boldsymbol{\nu}}(t)\|^2 | \mathcal{F}_{t-n_a}\} < \infty \quad (92)$$

由文献 [25] 中引理 D.5.1 得证. □

定理 4. 在上述假设 1 ~ 6 下, 多模型直接自适应控制算法作用于随机系统 (8) 时, 有

1)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{e}(t) - \boldsymbol{\nu}(t)\|^2 = 0 \quad (93)$$

式中,

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \quad (94)$$

$$\mathbf{v}(t) = T^{-1}(z^{-1})\widehat{\mathbf{v}}(t) \quad (95)$$

2)

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{y}(t)\|^2 < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (96)$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{u}(t)\|^2 < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (97)$$

证明.

1) 对于随机系统, 类似于切换指标 (63), 定义

$$J_c = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t)\|^2 \quad (98)$$

$$\widehat{\mathbf{e}}(t) = \widehat{\mathbf{y}}(t) - \widehat{\mathbf{y}}^*(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t) - T(z^{-1})\mathbf{y}^*(t) \quad (99)$$

式中, $\widehat{\mathbf{y}}(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}(t)$ 为被控系统实际的广义输出, $\widehat{\mathbf{y}}^*(t) = T(z^{-1})\mathbf{y}^*(t)$ 为被控系统期望的广义输出, $\widehat{\mathbf{e}}(t) = \widehat{\mathbf{y}}(t) - \widehat{\mathbf{y}}^*(t)$ 为被控制系统的广义输出误差. 展开式 (99), 知

$$J_c = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| \quad (100)$$

由切换指标 (63) 知: 任何时刻, $J_c = J_j \leq J_{m+1}$, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \\ & \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| \leq \\ & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \\ & \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| \end{aligned} \quad (101)$$

考虑上述不等式两边第 2 项相等, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \\ & \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \\ & \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| \end{aligned} \quad (102)$$

由引理 2 中式 (88) 和式 (89), 可知

$$\begin{aligned} 0 & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \right. \\ & \left. \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| \right] \leq \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}_{m+1}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

由此可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\| \cdot \|\widehat{\mathbf{v}}(t)\| = 0 \quad (104)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{e}}(t) - \widehat{\mathbf{v}}(t)\|^2 = 0 \quad (105)$$

将式 (71), (94) 和 (95) 代入, 得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|T(z^{-1})[\mathbf{e}(t) - \mathbf{v}(t)]\|^2 = 0 \quad (106)$$

考虑到 $T(z^{-1})$ 是稳定的, 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{e}(t) - \mathbf{v}(t)\| = 0$$

2) 将式 (105) 代入引理 1 中式 (70), 可知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\widehat{\mathbf{y}}(t)\|^2 = 0 \quad (107)$$

由引理 1 中式 (68) 和式 (69), 定理得证. \square

4 仿真实验

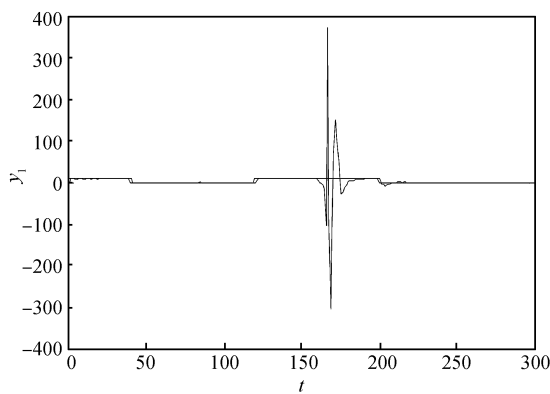
多变量系统模型如下所示

$$\begin{aligned} (I + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})\mathbf{y}(t) = \\ (B_0 + B_1 z^{-1})\mathbf{u}(t-2) + (I + C_1 z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t) \end{aligned} \quad (108)$$

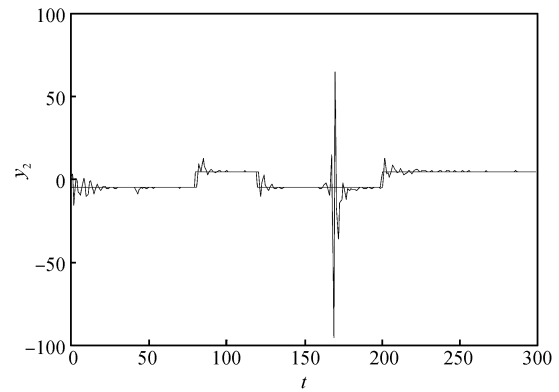
式中, $A_1 = \begin{pmatrix} 0.224 & -0.014 \\ -0.009 & 0.179 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0.017 & 0.004 \\ 0.002 & 0.008 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0.896 & 2.147 \\ 1.985 & 10.041 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} -0.459 & -4.087 \\ 0.423 & 2.209 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$. 参考输入 $y^* = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$. 图 1 表示采用常规自适应控制器时系统的响应, 图 2 表示采用多模型自适应控制器 (100 个固定模型和 2 个自适应模型) 时系统的响应, 其中常规自适应模型和多模型中的两个自适应模型的初值取值相同, 并且距离参数真值很近. 为了检测系统的解耦效果, 在 $t = 40$ 步时, y_1^* 单独由 10 变为 0; 在 $t = 80$ 步时, y_2^* 单独由 -5 变为 5; 在 $t = 120$ 步时, y_1^*, y_2^* 同时发生变化. 从图 1 和图 2 中可以看出, 多模型自适应控制器的解耦效果优于常规自适应控制器. 同样, 为了检测系统在参数发生跳变时的响应情况, 在 $t = 160$ 步时, 系统参数发生变化; 在 $t = 200$ 步时, 系统参数和参考输入 y^* 同时发生变化. 从图中可以明显看出, 特别当系统参数发生变化时, 多模型自适应控制器由于采用多个模型覆盖系统参数的变化范围, 其效果 (图 2) 远远优于常规自适应控制器 (图 1).

5 结论

本文针对多变量离散时间随机系统提出了一种多模型自适应直接算法. 该算法首先利用矩阵的伪交换性和拟 Diophantine 方程性质, 采用广义最小方差性能指标进行设计; 然后将随机系统辨识算法和最优控制器设计相结合, 直接辨识出多模型自适应控制器的参数; 最后通过加权多项式的选取, 实现了多变量系统的动态解耦控制. 文末给出了全局收敛性分析. 仿真结果证明了该方法的有效性.

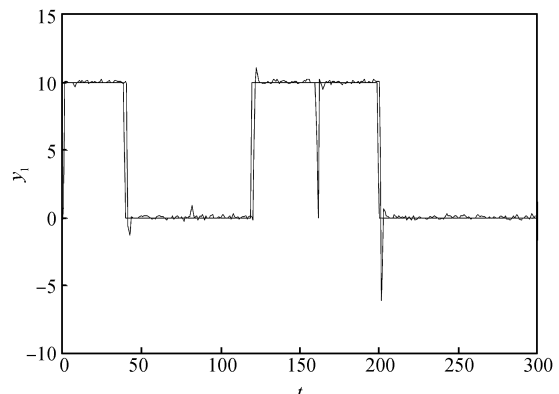


(a) 系统输出 $y_1(t)$
(a) System output $y_1(t)$

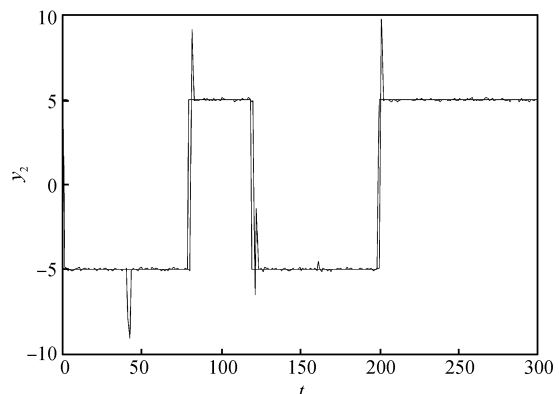


(b) 系统输出 $y_2(t)$
(b) System output $y_2(t)$

图 1 常规自适应控制器仿真结果
Fig. 1 The simulation of the conventional adaptive controller



(a) 系统输出 $y_1(t)$
(a) System output $y_1(t)$



(b) 系统输出 $y_2(t)$
(b) System output $y_2(t)$

图 2 102 个模型的多模型自适应控制器仿真结果
Fig. 2 The simulation of the multiple models adaptive controller with 102 models

References

1 Lainiotis D G. Optimal adaptive estimation structure and parameter adaptation. *IEEE Transactions on Automatic*

- Control*, 1971, **16**(2): 160–170
- 2 Lainiotis D G, Deshpande J G, Upadhyay T N. Optimal adaptive control: a non-linear separation theorem. *International Journal of Control*, 1972, **15**(5): 877–888
 - 3 Lainiotis D G. Partitioning: a unifying framework for adaptive system, I: estimation. *Proceedings of the IEEE*, 1976, **64**(8): 1126–1143
 - 4 Ye X D. Nonlinear adaptive control using multiple identification models. *Systems and Control Letters*, 2008, **57**(7): 578–584
 - 5 Liu J B, Djurdjanovic D. Topology preservation and cooperative learning in identification of multiple model systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, **19**(12): 2065–2072
 - 6 Murphey T D. On multiple model control for multiple contact systems. *Automatica*, 2008, **44**(2): 451–458
 - 7 Badr A, Binder Z, Hagras A N, Perret R. A multi-model tracking controller for distributed control systems. In: Proceedings of the 9th World Congress of IFAC. Budapest, Hungary: IFAC, 1984. 2823–2828
 - 8 Badr A, Binder Z, Rey D. Weighted multi-model control. *International Journal of Systems Science*, 1992, **23**(1): 145–149
 - 9 Badr A, Binder Z, Rey D. Application of tracking multi-model control to a nonlinear thermal process. *International Journal of Systems Science*, 1990, **21**(9): 1795–1803
 - 10 Fu M Y, Barmish B R. Adaptive stabilization of linear systems via switching control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(12): 1097–1103
 - 11 Zhivoglyadov P V, Middleton R H, Fu M Y. Localization based switching adaptive control for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(4): 752–755
 - 12 Narendra K S, Balakrishnan J. Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1861–1866
 - 13 Balakrishnan J, Narendra K S. Intelligent control using fixed and adaptive models. In: Proceedings of the 1995 American Control Conference. Seattle, USA: IEEE, 1995. 597–601
 - 14 Narendra K S, Balakrishnan J. Intelligent control using fixed and adaptive models. In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. Seattle, USA: IEEE, 1994. 1680–1685
 - 15 Narendra K S, Balakrishnan J. Adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(2): 171–187
 - 16 Narendra K S, Xiang C. Adaptive control of discrete time system using multiple models. In: Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control. Tampa, USA: IEEE, 1998. 3978–3983
 - 17 Wang X, Li S Y, Cai W J, Yue H, Zhou X J, Chai T Y. Multi-model direct adaptive decoupling control with application to the wind tunnel system. *ISA Transactions*, 2005, **44**(1): 131–143
 - 18 Wang Xin, Li Shao-Yuan, Yue Heng. Multivariable adaptive decoupling controller using hierarchical multiple models. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(2): 223–230
 - 19 Wang Xin, Wang Zhong-Jie, Yang Hui, Li Shao-Yuan. Multiple models adaptive decoupling controller using dimension-by-dimension. *Control Theory and Applications*, 2006, **23**(5): 711–716
(王昕, 王中杰, 杨辉, 李少远. 采用逐维定位的多模型自适应解耦控制器. *控制理论与应用*, 2006, **23**(5): 711–716)
 - 20 Narendra K S, Xiang C. Adaptive control of discrete-time systems using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(9): 1669–1686
 - 21 Wittenmark B, Astrom K J. Practical issues in the implementation of self-tuning control. *Automatica*, 1984, **20**(5): 595–605
 - 22 Goodwin G C, Hill D J, Palaniswami M. A perspective on convergence of adaptive control algorithms. *Automatica*, 1984, **20**(5): 519–531
 - 23 Wolovich W A. *Linear Multivariable Systems*. New York: Springer-Verlag, 1974
 - 24 Lang S J, Gu X Y, Chai T Y. A multivariable generalized self-tuning controller with decoupling design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(5): 474–477
 - 25 Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive Filter Prediction and Control*. New Jersey, USA: Prentice Hall Inc., 1984



郑益慧 上海交通大学副教授。主要研究方向为多模型自适应控制, 智能控制。
E-mail: zhengyihui@sjtu.edu.cn
(**ZHENG Yi-Hui** Associate professor at Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers multiple models adaptive control and intelligent control.)



王昕 上海交通大学副教授。主要研究方向为多模型自适应控制, 多变量智能解耦, 复杂工业过程建模、控制与优化。本文通信作者。
E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn
(**WANG Xin** Associate professor at Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers multiple models adaptive control, multivariable intelligent decoupling control, and modeling, control and optimization of complex industrial processes. Corresponding author of this paper.)



李少远 上海交通大学教授。主要研究方向为预测控制, 模糊控制和非线性系统控制。E-mail: syli@sjtu.edu.cn
(**LI Shao-Yuan** Professor at Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers predictive control, fuzzy systems, and nonlinear system control.)



姜建国 上海交通大学教授。主要研究方向为电力电子, 电力系统自动化。
E-mail: jiang@sjtu.edu.cn
(**JIANG Jian-Guo** Professor at Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers power electronics and power system automation.)