

离轴式带拖车移动机器人的路径跟踪控制

周火凤¹ 马保离¹ 宋丽辉² 张芳芳³

摘要 研究了离轴式拖车移动机器人系统任意一节车体的几何路径跟踪问题. 首先推导出系统的时间-状态线性化模型并证明了系统的能控性; 然后应用内模原理设计了线性动态反馈控制律, 该控制律可以保证路径跟踪误差有界和最终一致有界, 且最终一致界正比于期望路径函数变化率的立方. 仿真结果证实了控制律的有效性.

关键词 离轴式拖车移动机器人, 路径跟踪, 时间-状态模型, 非完整系统, 输出跟踪

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.01272

Path Following Control of Tractor-trailers with Off-axle Hitching

ZHOU Huo-Feng¹ MA Bao-Li¹ SONG Li-Hui² ZHANG Fang-Fang³

Abstract In this work, we investigated the path following problem of an arbitrary body of tractor-trailers with off-axle hitching. First, a linearized time-state model was derived and proved to be controllable. A dynamic linear feedback control law was then proposed based on internal mode principal to guarantee that the path tracking error is uniformly ultimately bounded and the bound is cubically proportional to the variation rate of the desired geometric path function. Simulation results showed the effectiveness of the proposed control scheme.

Key words Tractor-trailers with off-axle hitching, path following, time-state model, nonholonomic systems, output tracking

不少有关拖车移动机器人控制的研究文献^[1-3]主要涉及连轴式和一些特殊连接的拖车移动机器人系统. 这种系统可以利用已有的针对链式或微分平坦系统所开发的控制方法实施镇定和跟踪控制^[4].

无滑动离轴连接的拖车移动机器人的模型不能转化为链式或微分平坦系统, 其控制问题成为当前非线性控制领域的一个重要研究课题. 对此不少学者提出了控制方案^[5-12], 其中, 仅有文献^[10-11]涉及到一般带 n 节拖车离轴式拖车机器人的路径跟踪控制问题, 但是也仅考虑了最后一节拖车后退跟踪期望轨迹的情况, 而且没有对闭环系统的稳定性进行严格的理论分析.

在拖车移动机器人系统的实际应用中, 经常需要控制某个车体 (而不仅仅是车头或最后一节拖车) 沿给定的期望轨迹或路径运动.

鉴于以上实际考虑, 本文研究一般 n 节离轴式拖车移动机器人的某个车体跟踪期望几何路径的控

制问题. 首先将所推导出的状态空间模型转换为时间-状态模型形式; 进而对时间-状态模型进行线性化处理并证明了其能控性; 然后借鉴内模原理设计了线性动态反馈控制律, 该控制律可以近似跟踪期望的几何路径, 且跟踪误差的界渐近正比于期望路径函数变化率的立方.

1 状态模型和路径跟踪控制问题的数学描述

1.1 状态模型

考虑图 1 所示的带 n 节离轴式拖车的移动机器人系统, 其中车体 i 的轮轴中心点为 P_i , 其坐标为 (x_i, y_i) , 车体的方向角为 θ_i , 线速度为 v_i , 角速度为 ω_i , 车体 $i+1$ 与车体 i 的方向角度差为 $\beta_{i+1} = \theta_i - \theta_{i+1}$, 车体 $i+1$ 与车体 i 的连结节点为 Q_i , P_i 点到 Q_i 点的距离为 d_i , Q_i 点到 P_{i+1} 点的距离为 f_{i+1} .

对上述系统, 容易得到以下运动学关系式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= v_0 \cos \theta_0, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \theta_0, \quad \dot{\theta}_0 = \omega_0 \\ v_i &= v_{i-1} \cos \beta_i + d_{i-1} \dot{\theta}_{i-1} \sin \beta_i, \quad \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i &= v_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i = \frac{1}{f_i} (v_{i-1} \sin \beta_i - d_{i-1} \dot{\theta}_{i-1} \cos \beta_i), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

容易看出, $\{x_i, y_i, \theta_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ 均是独立变量组, 可作为拖车移动机器人系统的状态变量.

收稿日期 2009-08-24 录用日期 2009-12-10
Manuscript received August 24, 2009; accepted December 10, 2009

国家自然科学基金 (60874012) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60874012)

1. 北京航空航天大学自动化学院第七研究室 北京 100083 2. 北京化工大学北方学院教务处 三河 065201 3. 北京化工大学北方学院信息学院 三河 065201

1. The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083 2. Academic Affairs Office, Northern College, Beijing University of Chemical Technology, Sanhe 065201 3. School of Informatics, Northern College, Beijing University of Chemical Technology, Sanhe 065201

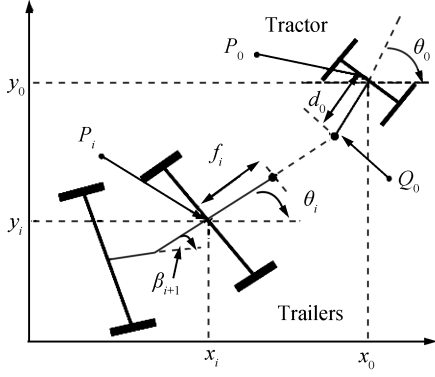


图 1 离轴式带拖车移动机器人示意图

Fig. 1 A diagram of tractor-trailers with off-axis hitching

由式 (1) 可以得到正向运动学速度递推关系

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = D_i \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$D_i = \prod_{j=i}^1 H_j \quad (3)$$

$$H_j = \begin{bmatrix} \cos \beta_j & d_{j-1} \sin \beta_j \\ \frac{1}{f_j} \sin \beta_j & -\frac{d_{j-1}}{f_j} \cos \beta_j \end{bmatrix}$$

相应地, 由式 (3) 可以得到逆向运动学关系为

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = D_i^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$D_i^{-1} = \prod_{j=1}^i H_j^{-1} \quad (5)$$

$$H_j^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta_j & f_j \sin \beta_j \\ \frac{\sin \beta_j}{d_{j-1}} & -f_j \frac{\cos \beta_j}{d_{j-1}} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

由 $\dot{x}_i = v_i \cos \theta_i$, $\dot{y}_i = v_i \sin \theta_i$, $\dot{\theta}_i = \omega_i$ 及式 (2) 和式 (4) 可以得到状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D_i \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\beta}_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{f_j} \sin \beta_j & 1 + \frac{d_{j-1}}{f_j} \cos \beta_j \end{bmatrix} D_{j-1} \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

为了简化控制器的设计, 我们以 (v_i, ω_i) 作为系统新的输入, 它和系统原输入 (v_0, ω_0) 存在以下关系

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = D_i \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = D_i^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

利用以上关系可以得到用新的控制输入 (v_i, ω_i) 表达的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{\beta}_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{f_j} \sin \beta_j & 1 + \frac{d_{j-1}}{f_j} \cos \beta_j \end{bmatrix} D_{j-1} D_i^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix},$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

1.2 路径跟踪问题及其数学描述

假定期望几何路径为 $y_{id} = f(x_i)$, 车体 i 的期望运动线速度为 $v_d(t) \geq a$ (a 为正常数). 定义路径跟踪误差 $e_i = y_i - f(x_i)$, 则拖车移动机器人的路径跟踪控制问题可以叙述如下:

1) 前进路径跟踪控制问题 (Forward path following, FPF). 设计控制律 $v_i(\cdot)$, $\omega_i(\cdot)$ 使得系统 (8) 的状态满足: $\dot{x}_i = v_d(t)$, $(y_i, \theta_i, \beta_1, \dots, \beta_n)$ 有界和最终一致有界, 且跟踪误差的模 $|e_i|$ 尽量小或趋于零.

2) 后退路径跟踪控制问题 (Backward path following, BPF). 设计控制律 $v_i(\cdot)$, $\omega_i(\cdot)$ 使得系统 (8) 的状态满足: $\dot{x}_i = -v_d(t)$, $(y_i, \theta_i, \beta_1, \dots, \beta_n)$ 有界和最终一致有界, 且跟踪误差的模 $|e_i|$ 尽量小或趋于零.

2 时间-状态线性化模型及其能控性

以 $\{y_i, \theta_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}$ 作为时间-状态模型的第一部分状态, x_i 作为时间-状态模型的第二部分状态 (同时也是第一部分的时间量程), 可以得到时间状态模型^[13] 为

$$y_i' = \tan \theta_i, \quad \theta_i' = \frac{1}{\cos \theta_i} u_i,$$

$$\beta_j' = \frac{\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{f_j} \sin \beta_j & 1 + \frac{d_{j-1}}{f_j} \cos \beta_j \end{bmatrix} D_{j-1} D_i^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ u_i \end{bmatrix} \right)}{\cos \theta_i},$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{x}_i = v_i \cos \theta_i \quad (9)$$

其中, $\xi' = \frac{d\xi}{dx_i}$, $u_i = \frac{\omega_i}{v_i}$.

经过计算,可以得到式 (9) 中的状态控制部分在原点附近的线性化模型为

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx_i} = AX + bu_i \\ Y = y_i = cX \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$X = [y_i \ \theta_i \ \beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & k_{23} & k_{24} & \cdots & k_{2(i-1)} & k_{2i} \\ 0 & \frac{1}{d_2} & k_{34} & \cdots & k_{3(i-1)} & k_{3i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \cdots & k_{4(i-1)} & k_{4i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{i-2}} & k_{(i-1)i} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_{i-1}} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{f_{i+1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{k}_{(i+2)(i+1)} & \frac{-1}{f_{i+2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{k}_{(n-1)(i+1)} & \tilde{k}_{(n-1)(i+2)} & \cdots & \tilde{k}_{(n-1)(n-2)} & \frac{-1}{f_{n-1}} & 0 \\ \tilde{k}_{n(i+1)} & \tilde{k}_{n(i+2)} & \cdots & \tilde{k}_{n(n-2)} & \tilde{k}_{n(n-1)} & \frac{-1}{f_n} \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{i+1} \\ \tilde{g}_{i+2} \\ \vdots \\ \tilde{g}_n \end{bmatrix}$$

$$k_{lm} = \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) \frac{\prod_{s=l}^{m-1} f_s}{\prod_{s=l-1}^{m-1} d_s} (-1)^{l-m} \neq 0, \quad 2 \leq l \leq i-1$$

$$\tilde{k}_{lj} = \left(\frac{d_{j-1}}{f_j} + 1\right) \frac{\prod_{s=l}^{j-2} d_s}{\prod_{s=l}^{j-1} f_s} (-1)^{j-l-1} \neq 0, \quad i+2 \leq l \leq n$$

$$g_l = \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) (-1)^{i-l-1} \frac{\prod_{k=l}^{i-1} f_k}{\prod_{k=l-1}^{i-1} d_k} \neq 0, \quad 0 \leq l \leq i-1$$

$$g_i = -\left(\frac{f_i}{d_{i-1}} + 1\right)$$

$$g_{i+1} = -\frac{d_i}{f_{i+1}}$$

$$\tilde{g}_j = \left(\frac{d_{j-1}}{f_j} + 1\right) (-1)^{j-i-1} \frac{\prod_{l=i}^{j-2} d_l}{\prod_{l=i+1}^{j-1} f_l} \neq 0, \quad i+2 \leq j \leq n$$

引理 1. 若 $\{A_j, b_j\}$ ($j = 1, 2, 3$) 为能控对, 且 A_j ($j = 1, 2, 3$) 的特征值互不相同, 则 $\left\{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right\}$ 也为能控对. 其中, A_i 为 $n_j \times n_j$ 矩阵, b_j 为 $n_j \times 1$ 列向量.

证明. 由能控性特征值判据, 只需要证明对于 A_j ($j = 1, 2, 3$) 的任意特征值 s , 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & sI - A_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & sI - A_3 & b_3 \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + n_3$$

若 s 等于 A_1 的某个特征值, 则 $sI - A_2, sI - A_3$ 均为非奇异阵. 再由 $\{A_1, b_1\}$ 能控知, $\text{rank}[sI - A_1 \ 0 \ 0 \ b_1] = n_1$, 因此

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & sI - A_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & sI - A_3 & b_3 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & sI - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sI - A_3 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + n_3$$

当 s 等于 A_2, A_3 的某个特征值时, 同理可证. \square

应用引理 1, 对时间-状态线性化模型 (10) 有以下结论.

结论 1. $\{A, b\}$ 为能控对.

证明. 由于 A_i ($i = 1, 2, 3$) 的特征值分别为 $(0, 0)$, $1/d_l$ ($0 \leq l \leq i-1$), $-1/f_j$ ($i+1 \leq j \leq n$), 因此 A_i 之间没有相同的特征值. 根据引理 1, 只需要证明 $\{A_j, b_j\}$ ($j = 1, 2, 3$) 为能控对即可.

首先, 当 s 等于 A_1 的特征值 $(0, 0)$ 时, 有: $\text{rank}[sI - A_1 \quad b_1] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$, 因此 $\{A_1, b_1\}$ 为能控对.

其次, 当 s 等于 A_2 的特征值 $1/d_l$ ($0 \leq l \leq i-1$) 时, 由于

$$\begin{aligned} \frac{k_{(l+1)p}}{k_{lp}} &= \frac{\prod_{s=l+1}^{l+p-1} f_s}{\prod_{s=l+1-1}^{l+p-1} d_s} (-1)^{l+1-l-p} \left(1 + \frac{d_{l+1-1}}{f_{l+1}}\right) \\ &= \frac{\prod_{s=l}^{l+p-1} f_s}{\prod_{s=l-1}^{l+p-1} d_s} (-1)^{l-l-p} \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) \\ &= \frac{d_{l-1} \left(1 + \frac{d_l}{f_{l+1}}\right)}{f_l \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right)} = h_{l(l+1)} \\ \frac{g_{l+1}}{g_l} &= \frac{\prod_{k=l+1}^{i-1} f_k}{\prod_{k=l}^{i-1} d_k} \left(1 + \frac{d_1}{f_{l+1}}\right) (-1)^{i-l-2} \\ &= \frac{\prod_{k=l}^{i-1} f_k}{\prod_{k=l-1}^{i-1} d_k} \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) (-1)^{i-l-1} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{d_1}{f_{l+1}}\right) d_{l-1}}{\left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) f_l} = h_{l(l+1)}, \end{aligned} \quad 1 \leq l \leq i-2$$

因此, 对矩阵

$$[sI - A_2 \quad b_2] = \begin{bmatrix} s-d_1^{-1} & -k_{23} & -k_{24} & \cdots & -k_{2(i-1)} & -k_{2i} & g_1 \\ 0 & s-d_2^{-1} & -k_{34} & \cdots & -k_{3(i-1)} & -k_{3i} & g_2 \\ 0 & 0 & s-d_3^{-1} & \cdots & -k_{4(i-1)} & -k_{4i} & g_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s-d_{i-2}^{-1} & -k_{(i-1)i} & g_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s-d_{i-1}^{-1} & g_i \end{bmatrix}$$

进行变换可以得到

$$\text{rank}[sI - A_2 \quad b_2] =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s-\frac{1}{d_1} & -\hat{k}_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-\frac{1}{d_2} & -\hat{k}_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-\frac{1}{d_3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s-\frac{1}{d_{i-2}} & -\hat{k}_{(i-1)i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s-\frac{1}{d_{i-1}} & g_n \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} -\hat{k}_{l(l+1)} &= -k_{l(l+1)} - \left(s - \frac{1}{d_l}\right) \frac{g_l}{g_{l+1}} = \\ &= \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) \frac{f_l}{d_l d_{l-1}} - \left(s - \frac{1}{d_l}\right) \frac{-f_l \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right)}{d_{l-1} \left(1 + \frac{d_l}{f_{l+1}}\right)} = \\ &= f_l \left(1 + \frac{d_{l-1}}{f_l}\right) \left\{ \frac{f_{l+1} d_l s + d_l}{d_{l-1} (f_{l+1} + d_l) d_l} \right\}, \end{aligned} \quad 1 \leq l \leq i-1$$

由于 $s > 0$, 所以 $\hat{k}_{l(l+1)} \neq 0$, 从而 $\text{rank}[sI - A_2 \quad b_2] = i$, 因此 $\{A_2, b_2\}$ 为能控对.

同理可证 $\{A_3, b_3\}$ 为能控对, 因此由引理 1 知 $\{A, b\}$ 为能控对. \square

3 基于内模原理的路径跟踪控制器设计和分析

3.1 基于内模原理的控制器设计

本节基于拖车的时间-状态线性化模型和期望几何路径的信号模型, 借鉴线性系统的内模原理设计动态线性反馈控制器, 以保证离轴式拖车移动机器人第 i 节车体的轮轴中心跟踪期望的几何路径. 记

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad z_1 = e_i = y_i - f(x_i) \\ z_2 &= [\theta_i, \beta_1, \cdots, \beta_n]^T \end{aligned}$$

注意到式 (9) 右端不含 y_i , 因此可将系统 (9) 在状态 z 下表示为

$$z' = Az + R_1(z_2) + (b + R_2(z_2))u_i - b_w f'(x_i) \quad (11)$$

其中, $b_w = [1, 0, \cdots, 0]^T$, $R_1(z_2), R_2(z_2)$ 为线性化余项. 在 $z_2 = 0$ 的邻域内, 有 $\|R_1(z_2)\| \leq r_1 \|z_2\|^3$, $\|R_2(z_2)\| \leq r_2 \|z_2\|^2$, r_1, r_2 为正常数.

忽略 R_1, R_2 可以得到式 (11) 的近似线性化系统为

$$z' = Az + b u_i + b_w f'(x_i) \quad (12)$$

进一步假定 $f'(x_i)$ 为如下线性时不变系统的输出, 即

$$w' = A_w w, \quad f'(x) = c_w w \quad (13)$$

在外部信号 $f'(x_i)$ 的作用下, 为了保证系统 (12) 的输出: $z_1 = e_i = y_i - f(x_i) = cz_1$ 渐近趋于零, 可以根据线性系统内模原理在伺服补偿器中植入 $f'(x_i)$ 的模型 (13).

首先考虑 $x_i \rightarrow \infty$ (前进跟踪) 的情况.

路径跟踪控制器具有以下动态反馈的形式:

$$u_i = -K_1 X - K_2 x_c, \quad x'_c = A_w x_c - b_c z_1 \quad (14)$$

其中, $b_c = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$, K_1, K_2 为待选反馈系数.

闭环系统 (12) 和 (13) 可以写为

$$\begin{bmatrix} z' \\ x'_c \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_w \\ 0 \end{bmatrix} f'(x_i) \quad (15)$$

其中, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A-bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix}$.

对于系统 (15), 只要存在 K_1, K_2 使得矩阵 \tilde{A} 为 Hurwitz 阵, 则系统 (15) 的输出 z_1 渐近趋于零, 从而实现对期望输出信号 $f(x_i)$ 的渐近跟踪.

存在 K_1, K_2 使得 \tilde{A} 的极点具有负实部的充分必要条件是 $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 可镇定, 充分条件为 $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 能控. 而 $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 能控的一个充分条件是^[14]:

1) $\{A, b\}$ 能控;

2) 对于 A_w 的每一个特征值 λ_w 有 $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_w - A & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} = \dim(A) + \dim(y) = n + 2 + 1 = n + 3$;

3) $\dim(u_1) \geq \dim(y_i)$.

由于 $\dim(u_1) = \dim(y_i) = 1$, 因此条件 3) 显然满足; 由引理 1 知, 条件 1) 成立. 以下证明条件 2) 也成立.

结论 2. 对任意 λ_w 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} (\lambda_w I - A) & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} = n + 3$$

证明. 由 $\{A, b\}$ 能控知, 对于任意 λ_w , 以上矩阵的前 $n + 2$ 行线性无关. 另外容易看出, 上述矩阵的最后一行与前 $n + 2$ 行线性无关, 因此 $\text{rank} \begin{bmatrix} (\lambda_w I - A) & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} = n + 3$. \square

由引理 1 和结论 2 知, 必然存在 K_1, K_2 使得 \tilde{A} 的极点配置到任意位置, 因此当 $x_i \rightarrow \infty$ 时, 只要选取 K_1, K_2 使得 \tilde{A} 为 Hurwitz 矩阵, 就可以保证线性化系统对期望路径信号的渐近跟踪.

对于 $x_i \rightarrow -\infty$ 的情况, 以 $-x_i$ 为时间变量得到闭环系统的方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{dz}{d(-x_i)} \\ \frac{dx_c}{d(-x_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A + bK_1 & bK_2 \\ b_c c & -A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_w \\ 0 \end{bmatrix} f'(x_i)$$

根据以上类似的讨论知, 只要选取 K_1, K_2 使得 $\begin{bmatrix} -A + bK_1 & bK_2 \\ b_c c & -A_w \end{bmatrix}$ 为 Hurwitz 矩阵, 就可以保证线性化系统对期望路径信号的渐近跟踪.

3.2 跟踪误差有界性分析

根据内模原理所设计的路径跟踪控制器虽然可以保证 $x_i \rightarrow \pm\infty$ 时, 线性化时间-状态模型的输出 y_i 渐近跟踪线性化信号模型的输出 $f(x_i)$, 但是对于原非线性系统却并非如此, 还需要进一步的分析.

将控制律 (14) 代入式 (11), 得到闭环方程为

$$\begin{aligned} z' &= Az + R_1(z_2) + (b + R_2(z_2))(-K_1 z - K_2 x_c) - \\ & b_w f'(x_i) = \\ & Az - bK_1 z - bK_2 x_c + R(z_2, x_c) - b_w f'(x_i) \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $R(z, x_c) = R_1(z_2) - R_2(z_2)(K_1 z + K_2 x_c)$ 为关于 (z_2, x_c) 的三阶无穷小量.

结合 x_c 的方程得到闭环系统:

$$\begin{bmatrix} z' \\ x'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R(z, x_c) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_w \\ 0 \end{bmatrix} f'(x_i) \quad (17)$$

显然, 系统

$$\begin{bmatrix} z' \\ x'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R(z, x_c) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

局部指数稳定, 假定其吸引区的一个估计为 $\{(z, x_c) : \|[z, x_c]^T\| \leq r\}$, 其中 r 为正常数, 则对系统 (17) 有以下结果.

结论 3. 当 $\dot{x}_i > 0$, $x_i \rightarrow \infty$ 时, 存在充分小的与 r 有关的正数 ε , 使得当 $|f'(x_i)| \leq \varepsilon$, $\|[z(0), x_c(0)]^T\| \leq r$ 时, 系统 (17) 的状态和跟踪误差最终一致有界, 且跟踪误差的最终一致界正比于 ε^3 , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1| \propto \varepsilon^3$, 其中 K_1, K_2 使得 $\begin{bmatrix} A - bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix}$ 为 Hurwitz 矩阵.

证明. 由于系统 (18) 局部指数稳定, 因此根据指数稳定扰动系统的有关结果 (参见文献 [15] 第九章引理 9.2), 当 ε 充分小时, 系统 (17) 的状态 (z, x_c) 一致有界和最终一致有界, 且最终一致的界正比于 ε (扰动界).

以下进一步分析跟踪误差的界。

将系统 (17) 作为标称线性系统 $\begin{bmatrix} z' \\ x'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix}$ 在扰动 $R(z, x_c), f'(x_i)$ 作用下的扰动系统. 对于输出 $z_1 = y_i - f'(x_i)$ 应用叠加原理可知, $z_1 = z_{11} + z_{12}$, 其中 z_{11}, z_{12} 分别为以下系统的输出.

$$S_1: \begin{bmatrix} z' \\ x'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_w \\ 0 \end{bmatrix} f'(x_i), \quad z_{11} = z_1 \quad (19)$$

$$S_2: \begin{bmatrix} z' \\ x'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-bK_1 & -bK_2 \\ -b_c c & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R(z, x_c) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_{12} = z_1 \quad (20)$$

对系统 S_1 , 由内模原理可知 $\lim_{x_i \rightarrow \infty} z_{11} = 0$, 因此 z_{11} 的最终一致界为任意小正数; 对系统 S_2 , 由于 $R(z, x_c)$ 的最终一致界正比于 ε^3 , 因此 z_{12} 的最终一致界也正比于 ε^3 , 从而 z_1 的最终一致界正比于 ε^3 . \square

对于后退路径跟踪的情况, 可以得到同样结果.

结论 4. 当 $\dot{x}_i < 0, x_i \rightarrow -\infty$ 时, 存在充分小的正数 ε , 使得当 $|f'(x_i)| \leq \varepsilon, \|[z(0), x_c(0)]^T\| \leq r$ 时, 系统 (17) 的状态和跟踪误差最终一致有界, 且跟踪误差的模渐近正比于 ε^3 , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1| \propto \varepsilon^3$, 其中 K_1, K_2 使得 $\begin{bmatrix} -A+bK_1 & bK_2 \\ b_c c & -A_w \end{bmatrix}$ 为 Hurwitz 矩阵.

证明. 类同定理 1, 略. \square

注 1. 为了保证前进运动时, 即 $v_i > 0$ 时, $x_i \rightarrow \infty, \dot{x}_i = v_d(t) > 0$, 应选取 v_i 为 $v_i = \frac{1}{\cos \theta_i} v_d(t)$; 同理, 为了保证后退运动时, 即 $v_i < 0$ 时, $x_i \rightarrow -\infty, \dot{x}_i = -v_d(t) < 0$, 应选取 v_i 为 $v_i = -\frac{1}{\cos \theta_i} v_d(t)$.

注 2. 根据输入变换关系 $u_i = \frac{\omega_i}{v_i}, \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = A_i \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$, 可以求出原始控制为

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = D_i^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = D_i^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ u_i v_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

4 算例与仿真

本节针对带两节离轴式拖车的移动机器人系统, 利用 Matlab 软件对所得到的路径跟踪控制律进行仿真验证.

假定第一节拖车轮轴中心需要跟踪期望几何路径 $y_{1d} = 1 + \sin(0.5x_1)$, 则可以得到 $y'_{1d} = 0.5 \cos(0.5x_1)$, 因此信号模型为 $w'_1 = w_2, w'_2 =$

$-0.5^2 w_1$. 拖车移动机器人的初始状态为 $(x_1, y_1, \theta_1, \beta_1, \beta_2)(0) = (0, -2, 0, 0, 0)$ m, 几何参数为 $f_1 = f_2 = d_0 = d_1 = 1$ m, 第一节拖车的期望运动速度为 $v_d = 1$ m/s, 信号模型的初始状态为 $(0, 0)$. 给定期望极点 $-0.08 \times (10, 9, 8, 7, 6, 5)$, 计算得到的前进和后退跟踪时的控制器参数分别为 $[K_1, K_2] = [-0.4719, -2.9637, -3.2824, -0.0006, -0.0783, -0.3219]$ 和 $[K_1, K_2] = [-0.4719, 2.9637, -0.0006, -3.2824, -0.0783, 0.3219]$.

拖车移动机器人第一节拖车前进和后退跟踪期望几何路径的仿真结果如图 2 和图 3 所示, 其中图 2 和图 3 中的第一个小图为第一节拖车的期望和实际几何运动轨迹, 其他五个小图为各个状态随时间的变化轨迹. 可以看出, 本文所提出的控制算法可以保证第一节拖车很好地跟踪期望的几何路径, 同时保持各车体连杆之间的夹角有界.

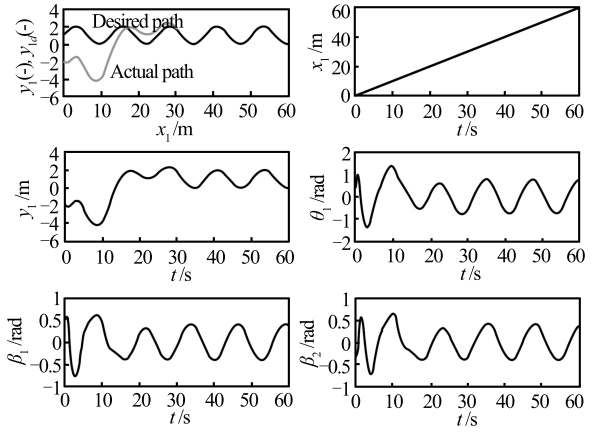


图 2 第一节拖车前进跟踪几何路径 $y_{1d} = 1 + \sin 0.5x_1$
Fig. 2 The first trailer tracking geometric path forward
 $y_{1d} = 1 + \sin 0.5x_1$

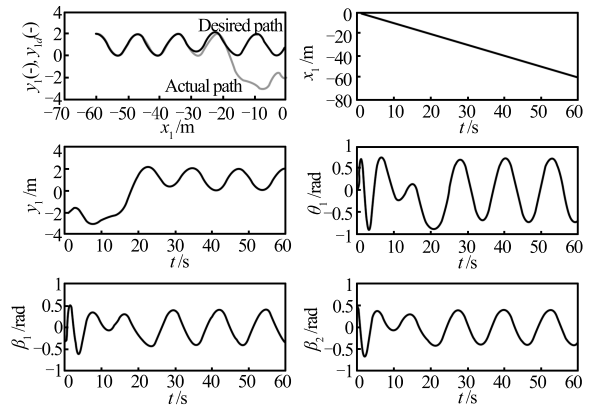


图 3 第一节拖车后退跟踪几何路径 $y_{1d} = 1 + \sin 0.5x_1$
Fig. 3 The first trailer tracking geometric path backward
 $y_{1d} = 1 + \sin 0.5x_1$

5 结论

对于一般离轴式拖车移动机器人系统, 本文研究了其任意一节车体跟踪某一类几何路径的控制问题. 首先推导出系统的时间-状态线性化模型, 并证明了模型的能控性; 然后借鉴内模原理设计了一种线性动态反馈控制律. 理论分析表明, 所设计的控制律可以保证系统状态和跟踪误差有界且最终一致有界, 且跟踪误差的最终一致界正比于期望几何路径函数变化率的模立方. 相对于非线性输出调节控制器, 所设计的控制器不需要计算对应期望输出的状态轨迹精确解析解或近似解; 而且对期望路径函数 $f(x_i)$ 结构特性以外的参数变化具有鲁棒性 (例如, 对于常值函数, 不需要知道函数值的大小, 对于正弦函数, 只需要知道函数的频率, 而不需要知道函数的幅值和相位). 其主要缺点是只考虑了对某一类几何路径的跟踪问题, 且不能实现渐近跟踪, 因此还需要进一步的改进和完善.

References

- Sordalen O J. Conversion of the kinematics of a car with n trailers into a chained form. In: Proceedings of the Conference on Robotics and Automation. Atlanta, USA: IEEE, 1993. 382–387
- Nakamura Y, Ezaki H, Tan Y, Chung W. Design of steering mechanism and control of nonholonomic trailer systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, **17**(3): 367–374
- Deligiannis V, Davrazos G, Manesis S, Arampatzis T. Flatness conservation in the n -trailer system equipped with a sliding kingpin mechanism. *Journal of Intelligent and Robot Systems*, 2006, **46**(2): 151–162
- Sordalen O J, Wichlund K Y. Exponential stabilization of car with n trailers. In: Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control. San Antonio, USA: IEEE, 1993. 978–983
- Vendittelli M, Oriolo G. Stabilization of the general two-trailer system. In: Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Francisco, USA: IEEE, 2000. 1817–1823
- He Zhan-Bin. Research of Stabilization and Path Following Control of Tractor-Trailers with Offaxle Hitching [Master dissertation], Beihang University, China, 2006 (何战斌. 离轴式拖车移动机器人系统的镇定和路径跟踪 [硕士学位论文], 北京航空航天大学, 中国, 2006)
- DeSantis R M, Bourgeot J M, Todeschi J N, Hurteau R. Path-tracking for tractor-trailers with hitching of both the on-axle and the off-axle kind. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control. Vancouver, Canada: IEEE, 2002. 206–211
- Altafini C. Following a path of varying curvature as an output regulation problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(9): 1551–1556
- Astolfi A, Bolzern P, Locatelli A. Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, **20**(1): 154–160
- Park M, Chung W, Kim M, Song J. Control of a mobile robot with passive multiple trailers. In: Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation. New Orleans, USA: IEEE, 2004. 4369–4374
- Huo W, Cheng Z. Backward path following control of mobile robot with trailers. In: Proceedings of the 25th Chinese Control Conference. Harbin, China: IEEE, 2006. 1573–1578
- Yuan J, Huang Y, Sun F, Kang Y. Optimization design for connection relation of tractor-trailer mobile robot with variable structure. In: Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, China: IEEE, 2006. 4971–4976
- Sampei M. A control strategy for a class of nonholonomic systems. In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, USA: IEEE, 1994. 1120–1121
- Zheng Da-Zhong. *Linear System Theory (Second Edition)*. Beijing: Tsinghua University Press, 1990 (郑大钟. 线性系统理论 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 1990)
- Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007



周火凤 北京航空航天大学博士研究生. 主要研究方向为非线性系统控制. 本文通信作者.

E-mail: ylzhou_2008@163.com

(ZHOU Huo-Feng Ph.D. candidate at Beijing University of Aeronautics and Astronautics. Her main research interest is nonlinear system control. Corresponding author of this paper.)



马保离 北京航空航天大学教授. 主要研究方向为非线性系统控制.

E-mail: mabaoli@buaa.edu.cn

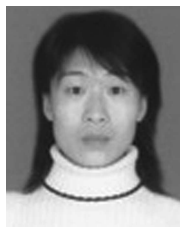
(MA Bao-Li Professor at Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His main research interest is nonlinear system control.)



宋丽辉 北京化工大学北方学院助教. 主要研究方向为计算机科学与技术.

E-mail: huihuisong413@sina.com

(SONG Li-Hui Assistant at Northern College, Beijing University of Chemical Technology. Her main research interest is computer science and technology.)



张芳芳 北京化工大学北方学院助教. 主要研究方向为信号与信息处理.

E-mail: zff1223@163.com

(ZHANG Fang-Fang Assistant at Northern College, Beijing University of Chemical Technology. Her research interest covers signal and information processing.)