

# 基于前向后向算子分裂的稀疏性正则化图像超分辨率算法

孙玉宝<sup>1,2</sup> 费选<sup>1</sup> 韦志辉<sup>1</sup> 肖亮<sup>1</sup>

**摘要** 提出了一种新的基于稀疏表示正则化的多帧图像超分辨凸变分模型, 模型中的正则项刻画了理想图像在框架系统下的稀疏性先验, 保真项度量其在退化模型下与观测信号的一致性, 同时分析了最优解条件. 进一步, 基于前向后向算子分裂法提出了求解该模型的不动点迭代数值算法, 每一次迭代分解为仅对保真项的前向(显式)步与仅对正则项的后向(隐式)步, 从而大幅度降低了计算复杂性; 分析了算法的收敛性, 并采取序贯策略提高收敛速度. 针对可见光与红外图像序列进行了数值仿真, 实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性.

**关键词** 超分辨率, 稀疏表示, 前向后向分裂算法, 邻近算子, 阈值收缩

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.01232

## Sparsity Regularized Image Super-resolution Model via Forward-backward Operator Splitting Method

SUN Yu-Bao<sup>1,2</sup> FEI Xuan<sup>1</sup> WEI Zhi-Hui<sup>1</sup> XIAO Liang<sup>1</sup>

**Abstract** A convex variational model is proposed for multi-frame image super-resolution with sparse representation regularization. The regularization term constrains the underlying image to have a sparse representation in a proper frame. The fidelity term restricts the consistency with the measured image in terms of the data degradation model. The characters of the optimal solution to the model are analyzed. Furthermore, a fixed-point numerical iteration algorithm is proposed to solve this convex variational problem based on the proximal forward-backward splitting method for monotone operator. At every iteration, the forward (explicit) gradient step for the fidelity term and the backward (implicit) step for regularization term are activated separately, thus complexity is decreased rapidly. The convergence of the numerical algorithm is studied and a continuation strategy is exploited to accelerate the convergence speed. Numerical results for optics and infrared images are presented to demonstrate that our super-resolution model and numerical algorithm are both effective.

**Key words** Super-resolution, sparse representation, forward-backward splitting, proximal operator, threshold shrinkage

红外、可见光等成像系统获取数字图像是一个相对复杂的过程, 受到诸如运动变形、光学模糊、低采样率、随机噪声等多种退化因素的影响, 捕获的往往是低分辨率退化图像, 不能满足科学研究与工程实践的需要. 超分辨率 (Super-resolution, SR) 重建是一种由低分辨率 (Low-resolution, LR) 退化图像序列重建一幅 (或序列) 高分辨率 (High-resolution, HR) 清晰图像的二代复原技术<sup>[1]</sup>, 在红外成像、遥

感、医学成像、层析成像等诸多领域具有广泛的应用前景. SR 重建涉及图像配准、运动估计、去噪、恢复、图像建模等多种图像处理任务, 是当前国际上图像处理、计算机视觉等多学科领域众多研究者关注的热点问题. 从数学角度看, SR 重建为 Hardmard 意义下的不适定反问题, 需要采用正则化理论进行求解, 在此框架下正则项的设计是一个关键问题, 在图像处理中体现为图像建模理论的研究, 图像模型的合理选择与设计直接决定着 SR 重建图像的质量. 从图像函数空间建模角度看, 当取 Tikhonov 正则项时, 目标函数为二次的, 较为容易求解, 但会模糊恢复图像中的边缘、纹理等重要几何结构. 为了保持恢复图像的边缘结构, 在图像建模理论中广泛研究的全变分 (Total variation, TV) 模型<sup>[2]</sup> 在 SR 重建领域也获得了高度重视. 2000 年, Capel 等<sup>[3]</sup> 提出基于该模型的文本图像超分辨率重建算法, 但是全变差模型仍存在阶梯效应以及小尺度结构磨光等缺点. 同时由于 TV 正则项为不可微的非线性泛函, 当前通常采用梯度下降法求解, 收敛速度慢且对时间步长的选择也较为敏感, 数值复杂度较高<sup>[4]</sup>. 如何设计既能够保持边缘、轮廓等几何结构又具有较低

收稿日期 2009-05-25 录用日期 2010-01-13  
Manuscript received May 25, 2009; accepted January 13, 2010  
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA12Z142), 国家自然科学基金 (60672074, 60802039), 江苏省研究生创新基金资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA12Z142), National Natural Science Foundation of China (60672074, 60802039), and Graduate Innovation Foundation of Jiangsu Province

1. 南京理工大学计算机科学与技术学院模式识别与智能系统 南京 210094 2. 中国人民解放军总参谋部第六十研究所三维仿真实验室 南京 210016

1. Department of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. Laboratory of Three Dimensional Simulation, 60th Research Institute of General Staff Department, Chinese People's Liberation Army, Nanjing 210016

数值计算复杂度的多幅图像超分辨算法是当前该领域有待解决的难点问题。

稀疏表示理论认为自然图像在合适的过完备字典下总存在稀疏的表示, 即: 大部分表示系数为零, 只有少数的非零大系数. 图像稀疏表示模型能够刻画图像的内在结构和先验属性, 在图像去噪、去模糊、压缩感知等反问题中已经得到了广泛的应用, 并且都获得了出色的实验结果<sup>[5-7]</sup>. 因而本文提出了一种新的基于稀疏表示正则化的多帧图像超分辨凸变分模型, 模型中的正则项刻画了理想图像在框架字典下的稀疏性先验约束, 保真项度量其在退化模型下与观测信号的一致性, 同时分析了该模型解最优解条件. 前向后向算子分裂法 (Forward backward splitting, FBS) 采取一种分而治之的策略, 能够将复杂问题分解为一系列简单子问题的迭代求解, 是凸分析中一种经典而有效的优化算法, 具有很好的收敛性. 当前该数值优化算法在图像处理中得到了广泛的应用<sup>[8]</sup>. 因此, 本文基于前向后向算子分裂法提出了求解该模型的不动点迭代数值算法, 每一次迭代分解为仅对保真项的前向 (显式) 步与仅对正则项的后向 (隐式) 步, 从而可大幅度降低超分辨重建的计算复杂性; 分析了该算法的收敛性, 并采取序贯策略 (Continuation method) 进一步提高算法的收敛速度. 针对可见光与红外图像序列进行了数值仿真, 实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性, 同全变差图像模型相比, 能够更加有效地保持恢复图像的边缘、轮廓等几何结构.

## 1 稀疏性正则化的超分辨重建模型

### 1.1 SR 重建数据观测模型

在设计 SR 算法前, 首先需要建立观测数据与理想数据间的退化模型, 准确的退化建模对 SR 重建至关重要. 假设给定包含  $K$  帧大小为  $n_1 \times n_2$  的 LR 退化图像序列  $\{g_k | k = 1, \dots, K\}$ , 超分辨率的任务是重建一幅大小为  $q_1 n_1 \times q_2 n_2$  的高分辨率清晰图像  $u$ , 其中  $q_1, q_2$  分别为水平方向和垂直方向的分辨率提高因子. 记  $L = n_1 n_2, N = q_1 n_1 q_2 n_2$ , 退化模型采用矩阵-向量表达如下:

$$g_k = D_k B_k F_k u + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

其中,  $g_k \in \mathbf{R}^L$  表示第  $k$  帧低分辨率图像,  $u \in \mathbf{R}^N$  表示原始的高分辨率清晰图像,  $v_k \in \mathbf{R}^L$  表示加性随机噪声,  $F_k \in \mathbf{R}^{N \times N}$  表示  $g_k$  相对  $u$  的运动变形矩阵,  $B_k \in \mathbf{R}^{N \times N}$  表示光学模糊矩阵,  $D_k \in \mathbf{R}^{L \times N}$  为下采样矩阵. 令  $H_k = D_k B_k F_k$ ,  $H_k$  为  $\mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^L$  的有界线性算子, 则式 (1) 可简写为

$$g_k = H_k u + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

### 1.2 图像稀疏表示模型

图像稀疏表示是一个新兴的图像模型, 在这个模型中, 将图像信号  $u \in \mathbf{R}^N$  表示为一组原子  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  的线性组合:

$$u = \Phi \alpha \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{I} = \{1, \dots, I\}$  ( $I \in \mathbf{N}$ ) 为原子参数指标集 (为有限集合),  $\Phi \in \mathbf{R}^{N \times I}$  为所有原子作为列向量组合而成的字典矩阵. 当  $I > N$  时  $\Phi$  是过完备的冗余字典, 表示方式并不唯一, 期望从中选择稀疏的表示系数  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}}$ , 即只有很少的为非零元素,  $\|\alpha\|_0 \ll n$ , 从而对图像  $u$  形成稀疏表示.

传统地, 通常采用傅里叶字典、DCT 以及小波字典等非冗余的正交系统对图像形成表示, 现代计算调和研究表明, 当  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  为过完备框架系统时, 能够对图像形成更为稀疏的表示. 框架系数  $\alpha = Ux$  确定信号  $x$  的一个完全且稳定的信号表示, 其中  $U$  为框架算子, 它是单射的有界线性算子, 定义为:

$$U : H \rightarrow l^2(\mathbf{I}) : x \mapsto (\langle x, \phi_i \rangle)_{i \in \mathbf{I}} \quad (4)$$

其共轭算子  $U^*$  为满射的有界线性算子, 如下:

$$U^* : l^2(\mathbf{I}) \rightarrow H : (\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}} \mapsto \sum_{i \in \mathbf{I}} \alpha_i \phi_i \quad (5)$$

当  $A = B = C$  时,  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  为紧框架, 满足  $UU^* = cId, Id$  为单位算子. 当前存在许多紧框架系统, 如由两组正交小波基级联的实对偶树小波分解可构成  $L^2(\mathbf{R}^2)$  空间的框架. 此外非下采样小波、多尺度几何分析 (Curvelet、Contourlet 等) 也可构成空间  $L^2(\mathbf{R}^2)$  的紧框架.

图像的过完备稀疏表示使信号能量只集中于较少的原子, 具有非零系数的原子揭示了信号的主要特征与内在结构, 从而为几何结构保持的图像超分辨率重建奠定了良好的基础. 基于理想高分辨率图像在框架系统下的稀疏表示式 (3), 图像退化模型 (2) 可表示为

$$g_k = H_k U^* \alpha + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

### 1.3 超分辨重建模型

根据式 (6) 的数据退化模型, 为了重建高分辨率图像, 自然地可建立一个关于框架系数的变分问题, 对理想图像的先验约束转变为对框架系数的稀疏性约束. 当退化模型 (2) 中噪声  $v_k$  为独立同分布的高斯白噪声时, 根据正则化理论, 数学上稀疏

性正则化的超分辨率重建可建模为如下变分问题:

$$\tilde{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in l^2(\mathbf{I})} f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|H_k U^* \alpha - \mathbf{g}_k\|_2^2 + \lambda \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\alpha_i) \quad (7)$$

其中,  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  为稀疏性度量函数, 约束框架系数的稀疏性. 目标泛函 (7) 中综合了框架系数的稀疏性约束与在数据保真信息,  $\lambda$  为正则化参数, 权衡两项的作用. 最小化此能量泛函, 可恢复出高分辨率图像:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i \in \mathbf{I}} \tilde{\alpha}_i \phi_i \quad (8)$$

对上述的稀疏性正则化超分辨率模型 (Sparsity regularized super-resolution reconstruction, SRSR). 记所有下半连续凸函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow (-\infty, +\infty)$  组成的集合为  $\Gamma_0(\mathbf{R})$ , 此时模型 (7) 具有凸性, 具有全局最有解. 同时, 为了有效度量框架系数的稀疏性, 要求稀疏性惩罚函数满足下面的条件:  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  为偶对称的连续非负函数, 在  $[0, +\infty)$  上非递减, 且  $\phi_i(0) = 0$ . 但对其并无光滑性要求, 从而可选择更为广泛的稀疏性惩罚函数.

SRSR 模型中字典  $\Phi$  的选择是一个重要问题, 根本性的要求是  $\Phi$  要能对图像形成稀疏表示, 如果同时具备快速的分解与重建算法则可降低模型数值求解的复杂度. 紧框架系统通常具有快速的分解与重建算法, 在稀疏逼近性能、分解与重建复杂度间作出了较好的权衡. 第二代离散 Curvelet 紧框架是继小波变换之后, 更匹配图像属性的一种多尺度、多方向性变换, 能够有效地稀疏表示图像中的边缘与轮廓结构, 对于具有  $C^2$  阶曲线奇异性的光滑图像能够形成近似最优的逼近, 同时具有快速的变换算法, 对于  $n_1 \times n_2$  图像, 算法复杂度仅为  $N \log_2 N$  ( $N = n_1 \times n_2$ )<sup>[9]</sup>. 因此数值实验中选取 Curvelet 紧框架系统作为本文的稀疏表示字典.

## 2 SRSR 模型性质及其数值算法分析

### 2.1 SRSR 模型性质分析

在分析该 SRSR 模型特性之前, 先介绍邻近算子的概念. Moreau 于 1962 年将凸投影算子进行推广, 提出了邻近算子的概念. 令  $f \in \Gamma_0(\mathbf{H})$ ,  $\mathbf{H}$  为 Hilbert 空间, 给定  $\gamma > 0$ , 函数  $f$  的邻近算子定义为:

$$\text{prox}_{\gamma f}: H \rightarrow H: x \rightarrow \arg \min_{y \in \mathbf{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|_2^2 \quad (9)$$

当  $\gamma = 1$  时, 简记为  $\text{prox}_{\gamma f}$ .  $\text{prox}_{\gamma f}$  为上述变分的唯一解. 为了便于叙述, 针对上述的变分模型 (7), 令  $f_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|H_k U^* \alpha - \mathbf{g}_k\|_2^2$ ,  $f_2 = \lambda \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\alpha_i)$ , 定义函数  $\Psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|H_k \mathbf{u} - \mathbf{g}_k\|_2^2$ , 则  $f_1 = \Psi \circ U^*(\alpha)$ , “ $\circ$ ” 表示算子的复合操作. 下面分析模型 (7) 的最优解条件:

**定理 1 (最优解条件).** 设  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbf{I}} \in l^2(\mathbf{I})$ ,  $(\eta_i)_{i \in \mathbf{I}} = U \circ \nabla \Psi \circ U^*(\alpha)_{i \in \mathbf{I}}$ ,  $\gamma \in (0, +\infty)$ , 则

1)  $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}}$  为凸变分模型 (7) 的解当且仅当  $\forall i \in \mathbf{I}$ ,  $\alpha_i = \text{prox}_{\gamma, \lambda \varphi_i}(\alpha_i - \gamma \eta_i)$ ;

2) 如果序列  $\{\alpha^n\}$  遵循迭代公式:  $\alpha^{n+1} = \text{prox}_{\gamma, f_2}(\alpha^n - \gamma \eta^n)$ , 且  $\alpha^{n+1} = \alpha^n$ , 则  $\alpha^n$  为变分模型 (7) 的解;

**证明.** 定理 1 的详细证明过程参见附录 A.  $\square$

### 2.2 前向后向分裂算法及其收敛性分析

定理 1 中 2) 给出了用于数值求解变分问题 (7) 的不动点迭代格式, 该迭代公式即为前向后向算子分裂过程, 由两个分离的子步骤组成. 第 1 步为仅对  $f_1$  的前向步:

$$\alpha_i^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i^n - \gamma \eta_i, \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (10)$$

体现为对  $f_1$  的梯度下降操作; 第 2 步为仅对  $f_2$  的后向步:

$$\alpha_i^{n+1} = \text{prox}_{\gamma, \lambda \varphi_i}(\alpha_i^{n+\frac{1}{2}}), \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (11)$$

需要求解稀疏性度量函数的邻近算子. 从数值线性代数的角度看: 第 1 步是显式 (Explicit) 的迭代格式, 比较容易计算, 但对迭代步长具有严格的要求; 而第 2 步采用全隐式 (Implicit) 的迭代格式, 具有很好的收敛性, 通常情况下具有较高的计算复杂度. 算子分裂法是一个有效的折衷方法, 无需求解整个目标函数的邻近算子, 同时能够有效利用隐式方法的优点, 从而有效降低了本文 SRSR 算法的复杂度. 借助于前向后向算子分裂算法的一般性收敛性定理, 针对变分模型 (7), 下面分析本文不动点迭代数值算法的收敛性.

**定理 2 (收敛性定理).** 设凸变分模型 (7) 的最优解存在, 令  $T_k = H_k U^*$ ,  $\beta = \sum_{k=1}^m \|T_k^* T_k\|$ , 若  $0 < \inf_{n \geq 0} \gamma_n \leq \sup_{n \geq 0} \gamma_n < \frac{2}{\beta}$ , 则由如下迭代公式

$$(\alpha_i^{n+1})_{i \in \mathbf{I}} = (\text{prox}_{\gamma_n, \lambda \varphi_i}(\alpha_i^n - \gamma_n \eta_i^n))_{i \in \mathbf{I}} \quad (12)$$

产生的序列  $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbf{N}}$  能够收敛于模型 (7) 的某一最优解.

**证明.** 定理 2 的详细证明过程参见附录 B.  $\square$

实际问题中, 针对式 (11) 的后向步, 考虑式 (1) 的数据退化模型, 对于有界线性变换  $U$ , 只需对融合后的图像作一次变换即可, 当  $F_k$  为平移运动,  $B_k$  为

空间移不变的模糊退化情形时,  $F_k$  与  $B_k$  在周期边界条件下对应循环矩阵, 两者间的乘积具有可交换性, 从而有  $F_k^T B_k^T = B_k^T F_k^T$  以及  $B_k F_k = F_k B_k$  [10], 若每一帧 LR 图像的模糊算子  $B_k$  均相同, 统一记为  $B$ , 则式 (11) 可表示为

$$\alpha^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\gamma^n}{c} U B^T \sum_{k=1}^K F_k^T D^T (g_k - D F_k B U^* \alpha^n) + \alpha^n \quad (13)$$

使得每一次迭代只需做二次模糊操作, 可进一步降低卷积的运算次数。

前向后向算子分裂算法中的第二个子步式 (12) 中还需要确定稀疏性惩罚函数  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  的邻近算子. 对于某些特定函数, 其邻近算子存在解析表达式. 例如: 当稀疏性度量函数为  $l_1$  范数时对应的是逐个分量的软阈值操作:

$$\alpha_i^{n+1} = \text{sgn}(\alpha_i^{n+\frac{1}{2}}) \max\left(|\alpha_i^{n+\frac{1}{2}}| - \gamma_n \lambda, 0\right), i \in \mathbf{I} \quad (14)$$

可以看出: 计算  $l_1$  范数的邻近算子只具有线性复杂度, 从而每一步迭代的运算量主要由第一个梯度下降子步式 (13) 决定。

同时, 根据定理 1, 凸变分模型 (7) 的最优解条件蕴涵数值算法的收敛性判别标准. 因此本文设置一个适当的容许性常数  $\xi_{\text{stop}}$ , 当  $\|\alpha^{n+1} - \alpha^n\| \leq \xi_{\text{stop}}$  或  $\|\alpha^{n+1} - \alpha^n\| / \|\alpha^{n+1}\| \leq \xi_{\text{stop}}$  时, 即认为算法收敛, 停止迭代. 原则上本文算法的收敛性不依赖于初始迭代点  $\alpha^0$ , 既可选择零向量也可以选择某种近似解. 为了减少迭代次数, 本文选取如下最小二乘问题的解作为迭代算法的初始点:

$$\alpha^0 = \arg \min_{\alpha \in l^2(\mathbf{I})} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|H_k U^* \alpha - g_k\|_2^2 \quad (15)$$

对于本文的模型 (7), 退化矩阵  $H_k$  条件数通常很大. 当正则化参数  $\lambda$  值较大时, 由于正则项的作用可降低该问题的条件数, 从而加快数值算法的收敛速度, 但解与原模型解的误差较大. 因此综合考虑上述两方面, 本文采取 Lagrange 乘子的序贯方法, 起初使用较大的  $\lambda$ , 然后采取一定的策略逐渐地降低, 例如: 逐次缩小一倍. 同时在此过程中, 较大  $\lambda$  时模型 (8) 的近似最优解将作为较小正则化参数时的初始解, 如此循环执行, 直至达到问题模型中预先设定的  $\lambda$  值, 本文称之为序贯的前向后向算子分裂算法. 算法的伪代码如下:

**步骤 1.** 输入多帧的低分辨率图像  $\{g_k\}_{1 \leq k \leq K}$ , 设置正则化参数  $\lambda$ , 最优性参数  $\xi_{\text{stop}}$ ;

**步骤 2.** 选择初始迭代点  $\alpha^0$ ,  $n = 0$ , 设置序列  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_L = \lambda$ ;

**步骤 3.** For  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$

**步骤 4.** Do

**步骤 5.**  $\alpha^{n+1/2} = \alpha^n - \gamma \eta^n$

**步骤 6.**  $\alpha^{n+1} = \text{prox}_{\gamma_n, f_2} \alpha^{n+1/2}$

**步骤 7.**  $n = n + 1$

**步骤 8.** Until  $\|\alpha^{n+1} - \alpha^n\| / \|\alpha^{n+1}\| \leq \xi_{\text{stop}}$

**步骤 9.**  $\alpha^0 = \alpha^n$ ,  $n = 0$

**步骤 10.** End For;

**步骤 11.** 输出 SR 重建图像

### 3 实验结果与分析

下面通过一系列仿真实验来验证本文 SRSR 及其数值算法的有效性, 并与通过梯度下降法求解传统的基于 TV 模型超分辨重建<sup>[3]</sup> (Total variation super-resolution, TVSR) 在数值运算效率、恢复质量等方面进行比较分析. 将分别从复原图像的视觉效果、峰值信噪比 (Peak signal-to-noise ratio, PSNR) 和相对误差 (Relative error, ReErr) 方面来评价超分辨率复原算法的性能优劣。

仿真实验中, 选取第二代离散 Curvelet 变换作为本文 SRSR 模型中的稀疏表示框架, 采用  $l_1$  范数作为稀疏性度量标准. 根据退化模型 (1), 原始高分辨图像分别经过水平方向和垂直方向分别平移 1 ~ 4 个像素、标准方差为 0.5 的  $3 \times 3$  高斯模糊、4 倍率的下采样和方差为 5 的高斯白噪声退化后生成 9 帧低分辨率图像, 将其用作仿真实验的样本数据。

图 1 和图 2 分别展示了本文模型 SRSR 以及 TVSR 对原始高分辨图像 Women (图 1(a)), Infrared person (图 2(a)) 的 SR 重建结果. 实验中, 紧框架 Curvelet 进行 5 层变换, 2 ~ 4 层分解均为 16 个方向. 本文模型选取正则化参数  $\lambda = 32$ , 采取序贯的前向后向分裂数值算法, 具体的不动点迭代按式 (13) 与 (14) 执行, 同时在应用梯度下降法求解 TVSR 模型时, 取正则化参数  $\lambda = 32$ , 迭代步长  $\iota = 0.001$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ; 图 1(c) 和图 2(c) 列出了 TVSR 模型经 400 次梯度下降迭代后的重建图像, 图 1(d) 和图 2(d) 则给出了本文模型经算法 2 仅迭代 20 次后的重建图像. 从实验结果看, TV 模型超分辨重建尽管能够很好地保持图像中的大尺度边缘和轮廓结构, 但可以看出在平坦以及纹理区域产生了阶梯效应, 同时纹理结构等小尺度损失严重. 然而本文算法在重建大尺度局部几何结构的同时, 能够更加有效地保持纹理等小尺度细节内容, PSNR 提高了大约 4 dB. 同时从运算效率看, 本文算法只需迭代很少的步数即可获取很好的重建结果, 因而具有较低的运算复杂度. 更为详细的比较结果参见表 1. 图 3 则给出了本文算法 (SRSR) 针对两幅不同图像 (图 1(a)、

图 2(a) 的 SR 重建性能指标 PSNR、ReErr 随迭代次数的函数曲线. 可以看出, 只需迭代较少的次数即可获得高质量的重建图像.

为了验证数值算法的收敛性, 图 4(a) 和 4(b) 分别给出了针对上述两幅图像时目标函数值比率  $10\lg(f(\alpha^n)/f(\alpha^0))$  dB 与目标解相对误差

$\|\alpha^{n+1} - \alpha^n\|/\|\alpha^{n+1}\|$ (对数尺度) 随迭代次数的函数衰减变化曲线. 从图 4 可以看出, 相对比率与相对误差都随着迭代有着较为快速的衰减, 并最终趋于平稳, 从而说明本文基于前向后向算子分裂的不动点迭代数值算法具有很好的渐近收敛性.

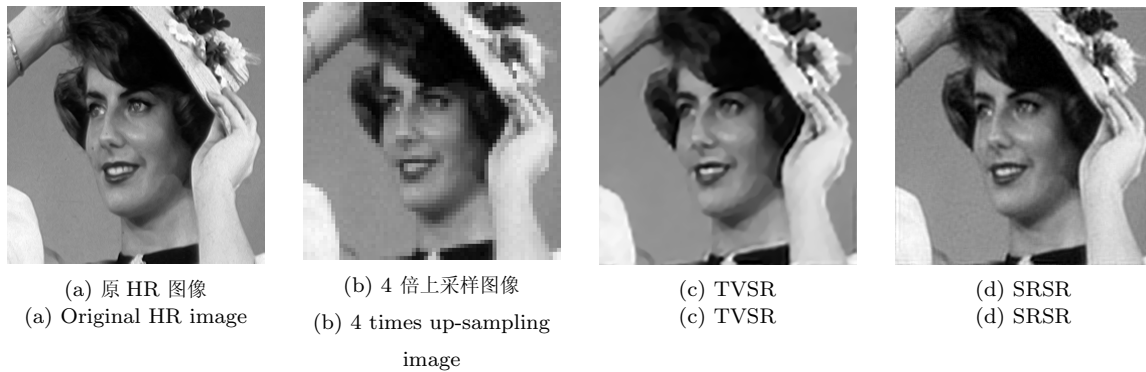


图 1 SRSR (本文) 与 TVSR 超分辨重建图像的 PSNR 比较 (Women 图像)

Fig 1 The comparison of super-resolution reconstruction images using SRSR and TVSR algorithms (Women image)

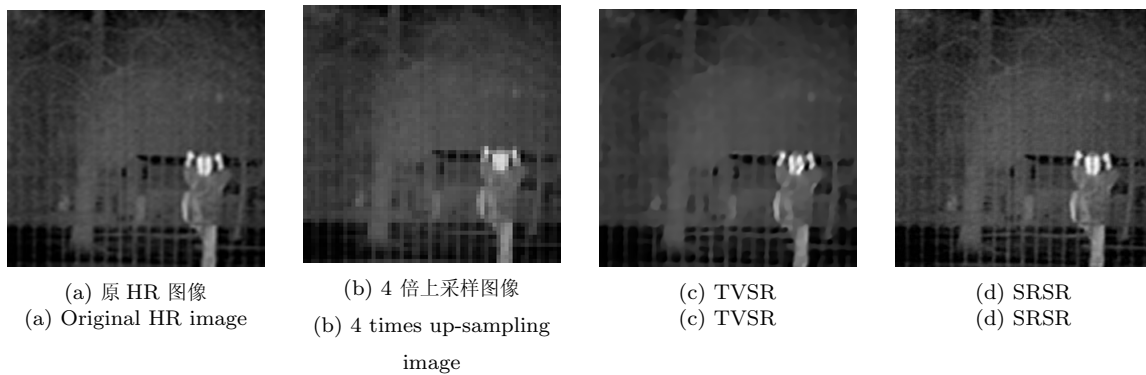


图 2 SRSR (本文) 与 TVSR 超分辨重建图像的 PSNR 比较 (Infrared person 红外图像)

Fig 2 The comparison of super-resolution reconstruction images using SRSR and TVSR algorithms (Infrared person image)

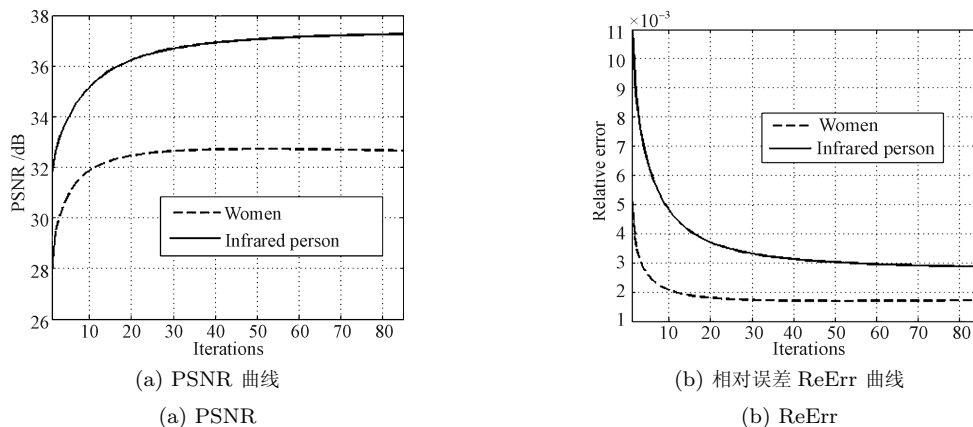


图 3 针对两幅不同图像 (Women、Infrared person), 本文 SRSR 算法的性能指标 PSNR、ReErr 随迭代次数的函数曲线

Fig 3 The plots of reconstructed PSNR and ReErr of SRSR algorithm as a function of iteration number (Women, Infrared person)

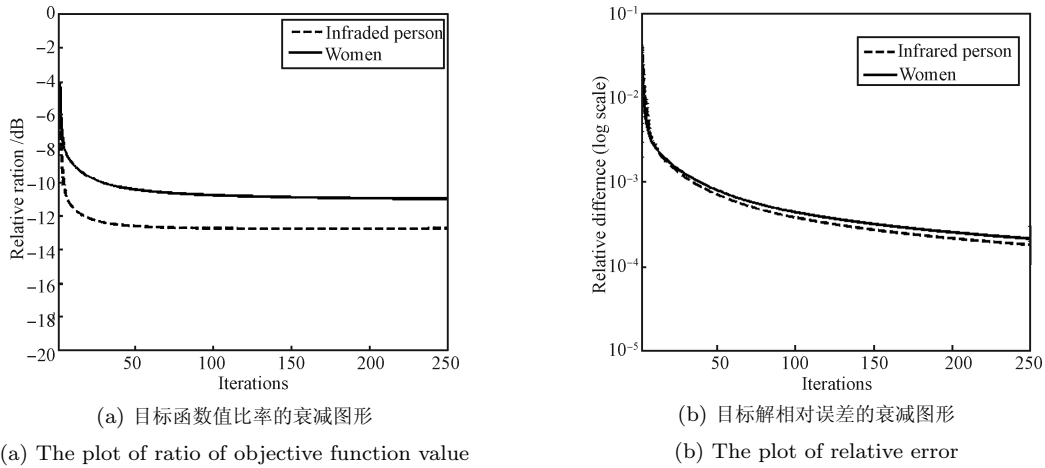


图 4 针对两幅不同图像 (Women、Infrared person), 本文前向后向数值算法的收敛性图形  
 Fig 4 The plots of ratio of objective function value and relative error as a function of iteration number (Women, Infrared person)

表 1 SRSR 与 TVSR 算法性能与运行时间的定量比较  
 Table 1 The reconstruction results and run-time of SRSR and TVSR algorithms

Image	Algorithm	Iteration	Time (s)	PSNR	ReErr
Women	TVSR	400	530.9844	29.5291	0.0035
Women	SRSR	20	37.1406	32.5781	0.0018
Infrared person	TVSR	400	512.9688	31.8422	0.0102
Infrared person	SRSR	20	37.1094	36.2771	0.0037

### 4 结论与展望

利用图像在框架下的稀疏表示模型, 本文提出了稀疏性正则化的图像超分辨率模型 (SRSR), 能够有效保持超分辨率重建图像的几何结构, 同时采用前向后向的算法子分裂法能够有效降低数值算法的复杂度. 然而, 图像是复杂信号, 单一框架 (字典) 并不能稀疏表示其中的多种结构成份, 从而不利于 SR 重建, 因此字典中应包含多种结构类型的子字典, 但多个子字典级联组合而成的多成份字典并不存在相应的快速分解与重构算法, 如何解决此矛盾是一个关键, 作者已经在着手于该算法的研究, 将在随后的论文中作进一步探讨.

#### 附录 A 定理 1 的证明

证明. 令  $\chi = l^2(\mathbf{I})$ ,  $\{e_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  为  $l^2(\mathbf{I})$  的标准正交基, 则变分模型 (8) 可改写为

$$\min_{\alpha \in \chi} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \|H_k U^* \alpha - g_k\|_2^2 + \lambda \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\langle \alpha, e_i \rangle)$$

根据模型 (8) 对函数的  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  的假设, 由文献 [8] 中例 2.19 (i), 可知  $f_2 = \lambda \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\langle \alpha, e_i \rangle) \in \Gamma_0(\mathbf{R})$ . 由于  $\{H_k\}_{1 \leq k \leq K} : H \rightarrow H$ ,  $U^* : \chi \rightarrow H$  皆为线性有界算子,  $\Psi \in \Gamma_0(\mathbf{R})$  且为有限函数, 则  $f_1 \in \Gamma_0(\mathbf{R})$ , 并且

$\nabla f_1 = U \circ \nabla \Psi \circ U^*$ , 其中  $\nabla \Psi = \sum_{k=1}^m H_k^*(H_k \alpha - g_k)$ . 记模型 (7) 解的集合为  $S$ . 由凸分析理论中算子运算的基本性质<sup>[11]</sup>, 可作如下推导:

$$\begin{aligned} \alpha \in S &\Leftrightarrow 0 \in \partial(f_1 + f_2)(\alpha) = \partial f_2(\alpha) + \{\nabla f_1(\alpha)\} \Leftrightarrow \\ &-\nabla f_1(\alpha) \in \partial f_2(\alpha) \Leftrightarrow \\ &(\alpha - \gamma \nabla f_1(\alpha)) - \alpha \in \gamma \partial f_2(\alpha) \Leftrightarrow \\ &\alpha = \text{prox}_{\gamma, f_2}(\alpha - \gamma \nabla f_1(\alpha)) \Leftrightarrow \\ &\alpha = \text{prox}_{\gamma, f_2}(\alpha - \gamma(U \circ \nabla \Psi \circ U^*)(\alpha)) \Leftrightarrow \\ &(\alpha)_{i \in \mathbf{I}} = \text{prox}_{\gamma, f_2}(\alpha_i - \gamma \eta_i)_{i \in \mathbf{I}} \end{aligned}$$

由文献 [8] 中例 2.19 (ii), 上式可进一步表示为:  $(\alpha)_{i \in \mathbf{I}} = (\text{prox}_{\gamma, \lambda \varphi_i}(\alpha_i - \gamma \eta_i))_{i \in \mathbf{I}}$ , 记  $T = \text{prox}_{\gamma, f_2}(I - \gamma \eta)$ , 上述公式表明  $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}}$  为变分模型 (8) 的解当且仅当  $\alpha = T\alpha$ , 由此第二个命题也自然成立. 从而, 命题得证.  $\square$

#### 附录 B 定理 2 的证明

证明. 记  $T_k = H_k U^*$ ,  $f_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \|T_k \alpha - g_k\|_2^2$ ,  $f_2 = \lambda \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\alpha_i)$ , 由问题假设  $T_k$  为有界线性算子, 因此  $f_1 \in \Gamma_0(\mathbf{H})$ , 并且可微,  $\nabla f_1 = \sum_{k=1}^m T_k^*(T_k \alpha - g_k)$ , 其中

$T_k^*$  为  $T_k$  的共轭算子. 根据 Lipschitz 连续的定义:

$$\begin{aligned} \|\nabla f_1(x) - \nabla f_2(y)\| &= \left\| \sum_{k=1}^m T_k^* T_k(x - y) \right\| \leq \\ &\sum_{k=1}^m \|T_k^* T_k(x - y)\| \leq \\ &\sum_{k=1}^m \|T_k^* T_k\| \|x - y\|, \\ &\forall (x, y) \in \mathbf{H}^2 \end{aligned}$$

因此,  $\nabla f_1$  为 Lipschitz 连续, 且 Lipschitz 常数为  $\beta = \sum_{k=1}^m \|T_k^* T_k\|$ . 进一步, 由文献 [12] 中引理 2.10.2,  $(\nabla f_1)^{-1}$  是模数为  $1/\beta$  的强单调算子. 令算子  $T_1 = \nabla f_1$ ,  $T_2 = \nabla f_2$ , 式 (13) 即为前向后向后算子分裂算法应用于算子  $T_1, T_2$  时的不动点迭代公式. 由问题假设, 依据文献 [13] 中推论 6.5, 满足其收敛性条件, 从而序列  $\{\alpha^k\}$  能够收敛于凸变分问题 (7) 的某一最优解.  $\square$

## References

- Ng M K, Bose N K. Mathematical analysis of super-resolution methodology. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2003, **20**(3): 62–74
- Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, **60**(1-4): 259–268
- Capel D, Zisserman A. Super-resolution enhancement of text image sequences. In: Proceedings of the 15th International Conference on Pattern Recognition. Washington D. C., USA: IEEE, 2000. 600–605
- Ng M K, Shen H F, Lam E Y, Zhang L P. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video. *EURASIP Journal on Applied in Signal Processing*, 2007, **2007**: 1–16
- Protter M, Elad M. Image sequence denoising via sparse and redundant representations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, **18**(1): 27–35
- Chaux C, Combettes P L, Pesquet J C, Wajs V R. A variational formulation for frame-based inverse problems. *Inverse Problems*, 2007, **23**(6): 1495–1518
- Lian Qiu-Sheng, Chen Shu-Zhen. Image reconstruction for compressed sensing based on the combined sparse image representation. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 385–391 (练秋生, 陈书贞. 基于混合基稀疏图像表示的压缩传感图像重构. *自动化学报*, 2010, **36**(3): 385–391)
- Combettes P L, Wajs V R. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2006, **4**(4): 1168–1200
- Candès E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representation of objects with piecewise  $C^2$  singularities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, **57**(2): 219–266
- Elad M, Hel-Or Y. A fast super-resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space-invariant blur. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(8): 1187–1193
- Zalinescu C. *Convex Analysis in General Vector Spaces*. New Jersey: World Scientific, 2002
- Chen H G. Forward-Backward Splitting Techniques: Theory and Applications [Ph. D. dissertation], University of Washington, USA, 1994
- Combettes P L. Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. *Optimization*, 2004, **53**(5-6): 475–504



孙玉宝 南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为图像建模与稀疏表示, 图像压缩与通信.

E-mail: syb8692833@126.com

(SUN Yu-Bao Ph. D. candidate at the School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers image modeling and sparse representation, image compression and communication.)



费选 南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为图像压缩与质量评价, 分布式信源编码.

E-mail: feixuan@hotmail.com

(FEI Xuan Ph. D. candidate at the School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers image compression and quality assessment, and distributed source coding.)



韦志辉 教授, 博士. 主要研究方向为图像处理, 图像建模, 小波分析, 多尺度变换理论, 数字水印, 编码与压缩. 本文通信作者.

E-mail: gswei@mail.njust.edu.cn

(WEI Zhi-Hui Professor, Ph. D.. His research interest covers image processing, image modeling, wavelet analysis, multi-scale analysis, digital watermark, and image coding and compressing. Corresponding author of this paper.)



肖亮 副教授, 博士. 主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用, 图像建模, 模式识别, 运动估计与跟踪, 虚拟现实与系统仿真.

E-mail: xt Xiaoliang@163.com

(XIAO Liang Associate professor, Ph. D.. His research interest covers variational partial differential equations application in image processing, image modeling, pattern recognition, motion estimation and tracking, virtual reality and system simulation.)