

关于 PnP 问题多解的分布与解的稳定性的讨论

孙凤梅¹ 王波²

摘要 PnP (Perspective-n-Point) 问题是一种基于单幅图像的定位方法, 由于不需要建立图像点之间的对应关系, 所以在机器人定位等应用中得到了广泛的应用. 多解性和解的稳定性是 PnP 问题的两个重要问题, 直接关系到具体视觉问题的成败. 那么, PnP 问题的多解是如何分布的呢? 多解一定意味着解是不稳定的吗? 这些问题文献中几乎没有任何报道. 本文以 P3P 问题为研究对象, 对这些问题进行了一些探讨, 研究结果对揭示 PnP 问题解的分布规律以及解的稳定性问题具有一定的参考价值.

关键词 PnP 问题, 多解分布, 解的稳定性, 解的唯一性, 物体定位

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.01213

A Note on the Roots Distribution and Stability of the PnP Problem

SUN Feng-Mei¹ WANG Bo²

Abstract The PnP problem is a widely used method in pose determination since it is a single-view based approach and does not need any image point correspondences, a difficult task itself in computer vision. The multiplicity and stability of solutions in the PnP problem are two important issues, they somehow directly determine the success or failure of a real application. Then questions arise: What is the distribution of the multiple solutions? Does the existence of multiple solutions necessarily mean that the solutions are not stable? There are no related reports on such issues in the literature to our knowledge. In this work, these two issues are investigated in terms of P3P problem, and the obtained results could provide some insight for the problem of the multiplicity and stability of the PnP problem, and could be of reference to the people in the field.

Key words PnP problem, distribution of solutions, stability of solutions, uniqueness of solution, object pose estimation

基于视觉的定位, 传统的应用场合是视觉机器人导航, 特别是即时定位与地图构建技术 (Simultaneous location and mapping, SLAM). 随着传感技术和网络技术的发展, 以及图像技术的普及, 基于视觉的定位已成为一门快速发展的新型学科. 从计算机视觉的观点看, 三维重建这个计算机视觉的中心问题, 近年来, 其重要性似乎正在被视觉定位所代替. 究其原因, 这主要是由于如下新型应用的兴起和新型技术的产生所导致的:

1) 虚拟现实、混合现实技术. 其中对物体和观测者的定位是能否取得“真实感、沉浸感”的核心支撑技术.

2) 普适游戏和动漫制作. 普适游戏一般玩家要在大场景运动, 对玩家实时、高精度定位是一项关键支撑技术, 也是目前还没有很好解决的一项技术.

3) 旅游等. 利用手机拍一幅图片, 然后发送到

服务中心, 通过图片确定用户所在的位置, 这是目前正在兴起的具有重大商业价值的一项应用.

4) 航空航天. 飞行器的定位和抓取, 目前几乎无一例外需要视觉定位方法, 而无人机辅助视觉导航, 几乎是任何无人机系统不可或缺的子系统.

5) 视觉辅助导航. 在有些情况下, 特别是城市环境中不可避免地存在遮挡的情况下, 利用视觉对 GPS 等进行辅助定位, 具有重要的军事和民用价值. 2006 年, MIT Technology Review 将此技术列为具有重大军事应用价值的未来技术.

正是这些新型应用的兴起和新型技术的应用, 极大地推动着视觉定位技术的发展, 使得定位技术已不再限制在一些传统行业、传统领域, 它已经成为一门新兴的学科. 其中, 基于视觉的定位技术应该说是应用最广泛的技术.

定位技术不仅具有重要的应用价值, 同时也具有重要的科学研究意义. Gibson 理论认为, 人类视觉有二大功能: 一是适应外界环境, 二是控制自身运动. Marr 理论认为, 从图像恢复场景的可见三维表面是人类视觉的主体功能. 尽管 Gibson 理论是整体视觉机制, Marr 理论是从局部到整体的重建机制, 但二种理论都认为人类视觉的目的是对外界环境的感知. 人类在对外界信息的获取过程中, 最基本的信息包含 4 类: 位置、形状、运动和颜色. 这里的位置

收稿日期 2009-11-18 录用日期 2010-01-13
Manuscript received November 18, 2009; accepted January 13, 2010
国家自然科学基金 (60673104, 60973005) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60673104, 60973005)
1. 北方工业大学理学院 北京 100144 2. 中国科学院自动化研究所 北京 100190
1. College of Science, North China University of Technology, Beijing 100144 2. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

信息,也就是视觉定位技术. 作者认为,目前计算机视觉界如果能对这4类基本信息可靠获取的话,计算机视觉领域的大多数问题也就基本解决了. 对这4类信息中的任何一类如果有突破性进展的话,将必然大推动计算机视觉研究的进展.

基于视觉的定位,可以大体分为基于多幅图像的定位和基于单幅图像的定位. 基于单幅图像的定位由于不需要确定图像点之间的对应关系(图像点匹配是计算机视觉界的一个经典难题),所以应用范围更加广泛. PnP问题(Perspective-n-Point problem)是基于单幅图像对物体进行定位的一种有效方法,也是应用最广泛的一种方法.

PnP问题,文献中有时也称作摄像机外参数的标定问题. PnP问题于1981年首先由Fishler等^[1]提出,而后很多研究人员对此进行了研究. PnP问题是指从 n ($2 < n < 6$)组已知空间物体点与其图像点之间的对应关系来确定空间物体方位的一种方法. 研究PnP问题的重要性在于以下二方面的重要应用:

1) 由于PnP问题仅从一幅图像就可以确定物体的方位,不需要知道同一物体在不同图像间的对应关系,所以该方法实用性强.

2) 在鲁棒性估计中的重要应用价值. 这主要是指在实际应用中,在空间物体与其投影图像之间已建立的粗匹配中,一般来说有很大一部分是错误匹配,需要使用鲁棒性估计算法(如计算机视觉界广泛使用的随机抽样一致性算法(Random sampling consensus, RANSAC))^[1]来精化. 可以证明,基于PnP问题原理的鲁棒性估计算法(如RANSAC)的计算代价一般来说与匹配点的个数(即PnP问题中的 n)成指数规律增长,所以在实际应用中 n 越小越好. 所以,P3P问题是PnP问题中最有价值的问题.

从数学上来说,PnP问题也可以描述为已知一组空间控制点 $\{x_i\}$ 和图像点 $\{u_i\}$ 之间的对应关系 $\{x_i \leftrightarrow u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$,求解下面投影矩阵中旋转矩阵 R 和平移向量 T 的过程:

$$s_i u_i = K [R \ T] \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中,矩阵 K 称为摄像机的内参数矩阵,是已知量. s_i 称为射影深度因子(Projective depth),是未知量,不同的控制点对应不同的深度因子,未知深度因子的存在是PnP问题求解的困难所在.

目前文献中对PnP问题的研究主要集中在以下三个方面:

1) 由于对于任何一种定位方法,首先要解决的是解的唯一性问题,所以,在 $2 < n < 6$ 时,关于PnP问题多解的研究:即到底有多少个解?有多解

的条件是什么?解的分布和变化情况是什么?长期以来一直是PnP问题研究的重要内容.

2) PnP问题的快速高精度求解问题. 在很多问题中,如上面所介绍的,PnP问题一般用在鲁棒性估计中. 在这些问题中,大量已知的对应点对中有很大一部分为外点(Outliers). 在这些鲁棒性估计方法中,如广泛使用的RANSAC^[1],PnP问题的求解是反复使用的核心模块,如何快速求解PnP问题,直接决定着估计算法总体的效率. 从文献来看,这方面的研究又分为以下两种主要途径:

a) 借助绝对姿态估计(Absolute orientation)的途径:正像前面所述,上面求姿态参数 $[R, T]$ 的过程中,未知射影深度因子 s_i 的存在是主要困难. 所谓借助绝对姿态估计的途径,就是指先确定射影深度因子 s_i ,然后利用文献中求绝对姿态的方法进行求解. 这类估计方法一般是一种迭代估计方法,也就是说,先粗略估计一组射影深度因子 s_i ,然后利用所估计的 s_i 再估计姿态参数 $[R, T]$,然后利用所估计的姿态参数 $[R, T]$ 再反过来估计射影深度因子 s_i . 如此迭代下去,直至收敛. 近期,这类方法得到了人们的很大关注^[2-4].

b) 直接计算相对姿态(Relative orientation). 所谓相对姿态估计问题,就是指在上面的求姿态参数 $[R, T]$ 的过程中,先消除掉未知射影深度因子 s_i ,然后直接求解 $[R, T]$ 的过程. 这类估计方法的估计精度一般比较低. 这是因为旋转矩阵 R 有9个参数,但仅有3个独立变量,如果直接求解独立的3个变量,估计方程是高度非线性方程,无闭合解(Closed-solution),很难得到优化解. 如果不考虑 R 中的6个约束方程,由于待估计参数间不是独立的,估计精度一般比较低^[5-8].

3) 解的稳定性分析. 稳定性和高精度是一对矛盾. 过去,人们对鲁棒性问题研究的比较多,主要在于剔除外点的影响. 当外点被剔除后,仍然存在解的精确性和稳定性问题,文献中关于这个问题过去并没有引起人们的高度关注. Wu等^[9]最近报道,在很多实际应用场合中,由于离散误差,特征点的不同分布,稳定解与高精度解对应不同的空间状态(Point configuration). Wu等^[10]对解的稳定姿态问题进行了系统研究.

总之,上述三方面的研究是文献中PnP问题的三个主要研究方向. 另外,文献中对PnP问题的应用也有不少报道.

关于P3P多解的必要和充分条件,首次讨论该问题的是苏成等^[11],进一步系统讨论该问题的是Gao等^[12]. 但上述二个研究组均从纯代数的观点进行了讨论,最终均归结为对一个一元四次方程系数应该满足的约束条件的讨论. 由于所得到的一元四

次方程的系数十分复杂, 系数应该满足的条件就更加复杂. 从这些系数的约束关系, 很难得到具有几何意义的直观性结论. 当然, 这些代数结论, 对具体某个 P3P 问题数值求解时解个数的判定有指导意义.

本文旨在探索 P3P 问题多解的几何分布和 PnP 问题多解性与解的稳定性之间的关系, 研究结果对于进一步揭示和深入了解 PnP 解的性质具有一定的参考作用.

1 一些基础知识

1.1 非线性方程组解稳定性的一般性理论及其几何意义

从数学教课书中可知, 对下面的一般性非线性方程组:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

如果在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 处解是稳定的, 则上述方程组在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 处的雅可比 (Jacobian) 行列式 J_0 不为零.

$$J_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

如果 J_0 在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 处的值等于零, 意味着将上述非线性方程组在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 处线性化后, 所得到的 n 个线性方程不是线性独立的. J_0 在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 处的值等于零的几何意义是: 函数 f_1, f_2, \dots, f_n 在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ 处的切平面至少有两个是相互重合的. 如图 1 所示, 由于两条曲线 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0$ 在交点 (x_0, y_0) 处的切线相互重合, 所以 (x_0, y_0) 不是一个稳定解. 相反, 如图 2 所示, 由于在 (x_0, y_0) 处的切线不重合, 所以, (x_0, y_0) 是一个稳定解. 所以, 一般来说, 如果 J_0 对应的雅可比矩阵越近似于一个对角阵, 则对应的解越稳定.

1.2 P3P 问题的三个非线性约束方程

PnP 问题, 当 $n = 3$ 时, 称为 P3P 问题. P3P 问题是 PnP 问题中应用最广泛且文献中研究最多的问题. 如式 (2) 和图 3 所示, 所谓 P3P 问题, 就是

指求解下面式 (2) 中非线性方程组的三个未知参数 (x, y, z) 的问题¹. 其中, (x, y, z) 是指摄像机光心 O 到三个控制点 P_1, P_2, P_3 之间的距离, d_1, d_2, d_3 是控制点之间的距离, α, β, γ 是射线 OP_1, OP_2, OP_3 之间的夹角, 在方程组中, 只有 (x, y, z) 是待求的未知量. 在 P3P 问题中, (x, y, z) 有多少组不同的正解, 就称为 P3P 问题有多少组解.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = d_1^2 \\ x^2 + z^2 - 2xz \cos \beta = d_2^2 \\ y^2 + z^2 - 2yz \cos \gamma = d_3^2 \end{cases} \quad (2)$$

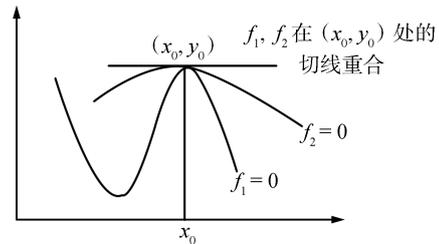


图 1 (x_0, y_0) 处解不稳定的情况

Fig. 1 A case of unstable solution at (x_0, y_0)

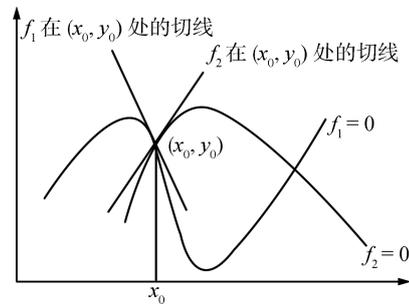


图 2 (x_0, y_0) 处解稳定的情况

Fig. 2 A case of stable solution at (x_0, y_0)

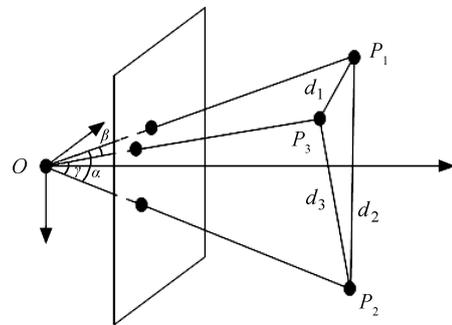


图 3 P3P 问题示意图

Fig. 3 The sketch for the P3P problem

¹式 (1) 是基于变换的 PnP 问题的约束方程, 式 (2) 是基于距离的 PnP 问题的约束方程. Wu 等^[13] 对两种定义下 PnP 问题约束方程的等价性进行了详细分析和讨论. 尽管这两种约束形式有一些差别, 但在文献中经常不加区别地使用.

1.3 危险圆柱及其上解的多解性和稳定性

危险圆柱 (Danger cylinder) 在 P3P 问题的研究具有重要的意义. 如图 4 所示, 所谓危险圆柱, 是指在 P3P 问题中以三个控制点 A, B, C 的外接圆为底圆的圆柱.

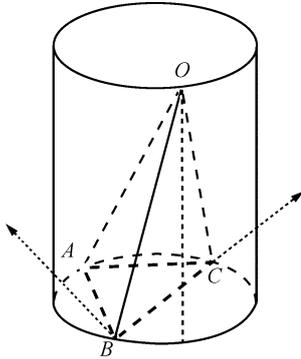


图 4 危险圆柱
Fig. 4 Danger cylinder

危险圆柱是通过对方程组 (2) 的雅可比行列式等于零得到的^[14]. 所以, 根据前面关于方程组解的稳定性的一般理论, 当摄像机光心位于危险圆柱上时, 对应的解一定是不稳定的. Zhang 等^[15] 又证明, 当摄像机光心位于危险圆柱上时, 对应的 P3P 问题必然存在三个解. 所以他们当时推测, 危险圆柱上的多解性可能正是危险圆柱上解不稳定的根源.

2 主要结果

2.1 PnP 问题的多解性并不一定意味着解的不稳定性

我们有下述结论:

- 1) 如果 P3P 问题的雅可比行列式等于零, 则对应的光心必然位于危险圆柱上;
- 2) 如果光心位于危险圆柱上, 则对应的雅可比行列式一定等于零.

上述结论说明: 雅可比行列式等于零是光心位于危险圆柱上的充分和必要条件, PnP 解的稳定性和多解性是两个不同的概念. 尽管当光心位于危险圆柱上, 此时 P3P 问题有三组解且这些解确实是不稳定的, 但这仅仅是一种巧合. 当存在光心不位于危险圆柱上的多解时, 此时对应的雅可比行列式不等于零, 所以对应的解是稳定的.

关于结论 1), 文献 [14] 已经给出证明. 关于结论 2), 具体证明见附录. 下面是一个存在 4 组解但雅可比行列式不为零的具体例子:

令 P3P 问题的三个控制点为 $A = (0, 0, 0), B = (20, 0, 0), C = (10, 10, 0)$, 则垂直于 AB 边的直线为 $x = 10$, 当光心 O 在过 $x = 10$ 的垂面且保持

$z = 20, y$ 坐标从 $[-3, 13]$ 变化时, 对应的雅可比行列式的值如图 5 所示. 只有当 $y = 10$ 时 (光心位于危险圆柱上), 此时的雅可比行列式的值为零, 其他均不为零. 图 5 的结果说明当光心位于其他位置时, 尽管此时 P3P 问题有 4 组解, 由于对应的雅可比行列式不为零, 说明这些解是稳定的.

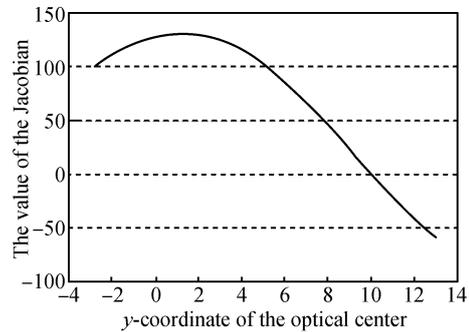


图 5 当光心的 y 坐标变化时, 对应的雅可比行列式一般不为零

Fig. 5 Jacobian is generally non-zero when the y -coordinate of the optical center changes

2.2 P3P 问题解空间的划分和多解的分布

Zhang 等^[15-16] 证明, 当摄像机光心位于由 P3P 问题三个控制点构成的三角形的三个垂面 (图 6 中的 $\pi_{AD}, \pi_{BE}, \pi_{CF}$ 三个垂面, 在危险圆柱上的点除外) 上时, 此时 P3P 问题必有 4 个解. 当光心位于危险圆柱上时, 对应的 P3P 问题必然存在 3 个解. 如图 6 所示, 三个垂直平面 $\pi_{AD}, \pi_{BE}, \pi_{CF}$ 和危险圆柱将 P3P 问题的解空间分成了 12 个不同的区域, 我们猜测, 在这些不同的区域和区域边界上, P3P 问题的解的个数和解的稳定性一定存在一些不同之处.

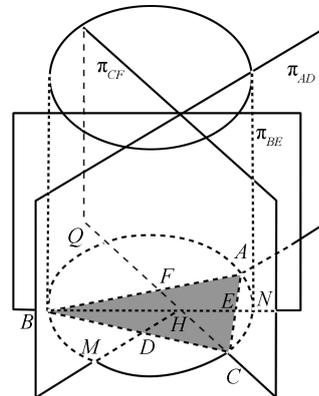


图 6 三个垂面 $\pi_{AD}, \pi_{BE}, \pi_{CF}$ 与危险圆柱将 P3P 的解空间分成 12 个不同的区域

Fig. 6 The three vertical planes and the danger cylinder divide the whole space into twelve different subregions

关于多解的分布和变化情况, 本文有如下结论: 如图 7 所示, 每个垂面与危险圆柱交于二条垂线 (为

清楚起见, 图中只给出一个垂直平面, 其他两个垂直平面的情况完全相同). 当光心位于垂面且位于危险圆柱内部 (如 O 点) 时, 在 P3P 的 4 组解中, 一组为共边解 (指两组解有一条公共边), 另一组为共点解 (指两组解有一个公共点). 当光心从 O 出发从一个方向逐渐靠近并最终到达危险圆柱时 (图中从 O 到 O_1), 一组共边解重合, 此时 P3P 问题成为 3 组解. 当光心穿过危险圆柱后, 重合的共边解又分离成 2 组共边解, 此时又成为 4 组解 (如 O_3 点). 相反, 当光心从另一个方向逐渐靠近并最终到达危险圆柱时 (图中从 O 到 O_2), 一组共点解重合, 此时成为 3 组解. 当光心穿过危险圆柱后, 重合的共点解又分离成 2 组共点解, 此时又成为 4 组解 (如 O_4 点).

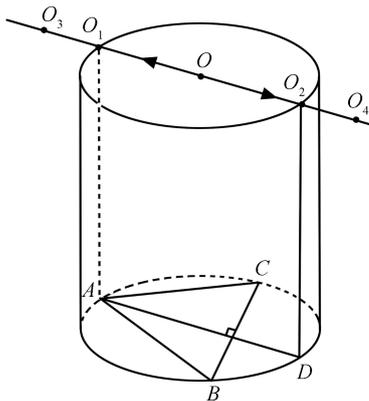


图 7 P3P 问题 4 组解的变化规律

Fig. 7 Different solution configurations of the P3P problem when the optical center O moves along the line O_1O_2

下面是 P3P 解分布的一个具体实例.

情形 1. 光心 O 位于 O_1 的左侧 (危险圆柱之外, 如 O_3).

如图 8 所示, 此时的 4 组解为: $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$, $\{O, A''B''C''\}$, $\{O, A'B''C'\}$. 其中, $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$ 为共边解 (共 AC 边), $\{O, A''B''C''\}$, $\{O, A'B''C'\}$ 为共点解 (共 B'' 点).

情形 2. 光心 O 与 O_1 重合 (危险圆柱上).

如图 9 所示, 此时的 3 组解为: $\{O, ABC\}$, $\{O, A''B''C''\}$, $\{O, A'B''C'\}$, 其中 $\{O, A''B''C''\}$, $\{O, A'B''C'\}$ 为共点解 (共 B'' 点). 此时, 两个共边解重合为同一组解.

情形 3. 光心 O 位于线段 O_1O_2 上 (危险圆柱之内): 4 组解的分布状况与情形 1 相同.

情形 4. 光心 O 与 O_2 重合 (危险圆柱上).

如图 10 所示, 此时的 3 组解为: $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$, $\{O, A'B''C'\}$. 其中 $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$ 为共边解 (共 AC 边), 此时两个共点解重合为同一组解.

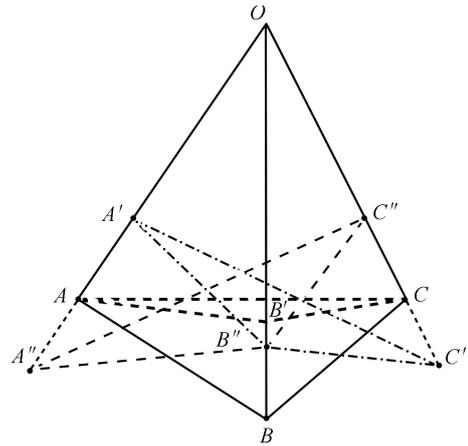


图 8 此时的 4 组解为: $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$, $\{O, A''B''C''\}$, $\{O, A'B''C'\}$

Fig. 8 A case of four different solutions: $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$, $\{O, A''B''C''\}$, and $\{O, A'B''C'\}$

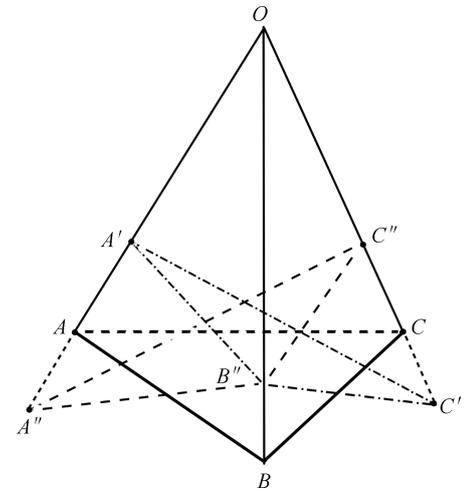


图 9 此时的 3 组解为: $\{O, ABC\}$, $\{O, A''B''C''\}$, $\{O, A'B''C'\}$

Fig. 9 A case of three different solutions: $\{O, ABC\}$, $\{O, A''B''C''\}$, and $\{O, A'B''C'\}$

情形 5. 光心 O 在 O_2 点的右侧 (危险圆柱外): 4 组解的分布状况与情形 1 相同.

关于 PnP 问题解的分布, Gao 等^[17] 首次从概率的观点, 证明 P4P, P5P 存在多解的概率等于 0. 另外, Zhang 等^[18] 也研究过类似的问题. 值得指出的是, 存在多解的概率等于零并不意味着不存在多解. 关于 P3P 问题, 文献中已经证明, P3P 问题最多只有 4 组解 (无穷多解的情况除外). 从上面的分析可以看出, 当 P3P 问题有 4 组解时, 一般都存在共边解或共点解. 但是否存在既不共点又不共边的 4 组解呢? 我们猜测这种可能性不存在, 但目前还无法给出严格的证明.

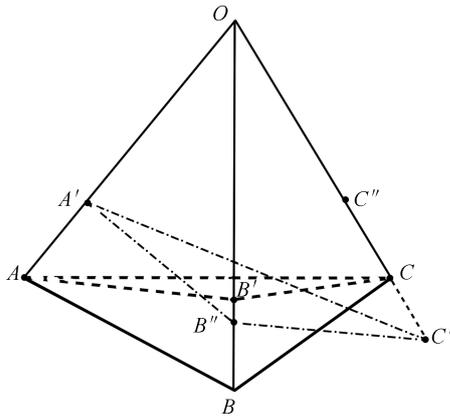


图 10 此时的 3 组解为: $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$, $\{O, A'B''C'\}$

Fig. 10 A case of three different solutions: $\{O, ABC\}$, $\{O, AB'C\}$, and $\{O, A'B''C'\}$

最后需要说明的是, 本文 P3P 问题解的稳定性是指基于第 2.1 节雅可比行列式为零与否的判据而言的. 事实上, 在某点的雅可比行列式不为零, 也不见得非线性方程组在该点的解一定是稳定的. 判别非线性方程组解的稳定性在数学上本身就是一个困难的问题, 也超出了本文的范围, 这里不再继续讨论.

3 结论

本文研究表明, P3P 问题的多解性和解的不稳定性是二个完全不同的概念. 只有当光心位于危险圆柱上时, P3P 问题存在多解且解是不稳定的, 其他多解均是稳定的. 另外, 本文对三个垂面上解的分布规律进行了研究, 揭示了当光心趋于危险圆柱上时, 共点解或共边解趋于重合的现象. 这些结果, 对从事 PnP 问题研究的人员可能会提供一些参考作用.

附录

下面证明, 如果光心在危险圆柱上, 则对应的雅可比行列式一定等于零.

不失一般性, 假定三个控制点 A, B, C 对应的危险圆柱为圆心在坐标原点, 半径为 R 的圆柱, 光心 O 位于圆柱上:

$$A = \begin{bmatrix} R \cos \phi_1 \\ R \sin \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} R \cos \phi_2 \\ R \sin \phi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} R \cos \phi_3 \\ R \sin \phi_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

则 P3P 约束方程式 (2) 中的各个量可以表示为:

$$d_1^2 = (R \cos \phi_1 - R \cos \phi_2)^2 + (R \sin \phi_1 - R \sin \phi_2)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$d_2^2 = (R \cos \phi_1 - R \cos \phi_3)^2 + (R \sin \phi_1 - R \sin \phi_3)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\phi_1 - \phi_3)$$

$$d_3^2 = (R \cos \phi_3 - R \cos \phi_2)^2 + (R \sin \phi_3 - R \sin \phi_2)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\phi_2 - \phi_3)$$

$$x^2 = (R \cos \phi_1 - R \cos \theta)^2 + (R \sin \phi_1 - R \sin \theta)^2 + Z_0^2 = 2R^2 + Z_0^2 - 2R^2 \cos(\theta - \phi_1)$$

$$y^2 = (R \cos \phi_2 - R \cos \theta)^2 + (R \sin \phi_2 - R \sin \theta)^2 + Z_0^2 = 2R^2 + Z_0^2 - 2R^2 \cos(\theta - \phi_2)$$

$$z^2 = (R \cos \phi_3 - R \cos \theta)^2 + (R \sin \phi_3 - R \sin \theta)^2 + Z_0^2 = 2R^2 + Z_0^2 - 2R^2 \cos(\theta - \phi_3)$$

由文献 [14] 知, 给定三个控制点 $(x_i, y_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$ 和光心坐标 (x_0, y_0, z_0) , 对应的雅可比行列式可以表示为:

$$J = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 \\ x_0 - x_2 & y_0 - y_2 & z_0 \\ x_0 - x_3 & y_0 - y_3 & z_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & x - y \cos \alpha & y - x \cos \alpha \\ z - y \cos \beta & 0 & y - z \cos \beta \\ z - x \cos \gamma & x - z \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 \\ x_0 - x_2 & y_0 - y_2 & z_0 \\ x_0 - x_3 & y_0 - y_3 & z_0 \end{vmatrix}$ 表示三棱锥的体积, 只要光心 O 不与控制点 A, B, C 共面就不等于 0, 所以只要考虑行列式 $\begin{vmatrix} 0 & x - y \cos \alpha & y - x \cos \alpha \\ z - y \cos \beta & 0 & y - z \cos \beta \\ z - x \cos \gamma & x - z \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}$ 是否为 0 即可. 考虑到

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + y^2 - d_1^2}{2xy}$$

$$\cos \beta = \frac{x^2 + z^2 - d_2^2}{2xz}$$

$$\cos \gamma = \frac{y^2 + z^2 - d_3^2}{2yz}$$

将上述 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 代入, 并经过比较繁琐的化解, 行列式

$$J_0 = \begin{vmatrix} 0 & x - y \cos \alpha & y - x \cos \alpha \\ z - y \cos \beta & 0 & y - z \cos \beta \\ z - x \cos \gamma & x - z \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

可表示为:

$$J_0 = (d_1 d_2 d_3)^2 + d_1^2 x^2 z^2 + d_1^2 y^2 z^2 - d_1^2 z^4 - d_1^2 x^2 y^2 + d_2^2 x^2 z^2 + d_2^2 x^2 y^2 - d_2^2 x^4 - d_2^2 y^2 z^2 + d_3^2 y^2 z^2 + d_3^2 x^2 y^2 - d_3^2 y^4 - d_3^2 x^2 z^2 \quad (\text{A1})$$

将上述 $d_1^2, d_2^2, d_3^2, x^2, y^2, z^2$, 代入式 (A1), 经过比较繁琐的化简, 可得

$$J_0 = 0 \quad \square$$

References

- 1 Fishler M A, Bolles R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 1981, **24**(6): 381–395
- 2 Lu C P, Hager G D, Mjolsness E. Fast and globally convergent pose estimation from video images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(6): 610–622
- 3 Fiore P D. Efficient linear solution of exterior orientation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, **23**(2): 140–148
- 4 Schweighofer G, Prinz A. Robust pose estimation from a planar target. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, **28**(12): 2024–2030
- 5 Francese M N, Vincent L, Pascal F. Accurate non-iterative $O(n)$ solution to the PnP problem. In: Proceedings of the International Conference on Computer Vision. Rio de Janeiro, Brasil: IEEE, 2007. 1–8
- 6 Chen C S, Chang W Y. On pose recovery for generalized visual sensors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(7): 848–861
- 7 Bujnak M, Kukulova Z, Pajdla T. A general solution to the P4P problem for camera with unknown focal length. In: Proceedings of the Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, USA: IEEE, 2008. 1–8
- 8 Enqvist O, Kahl F. Robot optimal pose estimation. In: Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision. Marseille, France: Springer, 2008. 141–153
- 9 Wu F C, Wang Z H, Hu Z Y. Cayley transformation and numerical stability of calibration equations. *International Journal of Computer Vision*, 2009, **82**(2): 156–184
- 10 Wu Y H, Li Y F, Hu Z Y. Detecting and handling unreliable points for camera parameter estimation. *International Journal of Computer Vision*, 2008, **79**(2): 209–223
- 11 Su Cheng, Xu Ying-Qing, Li Hua, Liu Shen-Quan, Li Dong-Guo. Necessary and sufficient condition of positive root number of perspective-three-point problem. *Chinese Journal of Computers*, 1998, **21**(12): 1084–1095 (苏成, 徐迎庆, 李华, 刘慎权, 李冬果. 判定 P3P 问题正解数目的充要条件. *计算机学报*, 1998, **21**(12): 1084–1095)
- 12 Gao X S, Hou X R, Tang J L, Cheng H F. Complete solution classification for the perspective-three-point problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, **25**(8): 930–943
- 13 Wu Y H, Hu Z Y. PnP problem revisited. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2006, **24**(1): 131–141
- 14 Thompson E H. Space resection: failure cases. *Photogrammetric Record*, 1966, **5**(27): 201–204
- 15 Zhang Cai-Xia, Hu Zhan-Yi. Why is the danger cylinder dangerous in the P3P problem. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(4): 504–511
- 16 Zhang C X, Hu Z Y. A general sufficient condition of four positive solutions of the P3P problem. *Journal of Computer Science and Technology*, 2005, **20**(6): 836–842
- 17 Gao X S, Tang J L. On the probability of the number of solutions for the P4P problem. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2006, **25**(1): 79–86
- 18 Zhang Cai-Xia, Hu Zhan-Yi. A probabilistic study on the multiple solutions of the P3P problem. *Journal of Software*, 2007, **18**(9): 2100–2104



孙凤梅 北方工业大学副教授. 主要研究方向为摄像机标定与三维重建. 本文通信作者. E-mail: fmsun@163.com (SUN Feng-Mei Associate professor at the College of Science, North China University of Technology. Her research interest covers camera calibration and 3D reconstruction. Corresponding author of this paper.)



王波 中国科学院自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为相机定位. E-mail: wangbo@nlpr.ia.ac.cn (WANG Bo Ph.D. candidate at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His main research interest is vision-based pose estimation.)