

# 多模型概率假设密度平滑器

连峰<sup>1</sup> 韩崇昭<sup>1</sup> 刘伟峰<sup>2</sup> 元向辉<sup>1</sup>

**摘要** 针对杂波环境下的多个机动目标跟踪问题, 本文将多模型概率假设密度 (Multiple-model probability hypothesis density, MM-PHD) 滤波器和平滑算法相结合, 提出了 MM-PHD 前向-后向平滑器. 为了避免引入复杂的随机有限集 (Random finite set, RFS) 理论, 本文根据 PHD 的物理空间 (Physical space) 描述法推导得到了 MM-PHD 平滑器的后向更新公式. 由于 MM-PHD 前向-后向平滑器的递推公式中包含有多个积分, 因此它在非线性非高斯条件下没有解析的表达式. 故本文又给出了它的序贯蒙特卡洛 (Sequential Monte Carlo, SMC) 实现. 100 次蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 仿真实验表明, 与 MM-PHD 滤波器相比, MM-PHD 平滑器能够更加精确地估计多个机动目标的个数和状态, 但 MM-PHD 平滑器存在一定的时间滞后, 并且需要耗费更大的计算代价.

**关键词** 多个机动目标跟踪, 概率假设密度滤波器, 概率假设密度平滑器, 交互式多模型

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00939

## Multiple-model Probability Hypothesis Density Smoother

LIAN Feng<sup>1</sup> HAN Chong-Zhao<sup>1</sup> LIU Wei-Feng<sup>2</sup> YUAN Xiang-Hui<sup>1</sup>

**Abstract** By integrating the multiple-model probability hypothesis density (MM-PHD) filter with the smoothing algorithms, an MM-PHD forward-backward smoother is proposed in this paper for tracking multiple maneuvering targets in clutter. To avoid use of complex random finite set (RFS) theory, the backward updated equation of the MM-PHD smoother can be derived according to the physical-space explanation of the PHD. Since the MM-PHD forward-backward smoother involves multiple integrals, this renders its recursion analytically intractable in the nonlinear and non-Gaussian conditions. Thus, the sequential Monte Carlo (SMC) method is used to implement the smoother. 100 Monte Carlo (MC) simulation results show that the proposed MM-PHD smoother significantly outperforms the MM-PHD filter in estimating the number and states of the multiple maneuvering targets, although the MM-PHD smoother will have time lag and more expansive computation requirement.

**Key words** Multiple maneuvering targets tracking, probability hypothesis density filter (PHD filter), probability hypothesis density smoother (PHD smoother), interacting multiple model (IMM)

近年来, 基于随机有限集 (Random finite set, RFS)<sup>[1-3]</sup> 理论的多目标跟踪算法受到了国内外学者的广泛关注. 但对于 RFS 框架下多传感器多目标贝叶斯滤波器<sup>[4]</sup>, 它的计算量会随着目标个数的增多而迅速加重. 针对此问题, Mahler 提出了一种实际计算可行的近似方法 — 概率假设密度 (Probability hypothesis density, PHD) 滤波器<sup>[5]</sup>, 其中 PHD 是多传感器多目标后验概率密度的一阶统计矩. PHD 滤波器一经提出便成为研究的热点. Vo 等给出了 PHD 滤波器的粒子滤波实现: SMC-PHD (Sequential Monte Carlo PHD, 也称为 Particle PHD) 滤

波器<sup>[6]</sup>. Vo 等在线性运动模型和测量模型的假设条件下得到了 PHD 滤波器封闭的递推形式: GM-PHD (Gaussian mixture PHD) 滤波器<sup>[7]</sup>. 不同于传统的基于关联的多目标跟踪算法<sup>[8-9]</sup>, 例如最近邻法 (Nearest neighbor, NN)<sup>[10]</sup>, 联合概率数据关联 (Joint probability data association, JPDA)<sup>[11]</sup>, 多假设跟踪 (Multiple hypothesis track, MHT)<sup>[12]</sup> 等, PHD 滤波器递推地传递目标状态的分布信息, 因此不需要复杂的数据关联过程便可从目标状态分布中同时提取多目标的个数和状态估计. 它尤其适用于杂波环境下, 目标较密集且个数随时间变化, 以及传感器检测概率小于 1 时的多目标跟踪场景. 目前, PHD 滤波器在群目标跟踪<sup>[13]</sup>、地面车辆跟踪<sup>[14]</sup>、被动式雷达跟踪<sup>[15]</sup>、声纳图像跟踪<sup>[16]</sup>、视频跟踪<sup>[17-18]</sup> 等领域已取得了广泛的应用.

最初的 PHD 滤波器并没有考虑目标机动的情況. 众所周知, 交互式多模型 (Interacting multiple model, IMM) 算法<sup>[19]</sup> 是跟踪无杂波条件下单个机动目标的有效方法, 因此文献 [20-21] 等将 IMM 算法和 PHD 滤波器相结合, 得到了可以跟踪多个机动

收稿日期 2009-06-05 录用日期 2009-11-10  
Manuscript received June 5, 2009; accepted November 10, 2009  
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2007CB311006), 国家自然科学基金 (60574033) 资助  
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB311006) and National Natural Science Foundation of China (60574033)  
1. 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所 西安 710049  
2. 杭州电子科技大学自动化学院 杭州 310018  
1. Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 2. School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018

目标的 MM-PHD (Multiple-model PHD) 滤波器. 但是由于多目标的个数未知, 目标和测量的对应关系不确定, 目标运动模型未知以及杂波等众多因素的影响, MM-PHD 滤波器通常很难得到满意的估计效果. 尤其当传感器检测概率较低, 或目标机动较剧烈, 以及传感器采样间隔较长导致观测数据不充分时, MM-PHD 滤波器的性能将会显著下降.

针对上述问题, 本文将 MM-PHD 滤波器和平滑算法相结合, 提出了 MM-PHD 前向-后向平滑器. 为了避免引入复杂的随机集理论, 本文根据 PHD 的物理空间 (Physical space) 描述法<sup>[22]</sup> 推导得到了 MM-PHD 平滑器的后向更新公式. 由于 MM-PHD 前向-后向平滑器的递推公式中包含有多个积分, 因此它在非线性非高斯条件下没有解析的表达形式. 故本文又给出了它的序贯蒙特卡洛 (Sequential Monte Carlo, SMC) 实现. 为了比较 MM-PHD 滤波器和 MM-PHD 平滑器的性能, 我们分别给出了两者的 100 次蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 对比仿真实验. 该实验表明, 对于杂波环境下的多个机动目标跟踪问题, 由于 MM-PHD 平滑器能够利用更多的滞后时间测量, 因此相比于 MM-PHD 滤波器, 它在目标机动较强, 杂波密度较大以及传感器检测概率较低时可以有效提高多目标的个数和状态估计精度. 在一些实时性要求不高或允许事后处理的问题中, 尤其像低检测率传感器 (例如天波超视距雷达等) 跟踪、地面动目标检测中的非顺序量测问题<sup>[23]</sup>、视频跟踪<sup>[17-18]</sup>、目标拦截问题中的脱靶量评估<sup>[24]</sup> 等领域有较高的应用价值.

## 1 问题描述

### 1.1 目标运动模型

假设在所监控的时间段内, 由于目标的新生、它生和消亡等原因, 监控区域内的多目标个数随时间变化. 记时刻  $k$  监控区域内的多目标个数为  $N_k$ , 单个目标的状态为  $\mathbf{x}_k$ , 则时刻  $k$  多目标的状态可以表示为一个 RFS  $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x}_k^n\}_{n=1}^{N_k}$ , 其中  $\mathbf{x}_k^n$  表示第  $n$  ( $n = 1, \dots, N_k$ ) 个目标的状态.

设目标状态的时间演化过程满足马尔科夫性, 则时刻  $k$  第  $n$  ( $n = 1, \dots, N_k$ ) 个目标的运动模型可描述为

$$\mathbf{x}_k^n = g_k(\mathbf{x}_{k-1}^n, r_k^n, \mathbf{w}_{k-1}^n) \quad (1)$$

上式中  $g_k(\cdot)$  通常为一个非线性函数.  $\mathbf{w}_{k-1}^n$  为时刻  $k-1$  第  $n$  个目标的过程噪声.  $r_k^n$  表示时刻  $k$  第  $n$  个目标的运动模型. 当目标发生机动时, 目标由一个运动模型切换到另一个运动模型. 同样假设模型之间的切换满足马尔科夫性<sup>[19]</sup>, 记第  $n$  个目标由时刻

$k-1$  的模型  $r_{k-1}^n$  切换到时刻  $k$  的模型  $r_k^n$  的转移概率为  $f_{k|k-1}(r_k^n|r_{k-1}^n)$ .

### 1.2 传感器测量模型

传感器测量集合由源于目标的测量和杂波构成, 并且两者是不可区分的. 令  $\mathbf{z}_k$  表示时刻  $k$  的单个传感器的测量矢量, 则 RFS  $\mathcal{Z}_k = \{\mathbf{z}_k^m\}_{m=1}^{M_k}$  表示时刻  $k$  传感器收到的测量集合, 其中  $M_k$  为时刻  $k$  的测量个数.  $\mathcal{Z}_{1:k} = \mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_k$  表示从时刻 1 到时刻  $k$  的累积测量序列.

若时刻  $k$  第  $m$  ( $m = 1, \dots, M_k$ ) 个测量  $\mathbf{z}_k^m$  源于第  $n$  个目标, 则该测量可由传感器观测模型获得:

$$\mathbf{z}_k^m = h_k(\mathbf{x}_k^n, r_k^n, \mathbf{v}_k^m) \quad (2)$$

上式中  $h_k(\cdot)$  通常为一个非线性函数.  $\mathbf{v}_k^m$  为时刻  $k$  的传感器测量噪声.

假设杂波为泊松点过程, 强度为

$$\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda_c f_c(\mathbf{z}_k) \quad (3)$$

上式中  $\lambda_c$  为监控区域内平均每帧的杂波个数,  $f_c(\cdot)$  为杂波空间分布的概率密度.

综上, 本文的目的是根据直到时刻  $k$  的累积传感器测量序列  $\mathcal{Z}_{1:k}$ , 估计时刻  $k$  多目标的个数  $N_k$  和多目标的状态集合  $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x}_k^n\}_{n=1}^{N_k}$ .

## 2 MM-PHD 平滑器

为了获得本文建议的 MM-PHD 前向-后向平滑器, 我们首先需要对 PHD 滤波器和 MM-PHD 滤波器进行简要介绍.

### 2.1 PHD 滤波器和 MM-PHD 滤波器

PHD 是 RFS 理论框架下多目标状态集合的后验概率密度的一阶统计矩<sup>[5]</sup>. 记时刻  $k$  的 PHD 为

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k}) = \int_{\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}_k} f_{k|k}(\mathcal{X}_k|\mathcal{Z}_{1:k}) \delta \mathcal{X}_k \quad (4)$$

上式中  $f_{k|k}(\mathcal{X}_k|\mathcal{Z}_{1:k})$  为时刻  $k$  多目标状态集合的后验概率密度.  $D_{k|k}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k})$  为时刻  $k$  的 PHD.  $\int \cdot \delta \mathcal{X}_k$  表示集合积分. 时刻  $k$  的 PHD 在任意状态空间  $S$  内的积分为该时刻该区域内多目标个数的期望  $\hat{N}_{k|k}$ <sup>[5]</sup>.

$$\hat{N}_{k|k} = E[N_k] = \int_S D_{k|k}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \quad (5)$$

通过将多目标状态集合的时间预测概率密度  $f_{k|k-1}(\mathcal{X}_k|\mathcal{Z}_{1:k-1})$  近似为泊松分布形式, Mahler 得到到  $k$  时刻 PHD 滤波器的递推公式如下<sup>[5]</sup>:

## 1) 预测步

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k-1}) = \gamma_k(\mathbf{x}_k) + \int [p_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1})f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) + \beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})]D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}|\mathcal{Z}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad (6)$$

## 2) 更新步

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k}) = D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k-1})[1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k) + \sum_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k} \frac{p_{D,k}(\mathbf{x}_k)f_{k|k}(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k)f_{k|k}(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k}] \quad (7)$$

上两式中,  $\gamma_k(\mathbf{x}_k)$  和  $\beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$  分别为目标新生强度和它生强度,  $\kappa_k(\mathbf{z}_k)$  为杂波强度,  $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$  为单目标状态转移概率密度,  $f_{k|k}(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$  为单传感器-单目标测量似然函数,  $p_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1})$  为目标存活概率,  $p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$  为传感器对目标的检测概率.

文献 [20-21] 将 IMM 算法和 PHD 滤波器相结合, 得到了 MM-PHD 滤波器, 它可用于处理目标发生机动的情况.  $k$  时刻 MM-PHD 滤波器的递推公式如下<sup>[20]</sup>:

## 1) 预测步

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k, r_k|\mathcal{Z}_{1:k-1}) = \sum_{r_{k-1}} f_{k|k-1}(r_k|r_{k-1}) \int [p_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, r_{k-1}) \times f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, r_k) + \beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, r_k)] \times D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, r_{k-1}|\mathcal{Z}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} + \gamma_k(\mathbf{x}_k, r_k) \quad (8)$$

## 2) 更新步

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k, r_k|\mathcal{Z}_{1:k}) = D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k, r_k|\mathcal{Z}_{1:k-1})[1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k, r_k) + \sum_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k} \frac{p_{D,k}(\mathbf{x}_k, r_k)f_{k|k}(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k, r_k)}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k, r_k)f_{k|k}(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k, r_k)D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k, r_k|\mathcal{Z}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k}] \quad (9)$$

上两式假设时刻  $k$  的目标新生强度  $\gamma_k(\mathbf{x}_k, r_k)$ , 目标它生强度  $\beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, r_k)$ , 单目标状态转移概率密度  $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, r_k)$ , 单传感器-单目标测量似然函数  $f_{k|k}(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k, r_k)$ , 目标存活概率  $p_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, r_{k-1})$ , 传感器检测概率  $p_{D,k}(\mathbf{x}_k, r_k)$  均与目标运动模型有关,  $f_{k|k-1}(r_k|r_{k-1})$  为模型转移概率.

## 2.2 MM-PHD 前向-后向平滑器

常用的单目标无杂波条件下的平滑方法主要有前向-后向平滑算法 (Forward-backward

smoother, FBS)<sup>[25]</sup>, 两滤波器平滑算法 (Two-filter smoother, TFS)<sup>[26]</sup> 和最大后验平滑算法 (Maximum a posteriori smoother, MAPS)<sup>[27]</sup> 等. 同样, MM-PHD 平滑器也可包括以上三种形式. 本文重点研究 MM-PHD 前向-后向平滑算法. MM-PHD 前向-后向平滑器的前向更新公式即为第 2.1 节的 MM-PHD 滤波器的预测式 (8) 和更新式 (9), 因此下面仅需推导它的后向更新公式.

不同于 Mahler 的 RFS 描述框架, Erdinc 等给出了 PHD 滤波器的物理空间 (Physical space) 描述<sup>[22]</sup>. 为了避免复杂的随机集理论, 本文根据文献 [22] 中 PHD 的物理空间描述法推导 MM-PHD 前向-后向平滑器的后向更新公式.

在 PHD 滤波器的物理空间描述法中, 目标状态空间  $S$  被均匀划分为  $N_s$  个网格, 记第  $i$  ( $i = 1, \dots, N_s$ ) 个网格为  $S_i$ , 令每个网格最多只能包含一个目标. 记  $u_k(i)$  表示事件“时刻  $k$  第  $i$  个网格包含有一个目标”,  $d_k(i)$  表示事件“时刻  $k$  第  $i$  个网格内的目标消亡”. 我们已知在 RFS 框架下, PHD 表示泊松点过程的强度<sup>[5]</sup>; 相应地, 在 PHD 的物理空间描述法中, PHD 可理解为目标状态空间的单位“体积”内包含一个目标的概率<sup>[22]</sup>, 因此在极限条件下 (即网格数趋于无穷大且每个网格的容量趋于 0), 概率  $P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k})$  即表示了时刻  $t$  ( $t < k$ , 其中  $k$  表示当前时刻) MM-PHD 的平滑值  $D_{t|k}(\mathbf{x}_t, r_t|\mathcal{Z}_{1:k})$ .

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) = D_{t|k}(\mathbf{x}_t, r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) \quad (10)$$

在 PHD 的物理空间描述法中, 假设时刻  $t$  第  $i$  个网格内的目标在时刻  $t+1$  可能运动到状态空间  $S$  内的第  $j$  ( $j = 1, \dots, N_s$ ) 个网格  $S_j$  中或者消亡. 因此, 根据全概率公式可得

$$P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) = P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) \times P(d_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) + \sum_j \sum_{r_{t+1}} P(u_{t+1}(j), r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:k}) \times P(u_t(i), r_t|u_{t+1}(j), r_{t+1}, \mathcal{Z}_{1:k}) \quad (11)$$

假设目标运动模型的转移过程和目标状态的时间演化过程均满足马尔科夫性, 则根据贝叶斯公式又可得

$$P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) = P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:t})P(d_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) + \sum_j \sum_{r_{t+1}} \frac{P(u_{t+1}(j), r_{t+1}|u_t(i), r_t, \mathcal{Z}_{1:t})}{P(u_{t+1}(j), r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:t})} = P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:t})P(u_{t+1}(j), r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:k}) \times P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:t}) (1 - P_S(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:k})) +$$

$$\sum_j \sum_{r_{t+1}} \frac{P(u_{t+1}(j)|u_t(i), r_{t+1})}{P(u_{t+1}(j), r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:t})} \times P(r_{t+1}|r_t)P(u_t(i), r_t|\mathcal{Z}_{1:t})P(u_{t+1}(j), r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:k}) \quad (12)$$

上式中  $P_S$  表示目标存活概率。

对式 (12) 的等号两边同时取极限可得时刻  $t$  ( $t < k$ ) MM-PHD 平滑器的后向更新方程为

$$D_{t|k}(\mathbf{x}_t, r_t|\mathcal{Z}_{1:k}) = \underbrace{D_{t|t}(\mathbf{x}_t, r_t|\mathcal{Z}_{1:t})}_{\text{filtered}} [1 - p_{S,t+1|t}(\mathbf{x}_t, r_t) + \sum_{r_{t+1}} \int \underbrace{\frac{f_{t+1|t}(r_{t+1}|r_t)f_{t+1|t}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t, r_t)}{D_{t+1|t}(\mathbf{x}_{t+1}, r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:t})}}_{\text{dynamics}} \times \underbrace{D_{t+1|k}(\mathbf{x}_{t+1}, r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:k})}_{\text{predicted}} \underbrace{d\mathbf{x}_{t+1}}_{\text{smoothed}}] \quad (13)$$

根据式 (13), 可由  $t+1$  时刻 MM-PHD 的平滑值反向递推得到  $t$  时刻 MM-PHD 的平滑值. 在平滑初始点  $t = k-1$  时刻, MM-PHD 的平滑值  $D_{t+1|k}(\mathbf{x}_{t+1}, r_{t+1}|\mathcal{Z}_{1:k})$  即为  $k$  时刻它的滤波值  $D_{k|k}(\mathbf{x}_k, r_k|\mathcal{Z}_{1:k})$ .

### 3 MM-PHD 平滑器的 SMC 实现

由于 MM-PHD 前向-后向平滑器包含多个积分, 因此它在非线性非高斯条件下没有解析表达式. 本文采用 SMC 方法实现 MM-PHD 平滑器. 记当前时刻为  $k$ , 表 1 给出了固定时延长度为  $l$  的 SMC-MM-PHD 前向-后向平滑器的算法流程. 其中, 上标 “~” 表示采样值,  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{r}, \tilde{\omega}$  分别表示状态采样、运动模型采样和相应的粒子权重.

在表 1 中, 需要说明的是:

1) 在重采样步后可加入 MCMC 移动步<sup>[28]</sup>, 以增加粒子多样性.

2) 在多目标状态提取步, 通常可采用 K 均值 (K-means)<sup>[29]</sup> 或高斯混合模型 (Gaussian mixture model, GMM)<sup>[30]</sup> 等聚类算法对粒子集合进行聚类.

3) 从 MM-PHD 粒子平滑器的后向更新公式可以看出, 由时刻  $t+1$  的粒子平滑权重计算时刻  $t$  的粒子平滑权重需要  $O(J_t J_{t+1})$  次运算. 当粒子数较多时运算量会显著增大. 因此, 为了减小计算量以加快平滑速度, 通常可采用快速高斯变换 (Fast Gaussian transform, FGT)<sup>[31]</sup>, 快速多极展开 (Fast multipole expansions, FME)<sup>[32]</sup> 和空间索引 (Spatial-index)<sup>[33]</sup> 等近似计算方法计算该后向更新公式.

## 4 仿真分析

### 4.1 仿真场景设置

考虑一个杂波环境下的 2 维多目标运动场景. 设在所监控的时间段内目标个数未知且随时间变化. 已知监控区域的范围为  $[-1000, 1000] \times [-1000, 1000] \text{ m}^2$ . 监控时间长度  $T = 50 \text{ s}$ , 传感器采样间隔  $\Delta t = 1 \text{ s}$ . 设时刻  $k$  的真实目标个数为  $N_k$ , 目标在监控时间内可能作匀速或转弯运动. 因此, 可令目标的运动模型集由一个匀速 (Constant velocity, CV) 模型和一个转弯 (Coordinated turn, CT) 模型<sup>[34]</sup> 构成. 记时刻  $k$  第  $n$  ( $n = 1, \dots, N_k$ ) 个目标的状态向量为  $\mathbf{x}_k^n = [x_k^n, \dot{x}_k^n, y_k^n, \dot{y}_k^n, \Omega_k^n]^T$ , 其中  $[x_k^n, y_k^n]^T$  为它在  $x$  坐标轴方向和  $y$  坐标轴方向的位置向量;  $[\dot{x}_k^n, \dot{y}_k^n]^T$  为它在  $x$  坐标轴方向和  $y$  坐标轴方向的速度向量;  $\Omega_k^n$  为它的转弯角速率, 令逆时针方向为正, 顺时针方向为负. 记第  $n$  个目标的状态演化模型为

$$\mathbf{x}_k^n = F_{r,k}^n \mathbf{x}_{k-1}^n + \mathbf{w}_{r,k}^n \quad (14)$$

上式中,  $F_{r,k}^n$  为第  $n$  个目标的第  $r$  ( $r = 1, 2$ ) 个模型的状态转移矩阵,  $\mathbf{w}_{r,k}^n$  为第  $n$  个目标的第  $r$  个模型的过程噪声, 假设其为独立同分布的零均值高斯白噪声, 协方差阵为  $Q_{r,k}^n$ . 令模型 1 为 CV 模型, 模型 2 为 CT 模型, 则

$$F_{1,k}^n = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{2,k}^n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \Omega_{k-1}^n \Delta t}{\Omega_{k-1}^n} & 0 & -\frac{1 - \cos \Omega_{k-1}^n \Delta t}{\Omega_{k-1}^n} & 0 \\ 0 & \cos \Omega_{k-1}^n \Delta t & 0 & -\sin \Omega_{k-1}^n \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos \Omega_{k-1}^n \Delta t}{\Omega_{k-1}^n} & 1 & \frac{\sin \Omega_{k-1}^n \Delta t}{\Omega_{k-1}^n} & 0 \\ 0 & \sin \Omega_{k-1}^n \Delta t & 0 & \cos \Omega_{k-1}^n \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{1,k}^n = \sigma_{1,w}^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表 1 SMC-MM-PHD 前向 - 后向平滑算法

Table 1 Brief description of the proposed SMC-MM-PHD forward-backward smoother

输入. 滞后时间长度  $l$ , 累积测量  $\mathcal{Z}_{k-l:k}$ ,  $k-l-1$  时刻 MM-PHD 滤波值的粒子描述  $D_{k-l-1|k-l-1}(\mathbf{x}_{k-l-1}, r_{k-l-1} | \mathcal{Z}_{1:k-l-1}) = \sum_{p=1}^{J_{k-l-1}} \tilde{\omega}_{k-l-1}^p \delta(\mathbf{x}_{k-l-1} - \tilde{\mathbf{x}}_{k-l-1}^p, r_{k-l-1} - \tilde{r}_{k-l-1}^p)$ , 其中  $\{\tilde{\omega}_{k-l-1}^p, \tilde{\mathbf{x}}_{k-l-1}^p, \tilde{r}_{k-l-1}^p\}_{p=1}^{J_{k-l-1}}$  为粒子和权重集合.

步骤 1. 前向更新步 (即 MM-PHD 滤波算法).

for  $t = k-l, \dots, k$  do:

根据建议分布,  $\pi_t(\cdot | \tilde{r}_{t-1}^p)$  和  $\mu_t(\cdot)$  采样预测的目标运动模型和  $\vartheta_t(\cdot | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p, \mathcal{Z}_t)$  和  $\zeta_t(\cdot | \tilde{r}_{t-1}^p, \mathcal{Z}_t)$  采样预测的目标状态分别为

$$\tilde{r}_{t|t-1}^p \sim \begin{cases} \pi_t(\cdot | \tilde{r}_{t-1}^p), & p = 1, \dots, J_{t-1} \\ \mu_t(\cdot), & p = J_{t-1} + 1, \dots, J_{t|t-1} \end{cases}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p \sim \begin{cases} \vartheta_t(\cdot | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p, \mathcal{Z}_t), & p = 1, \dots, J_{t-1} \\ \zeta_t(\cdot | \tilde{r}_{t-1}^p, \mathcal{Z}_t), & p = J_{t-1} + 1, \dots, J_{t|t-1} \end{cases}.$$

根据式 (8) 计算相应的预测粒子权重:

$$\tilde{\omega}_{t|t-1}^p = \begin{cases} \frac{p_{S,t|t-1}(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p) f_{t|t-1}(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p) + \beta_{t|t-1}(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p)}{\vartheta_t(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p, \mathcal{Z}_t)} \cdot \frac{f_{t|t-1}(\tilde{r}_{t-1}^p | \tilde{r}_{t-1}^p)}{\pi_t(\tilde{r}_{t-1}^p | \tilde{r}_{t-1}^p)} \tilde{\omega}_{t-1}^p, & p = 1, \dots, J_{t-1} \\ \frac{\gamma_t(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, \tilde{r}_{t-1}^p)}{(J_{t|t-1} - J_{t-1}) \zeta_t(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p | \tilde{r}_{t-1}^p, \mathcal{Z}_t) \mu_t(\tilde{r}_{t-1}^p)}, & p = J_{t-1} + 1, \dots, J_{t|t-1} \end{cases}$$

可得  $t$  时刻 MM-PHD 预测值的粒子描述为  $D_{t|t-1}(\mathbf{x}_t, r_t | \mathcal{Z}_{1:t-1}) = \sum_{p=1}^{J_{t|t-1}} \tilde{\omega}_{t|t-1}^p \delta(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, r_t - \tilde{r}_{t|t-1}^p)$ ,

其中  $\{\tilde{\omega}_{t|t-1}^p, \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, \tilde{r}_{t|t-1}^p\}_{p=1}^{J_{t|t-1}}$  为预测的粒子和权重集合.

根据  $\mathcal{Z}_t$  和式 (9) 前向更新预测粒子权重, 可得前向更新后的粒子和相应的权重集合  $\{\tilde{\omega}_{t|t}^p, \tilde{\mathbf{x}}_{t|t}^p, \tilde{r}_{t|t}^p\}_{p=1}^{J_{t|t-1}}$ .

$$\tilde{\omega}_{t|t}^p = \left[ 1 - p_{D,t}(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, \tilde{r}_{t|t-1}^p) + \sum_{\mathbf{z}_t \in \mathcal{Z}_t} \frac{p_{D,t}(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, \tilde{r}_{t|t-1}^p) f_{t|t}(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^p, \tilde{r}_{t|t-1}^p)}{\kappa_t(\mathbf{z}_t) + \sum_{i=1}^{J_{t|t-1}} p_{D,t}(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^i, \tilde{r}_{t|t-1}^i) f_{t|t}(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^i, \tilde{r}_{t|t-1}^i)} \tilde{\omega}_{t|t-1}^i \right] \tilde{\omega}_{t|t-1}^p, \quad p = 1, \dots, J_{t|t-1}$$

重采样前向更新后的粒子集合  $\{\tilde{\omega}_{t|t}^p, \tilde{\mathbf{x}}_{t|t}^p, \tilde{r}_{t|t}^p\}_{p=1}^{J_{t|t-1}}$ , 可得  $\{\frac{\tilde{\omega}_{t|t}^p}{\hat{N}_{t|t}}, \tilde{\mathbf{x}}_{t|t}^p, \tilde{r}_{t|t}^p\}_{p=1}^{J_{t|t-1}}$ , 其中  $\hat{N}_{t|t} = \sum_{p=1}^{J_{t|t-1}} \tilde{\omega}_{t|t}^p$  即为  $t$  时刻多目标个数的滤波值.

可得  $t$  时刻 MM-PHD 滤波值的粒子描述为  $D_{t|t}(\mathbf{x}_t, r_t | \mathcal{Z}_{1:t}) = \sum_{p=1}^{J_t} \tilde{\omega}_t^p \delta(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t^p, r_t - \tilde{r}_t^p)$ .

end for  $t$ .

步骤 2. 后向更新步.

for  $t = k-1, \dots, k-l$  do, for  $p = 1, \dots, J_t$  do:

根据式 (13) 计算平滑粒子权重

$$\tilde{\omega}_{t|k}^p = \underbrace{\tilde{\omega}_{t|t}^p}_{\text{filtered}} \left( 1 - p_{S,t+1|t}(\tilde{\mathbf{x}}_t^p, \tilde{r}_t^p) + \sum_{q=1}^{J_{t+1}} \underbrace{\frac{\tilde{\omega}_{t+1|k}^q f_{t+1|t}(\tilde{r}_{t+1}^q | \tilde{r}_t^p) f_{t+1|t}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^q | \tilde{\mathbf{x}}_t^p, \tilde{r}_{t+1}^q)}{\tilde{\omega}_{t+1|t}^{*q}}}_{\text{predicted}} \right)$$

其中  $\tilde{\omega}_{t+1|t}^{*q} = \gamma_{t+1}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^q, \tilde{r}_{t+1}^q) + \sum_{i=1}^{J_t} \tilde{\omega}_{t|t}^i (p_{D,t+1|t}(\tilde{\mathbf{x}}_t^i, \tilde{r}_t^i) f_{t+1|t}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i | \tilde{\mathbf{x}}_t^i, \tilde{r}_{t+1}^i) + \beta_{t+1|t}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}^i | \tilde{\mathbf{x}}_t^i, \tilde{r}_{t+1}^i))$

end for  $p$ ;

重采样平滑后的粒子集合  $\{\frac{\tilde{\omega}_{t|k}^p}{\hat{N}_{t|k}}, \tilde{\mathbf{x}}_t^p, \tilde{r}_t^p\}_{p=1}^{J_t}$ , 可得  $\{\frac{\tilde{\omega}_{t|k}^p}{\hat{N}_{t|k}}, \tilde{\mathbf{x}}_t^p, \tilde{r}_t^p\}_{p=1}^{J_t}$ , 其中  $\hat{N}_{t|k} = \sum_{p=1}^{J_t} \tilde{\omega}_{t|k}^p$  为  $t$  时刻多目标个数估计的平滑值.

可得  $t$  时刻 MM-PHD 平滑值的粒子描述为  $D_{t|k}(\mathbf{x}_t, r_t | \mathcal{Z}_{1:k}) = \sum_{p=1}^{J_t} \tilde{\omega}_{t|k}^p \delta(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t^p, r_t - \tilde{r}_t^p)$ .

end for  $t$ .

步骤 3. 多目标状态提取步.

聚类粒子集合  $\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-l|k}^p, \tilde{r}_{k-l|k}^p\}_{p=1}^{J_{k-l}}$ , 可得  $k-l$  时刻多目标状态集合的平滑值  $\{\hat{\mathbf{x}}_{k-l|k}^n, \hat{r}_{k-l|k}^n\}_{n=1}^{\hat{N}_{k-l|k}}$ ,

其中  $\hat{N}_{k-l|k}$  为  $k-l$  时刻多目标个数的平滑估计.

输出.  $k-l$  时刻多目标的个数平滑值  $\hat{N}_{k-l|k}$  和状态平滑值  $\{\hat{\mathbf{x}}_{k-l|k}^n, \hat{r}_{k-l|k}^n\}_{n=1}^{\hat{N}_{k-l|k}}$ .

$Q_{2,k}^n =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} \sigma_{1,w}^2 & \frac{\Delta t^3}{2} \sigma_{1,w}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^3}{2} \sigma_{1,w}^2 & \Delta t^2 \sigma_{1,w}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} \sigma_{1,w}^2 & \frac{\Delta t^3}{2} \sigma_{1,w}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} \sigma_{1,w}^2 & \Delta t^2 \sigma_{1,w}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t^2 \sigma_{2,w}^2 \end{bmatrix}$$

式中  $\sigma_{r,w}$  为第  $r$  个模型的过程噪声标准差. 本仿真中令  $\sigma_{1,w} = 0.1 \text{ m/s}^2$ ,  $\sigma_{2,w} = 1 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$ .

令模型间的转移概率为  $f_{k|k-1}(r_k = 1 | r_{k-1} = 1) = f_{k|k-1}(r_k = 2 | r_{k-1} = 2) = 0.8$ ,  $f_{k|k-1}(r_k = 1 | r_{k-1} = 2) = f_{k|k-1}(r_k = 2 | r_{k-1} = 1) = 0.2$ .

设传感器位于坐标原点  $[0, 0]^T$ , 它可获得目标的距离和角度测量,  $\mathbf{z}_k = [\rho_k, \varphi_k]^T$ . 若时刻  $k$  第  $m$  ( $m = 1, \dots, M_k$ ) 个测量  $\mathbf{z}_k^m$  由第  $n$  个目标产生, 则根据传感器观测模型可得

$$\mathbf{z}_k^m = \begin{bmatrix} \rho_k^m \\ \varphi_k^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k^n)^2 + (y_k^n)^2} \\ \arctan(\frac{y_k^n}{x_k^n}) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k^m \quad (15)$$

上式中,  $\mathbf{v}_k^m$  为传感器观测噪声, 假设其为独立同分布的零均值高斯白噪声, 协方差阵为  $R_k = \text{diag}\{\sigma_\rho^2, \sigma_\varphi^2\}$ , 其中  $\text{diag}\{\cdot\}$  表示对角矩阵,  $\sigma_\rho, \sigma_\varphi$  分别表示距离和角度测量的标准差. 本仿真中令  $\sigma_\rho = 20$  m,  $\sigma_\varphi = 0.02$  rad. 令传感器检测概率为  $p_{D,k}(\mathbf{x}_k, r_k) = p_D = 0.95$ .

设杂波为泊松点过程, 强度为  $\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda_c f_c(\mathbf{z}_k)$ . 本仿真中令  $\lambda_c = 50$ ,  $f_c(\mathbf{z}_k) = \mathcal{U}(\mathbf{z}_k)$ , 其中  $\mathcal{U}(\cdot)$  表示均匀分布的概率密度.

本仿真中令目标的真实运动轨迹如图 1 所示.

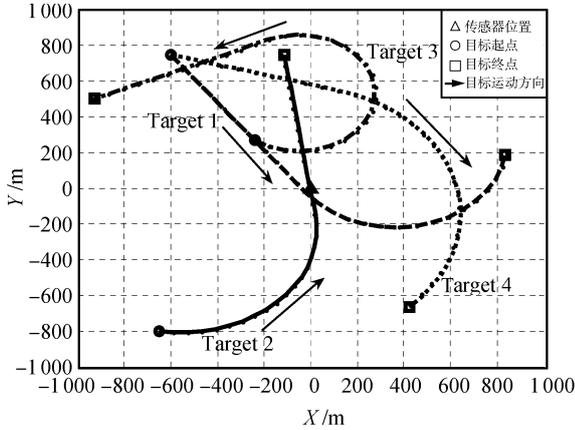


图 1 目标的真实运动轨迹

Fig. 1 True target trajectories

在图 1 中, Target 1 出生于第 1 秒, 消亡于第 30 秒, 它在 1 秒~15 秒内作匀速运动, 在 16 秒~30 秒内作转弯机动; Target 2 出生于第 1 秒, 消亡于第 35 秒, 它在 1 秒~20 秒内作转弯机动, 在 21 秒~35 秒内作匀速运动; Target 3 在第 10 秒时由 Target 1 它生, 在第 42 秒时消亡, 它在 10 秒~30 秒内作转弯机动, 在 31 秒~42 秒内作匀速运动; Target 4 出生于第 20 秒, 消亡于第 50 秒, 它在 20 秒~30 秒内作匀速运动, 在 31 秒~50 秒内作转弯机动.

## 4.2 算法性能分析

在 MM-PHD 平滑器中, 令时刻  $k$  新生目标强度为

$$\gamma_k(\mathbf{x}_k, r_k) = \lambda_\gamma f_\gamma(\mathbf{x}_k|\psi_\gamma) f_\gamma(r_k) \quad (16)$$

上式中  $\lambda_\gamma$  为平均每帧监控区域内新生目标的个数.  $f_\gamma(\mathbf{x}_k|\psi_\gamma)$  为新生目标状态的概率密度,  $\psi_\gamma$  为其参数集合.  $f_\gamma(r_k)$  表示新生目标的运动模型为  $r_k$  的概率. 本仿真中令  $\lambda_\gamma = 0.1$ ,  $f_\gamma(\mathbf{x}_k|\psi_\gamma) = a_\gamma^1 \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_\gamma^1, P_\gamma^1) + a_\gamma^2 \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_\gamma^2, P_\gamma^2)$ , 其中  $\psi_\gamma = \{a_\gamma^1, a_\gamma^2, \mathbf{m}_\gamma^1, \mathbf{m}_\gamma^2, P_\gamma^1, P_\gamma^2\}$ , 参数  $a_\gamma^1 = a_\gamma^2 = 0.5$ ,  $\mathbf{m}_\gamma^1 = [200, 0, 700, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{m}_\gamma^2 = [-600, 0, 600, 0, 0]^T$ ,  $P_\gamma^1 = P_\gamma^2 = \text{diag}\{400, 400, 400, 400, 0.01\}$ ,  $f_\gamma(r_k = 1) =$

$f_\gamma(r_k = 2) = 0.5$ .

令时刻  $k$  它生目标强度为

$$\beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k, r_k|\mathbf{x}_{k-1}, \psi_\beta, r_{k-1}) = \lambda_\beta f_\beta(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \psi_\beta) f_{k|k-1}(r_k|r_{k-1}) \quad (17)$$

上式中  $\lambda_\beta$  为平均每帧监控区域内它生目标的个数.  $f_\beta(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \psi_\beta)$  为它生目标状态的概率密度,  $\psi_\beta$  为其参数集合;  $f_{k|k-1}(r_k|r_{k-1})$  为前述已给定的模型转移概率. 本仿真中令  $\lambda_\beta = 0.05$ ;  $f_\beta(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \psi_\beta) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{d}_\beta, P_\beta)$ , 其中  $\psi_\beta = \{\mathbf{d}_\beta, P_\beta\}$ , 参数  $\mathbf{d}_\beta = [0, 0, 0, 0, 0]^T$ ,  $P_\beta = \text{diag}\{400, 100, 400, 100, 0.01\}$ .

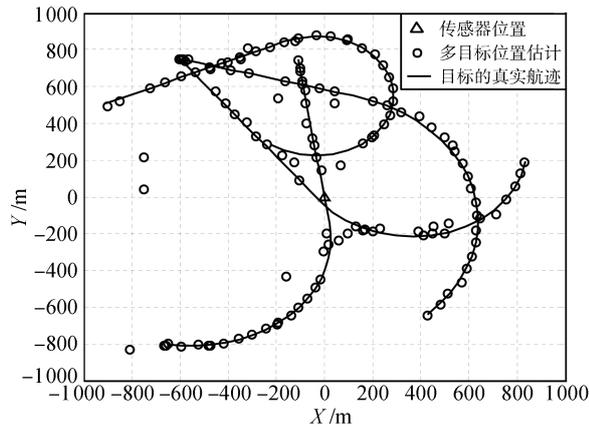
设目标存活概率  $p_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, r_k) = 0.95$ .

为比较起见, 我们分别采用一个 MM-PHD 滤波器器和两个 MM-PHD 平滑器估计多目标的个数和状态. 在本仿真中, 令平滑器 1 的滞后时间长度为  $l = 3$  秒, 令平滑器 2 的滞后时间长度为  $l = 5$  秒. 平均每个目标采用 1000 个粒子进行跟踪. 令预测模型的建议分布  $\pi_k(\cdot)$  和  $\mu_k(\cdot)$  分别取为模型转移概率  $f_{k|k-1}(r_k|r_{k-1})$  和模型出生概率  $f_\gamma(r_k)$ ; 令预测状态的建议分布  $\vartheta_k(\cdot)$  和  $\zeta_k(\cdot)$  分别取为状态转移概率  $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$  和状态出生概率密度  $f_\gamma(\mathbf{x}_k|\psi_\gamma)$ . K 均值算法被用于聚类重采样后的粒子集合, 以提取多目标的状态. 考虑到传感器测量噪声满足高斯分布, 故我们采用快速高斯变换技术计算平滑器的反向更新公式, 以加快平滑速度. 分别采用上述三种方法进行 MC 仿真实验, 结果如下:

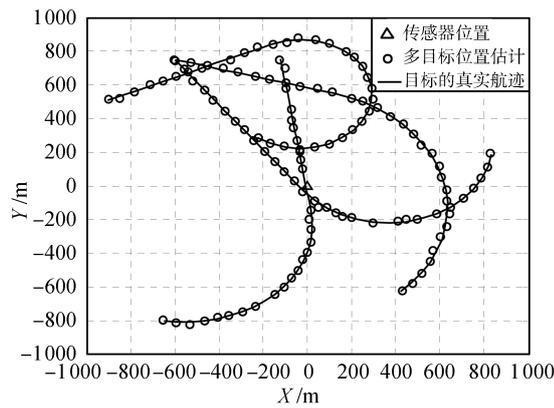
首先, 图 2(a), 图 2(b) 和图 2(c) 分别展示了其中一次仿真实验中 MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 以及 MM-PHD 平滑器 2 的多目标位置估计.

由图 2(a)~2(c) 可以看出, 在目标发生或未发生机动时, 三者均能正常地估计多目标的个数和位置. 通过比较还可进一步看出, 由于受杂波影响, MM-PHD 滤波器相比 MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 会产生更多的虚假目标估计, 并且在目标机动时, MM-PHD 滤波器更容易丢失目标或出现较显著的估计误差. 相反, MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的多目标个数和位置估计效果要明显优于 MM-PHD 滤波器. 前两者不但能产生更少的虚假目标估计和丢失目标估计, 而且在目标机动时, 平滑器的目标位置估计更加接近于真实航迹. 由于 MM-PHD 平滑器 2 相比 MM-PHD 平滑器 1 能够利用更多的滞后时间测量, 因此如图 2(b) 和图 2(c) 所示, 前者的估计效果略优于后者.

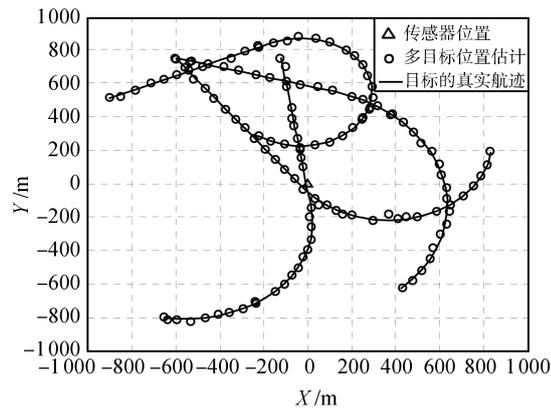
图 3(a), 图 3(b) 和图 3(c) 分别展示了经 100 次 MC 仿真实验平均后三者的多目标个数估计随时间变化曲线. 由图 3(a)~3(c) 可见, 三者的多目标



(a) MM-PHD 滤波器  
(a) MM-PHD filter



(b) MM-PHD 平滑器 1  
(b) MM-PHD smoother 1

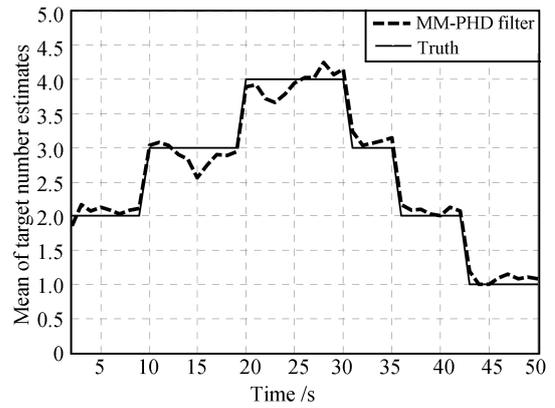


(c) MM-PHD 平滑器 2  
(c) MM-PHD smoother 2

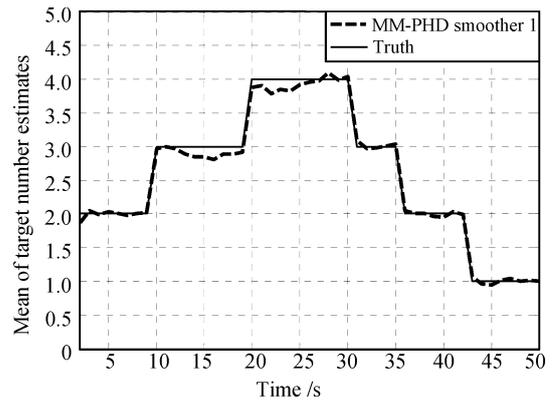
图 2 多目标位置估计 (单次实验)

Fig. 2 Estimates of target positions in one trial

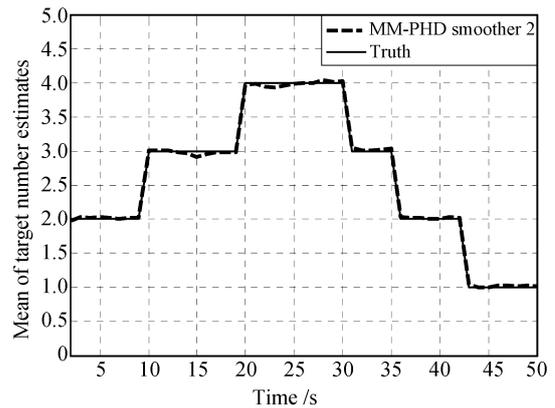
个数估计均较接近于真实值. 但是由于杂波和目标机动的影响, MM-PHD 滤波器的多目标个数估计在目标机动时刻会产生显著的偏差. 相反, MM-PHD 平滑器受目标机动的影响较小, 多目标个数估计曲线的波动相对较弱. 因此, 相比 MM-PHD 滤波器,



(a) MM-PHD 滤波器  
(a) MM-PHD filter



(b) MM-PHD 平滑器 1  
(b) MM-PHD smoother 1



(c) MM-PHD 平滑器 2  
(c) MM-PHD smoother 2

图 3 多目标个数估计随时间变化曲线 (经 100 次 MC 平均)

Fig. 3 100 MC run average of target number estimates versus time

MM-PHD 平滑器的多目标个数估计更加接近于真实值. 并且 MM-PHD 平滑器 2 的多目标个数估计还要略优于 MM-PHD 平滑器 1.

为了更进一步比较三者的多目标个数估计精度, 图 4 展示了经 100 次 MC 仿真实验得到的多目标个

数估计的标准差 (Standard deviations, STD) 随时间变化曲线.

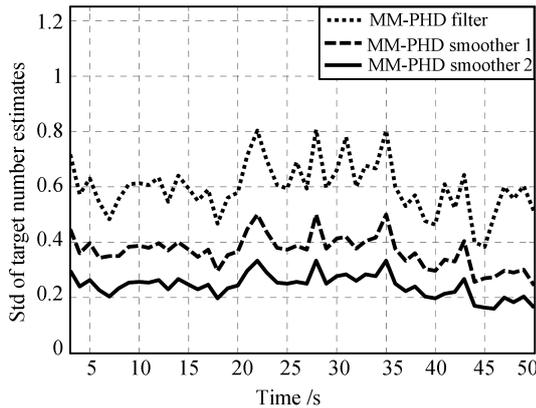


图 4 经 100 次 MC 实验得到的多目标个数估计的标准差随时间变化曲线

Fig. 4 100 MC run average of standard deviations of target number estimates versus time

标准差越大, 说明单次估计的波动越大, 相应的估计精度越低. 由图 4 可以看出, 在三者中, MM-PHD 滤波器的多目标个数估计精度相对最差, MM-PHD 平滑器 2 的多目标个数估计精度相对最好, MM-PHD 平滑器 1 居中. 它反映出 MM-PHD 平滑器的多目标个数估计比 MM-PHD 滤波器的更加可信赖. 另外还可看出, 由于受杂波、目标个数变化、目标机动等影响, 图 4 中的三条曲线都会随时间波动. 同样, MM-PHD 平滑器的波动相对 MM-PHD 滤波器的较弱, 它说明前者受上述因素的影响较小.

由于 PHD 滤波器和 PHD 平滑器没有进行数据关联, 因此通常的均方根误差 (Root mean square error, RMSE) 和目标航迹丢失概率等指标不能直接用于评价 PHD 滤波或平滑算法的性能. 下面我们通过 Wasserstein 距离 (Wasserstein distance, WD)<sup>[35]</sup> 和圆位置误差概率 (Circular position error probability, CPEP)<sup>[36]</sup> 来定量地分析两算法的估计误差.

给定时刻  $k$  实际的和估计的多目标状态集合  $\mathcal{X}_k$  和  $\hat{\mathcal{X}}_k$ , WD 定义为

$$WD_k(\hat{\mathcal{X}}_k, \mathcal{X}_k) = \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{|\hat{\mathcal{X}}_k|} \sum_{j=1}^{|\mathcal{X}_k|} C_k^{ij} \|\hat{\mathbf{x}}_k^i - \mathbf{x}_k^j\|_2^2} \quad (18)$$

上式中,  $C_k$  称为系数矩阵, 它满足  $C_k^{ij} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, |\hat{\mathcal{X}}_k|, j = 1, \dots, |\mathcal{X}_k|$ ), 并且  $\sum_{j=1}^{|\mathcal{X}_k|} C_k^{ij} = 1/|\hat{\mathcal{X}}_k|$ ,  $\sum_{i=1}^{|\hat{\mathcal{X}}_k|} C_k^{ij} = 1/|\mathcal{X}_k|$ , 其中  $|\cdot|$  表示集合的势,  $\|\cdot\|_2$  表示 2 范数. 当  $\mathcal{X}_k$  或  $\hat{\mathcal{X}}_k$  为空集时, WD 没

有定义; 当它们的元素个数相同时, WD 为最优关联下的距离.

图 5 展示了经 100 次 MC 仿真实验平均后得到的多目标位置估计的 WD 随时间变化曲线.

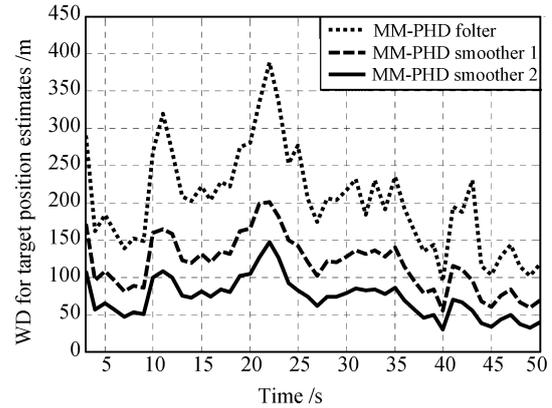


图 5 多目标位置估计的 WD 随时间变化曲线 (经 100 次 MC 平均)

Fig. 5 100 MC run average of WD of multi-target positions versus time

WD 惩罚目标个数估计错误时的结果, 它在目标个数估计不正确的时刻会出现峰值. 如图 5 所示, 由于 MM-PHD 平滑器 2 的多目标个数估计精度最高, 因此它的 WD 最小. 相反, 既然 MM-PHD 滤波器的多目标个数估计精度最差, 相应其 WD 最大. 由图 5 还可以看出, 由于受杂波、目标个数变化、目标机动等影响, 三者的 WD 会随时间出现波动, 其中 MM-PHD 平滑器 2 的波动幅度最小, MM-PHD 平滑器 1 的次之, MM-PHD 滤波器的最大. 这说明相比 MM-PHD 滤波器, MM-PHD 平滑器受上述因素的影响相对较弱, 估计精度更加稳定.

时刻  $k$  多目标的 CPEP 定义为

$$CPEP_k(r) = \frac{1}{|\mathcal{X}_k|} \sum_{\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}_k} \text{Prob} \left\{ \|H_k \hat{\mathbf{x}}_k - H_k \mathbf{x}_k\|_2 > r, \forall \hat{\mathbf{x}}_k \in \hat{\mathcal{X}}_k \right\}, \quad H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

上式中,  $r$  为圆半径,  $H_k \mathbf{x}_k$  和  $H_k \hat{\mathbf{x}}_k$  分别表示笛卡尔坐标系下真实的和估计的目标位置向量. 本仿真中令  $r = 25$  m.

图 6 展示了经 100 次 MC 仿真实验平均后得到的多目标位置估计的 CPEP 随时间变化曲线.

CPEP 反映了目标位置估计在以该目标真实位置为中心,  $r$  为半径的圆内丢失的概率. CPEP 越小

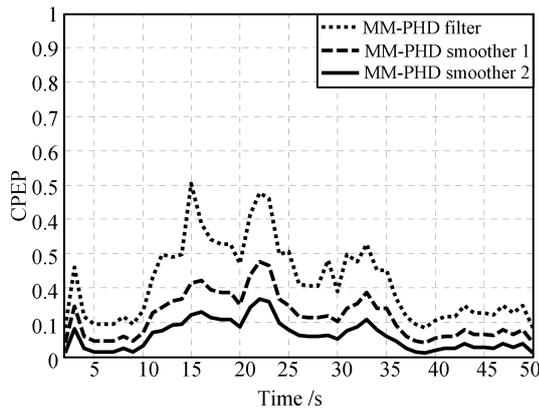


图6 多目标位置估计的 CPEP 随时间变化曲线 (经 100 次 MC 平均)

Fig. 6 100 MC run average of CPEP versus time

说明目标位置估计在该范围内丢失的概率越小。由图 6 可以清楚地看出, MM-PHD 平滑器 2 的 CPEP 相对最小, MM-PHD 滤波器的 CPEP 相对最大。另外还可看出, 在目标机动的时刻, 三者的 CPEP 都会不同程度地增大, 其中 MM-PHD 滤波器的增大幅度最显著。它说明相对 MM-PHD 平滑器, MM-PHD 滤波器受目标机动的影响最明显, 它在目标机动时最容易丢失目标。

需要说明的是, 由于 PHD 滤波器和 PHD 平滑器没有进行数据关联, 因此它不能形成各个目标的航迹。故我们无法展示每个目标在每个时刻所对应的运动模型。

我们采用平均每步所耗费的 CPU 时间比较三者的计算量大小。用于测试算法的 PC 机的 CPU 为 1.83 GHz AMD Athlon (tm) XP 2500+, RAM 为 512 MB。通过 100 次 MC 仿真, 可得 MM-PHD 滤波器平均耗时 0.92 秒/步; MM-PHD 平滑器 1 平均耗时 1.51 秒/步; MM-PHD 平滑器 2 平均耗时 3.24 秒/步。它说明 MM-PHD 平滑器比 MM-PHD 滤波器需要耗费更多的计算时间。

图 3~6 所展示的是经 100 次 MC 仿真实验得到的 MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的目标个数估计。目标个数估计的标准差、WD 以及 CPEP 随时间变化曲线反映了它们三者的局部性能。从以上四幅图可以清楚地看出在目标机动时刻三者性能的变化。

下面, 为了比较 MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的整体性能, 我们将上述仿真场景下经 100 次 MC 仿真实验所获得的三者的多目标个数估计的标准差、WD、CPEP 和每步 CPU 耗时在整个多目标监控周期 (长度为  $T = 50$  秒) 内分别进行平均, 并将这些性能指标的时间平均值列于表 2。

表 2 MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的时间平均性能比较

Table 2 Time averaged performance comparison for MM-PHD filter, MM-PHD smoother 1, and MM-PHD smoother 2

	多目标个数估计的标准差	WD (m)	CPEP (步)	CPU 耗时 (s)
MM-PHD 滤波器	0.61	210.7	0.23	0.92
MM-PHD 平滑器 1	0.36	140.2	0.14	1.51
MM-PHD 平滑器 2	0.23	76.8	0.08	3.24

通过表 2 可以清楚地看到, 在上述仿真条件下, MM-PHD 平滑器的整体性能也要优于 MM-PHD 滤波器, 但它存在时间滞后, 并且需要耗费更多的计算时间。

为了进一步比较杂波密度对 MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的整体性能的影响, 我们假设前述的多目标运动轨迹和传感器测量模型不变, 设传感器检测概率始终保持为  $p_D = 0.95$ , 只是将平均每帧的杂波个数  $\lambda_c$  由 50 逐渐增加到 500。其中  $\lambda_c$  每增加 50, 重复进行 100 次 MC 仿真实验。图 7~10 分别给出了三者的多目标个数估计的标准差, WD, CPEP 和每步 CPU 耗时的时间平均值随  $\lambda_c$  的变化曲线。

通过图 7~10 可以清楚地看到, 当杂波密度增大时, MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的性能均会出现不同程度地下降, 并且它们都还会耗费更多的计算时间。在它们三者中, 当杂波密度逐渐增大时, MM-PHD 平滑器 2 的性能始终保持最好, 但它所耗费的计算时间最多; MM-PHD 平滑器 1 的性能和计算代价次之; MM-PHD 滤波器的性能最差, 但它所耗费的计算时间最少。另外, 这些图还可以潜在地反映出, 当杂波密度越大时, MM-PHD 滤波器和 MM-PHD 平滑器的性能衰退得越快; 同时 MM-PHD 平滑器对 MM-PHD 滤波器的性能改善效果似乎要变得略好。

为了进一步比较传感器检测概率对 MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的整体性能的影响, 我们同样假设前述的多目标运动轨迹和传感器测量模型不变, 设平均每帧的杂波个数始终保持为  $\lambda_c = 50$ , 只是将传感器检测概率  $p_D$  由 0.95 逐渐减小到 0.45。其中  $p_D$  每减小 0.1, 重复进行 100 次 MC 仿真实验。图 11~13 分别给出了三者的多目标个数估计的标准差、WD 和 CPEP 的时间平均值随  $p_D$  的变化曲线。需要说明的是, 当其他仿真条件保持不变时, 三者平均每步所耗费的 CPU 时间不随  $p_D$  发生变化。

通过图 11~13 可以清楚地看到, 当传感器检测

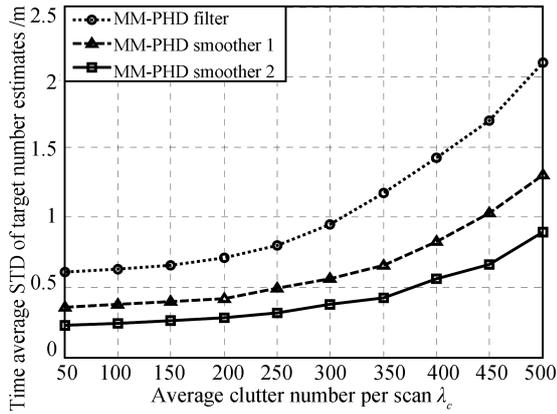


图7 目标个数估计标准差的时间平均值随  $\lambda_c$  的变化曲线  
 Fig. 7 Time average of standard deviations of target number estimates versus  $\lambda_c$

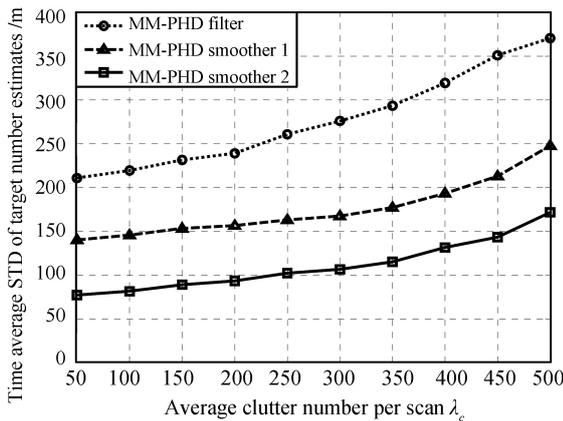


图8 WD的时间平均值随  $\lambda_c$  的变化曲线  
 Fig. 8 Time average of WD of multi-target positions versus  $\lambda_c$

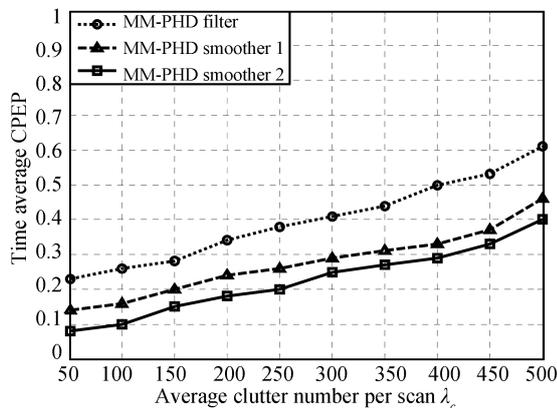


图9 CPEP的时间平均值随  $\lambda_c$  的变化曲线  
 Fig. 9 Time average of CPEP versus  $\lambda_c$

概率降低时, MM-PHD 滤波器、MM-PHD 平滑器 1 和 MM-PHD 平滑器 2 的性能均会出现不同程度地下降. 同样, 在它们三者中, 当传感器检测概率逐

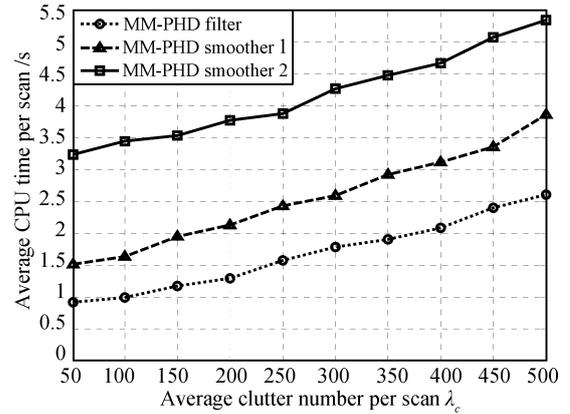


图10 每步 CPU 耗时的时间平均值随  $\lambda_c$  的变化曲线  
 Fig. 10 Time average of CUP time per scan versus  $\lambda_c$

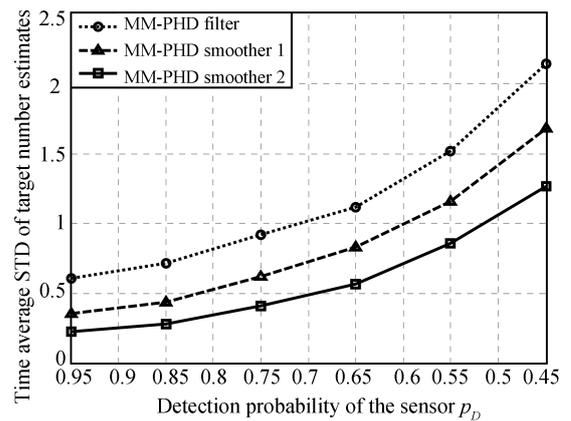


图11 目标个数估计标准差的时间平均值随  $p_D$  的变化曲线  
 Fig. 11 Time average of standard deviations of target number estimates versus  $p_D$

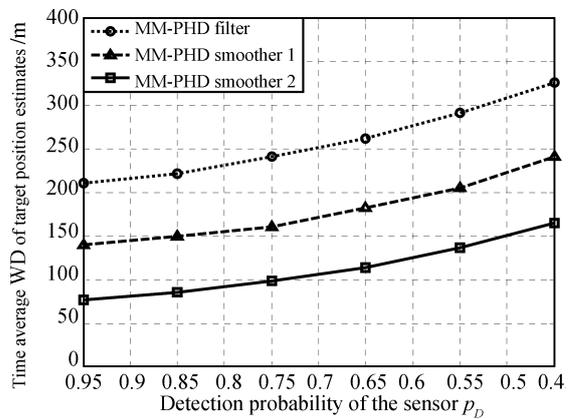


图12 WD的时间平均值随  $p_D$  的变化曲线  
 Fig. 12 Time average of WD of multi-target positions versus  $p_D$

渐降低时, MM-PHD 平滑器 2 的性能始终保持最好; MM-PHD 平滑器 1 的性能次之; MM-PHD 滤波器的性能最差. 同样, 这些图也潜在地反映出, 当

传感器检测概率越低时, MM-PHD 滤波器和 MM-PHD 平滑器的性能衰退得越快; 同时 MM-PHD 平滑器对 MM-PHD 滤波器的性能改善效果似乎要变得略好。

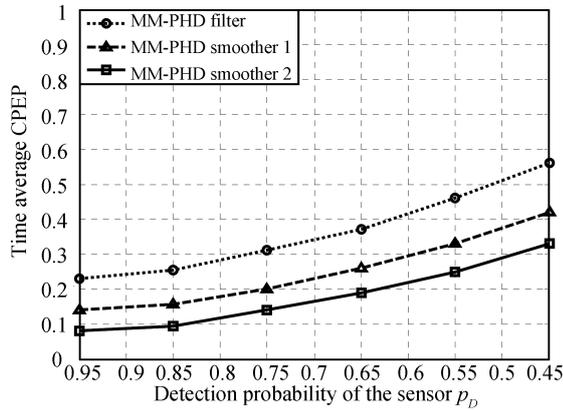


图 13 CPEP 的时间平均值随  $p_D$  的变化曲线

Fig. 13 Time average of CUP time per scan versus  $p_D$

#### 4.2.1 仿真实验小结

综上, 通过上述一系列的仿真实验我们可以得出如下结论: 对于多个机动目标跟踪问题, 当杂波密度较大或传感器检测概率较低时, MM-PHD 滤波器的性能会显著降低。这时采用 MM-PHD 平滑器能较好地改善 MM-PHD 滤波器的性能, 但所要付出的代价是 MM-PHD 平滑器存在时间滞后, 并且它还需要耗费更多的计算时间。另外, MM-PHD 平滑器的滞后时间长度可根据所要求的估计精度、所允许的计算代价和滞后时间等因素来折中选取。

## 5 结论和后续工作

本文针对杂波环境下多个机动目标跟踪问题, 提出用 MM-PHD 平滑器提高 MM-PHD 滤波器的估计效果, 其中 MM-PHD 平滑器的后向更新公式可根据 PHD 的物理空间描述法推导获得。仿真实验表明, 尤其在目标机动较强、杂波密度较大以及传感器检测概率较低时, MM-PHD 平滑器的多目标个数和状态估计精度要显著优于 MM-PHD 滤波器, 但是需要付出的代价是 MM-PHD 平滑器存在时间滞后, 并且需要耗费更多的计算代价。作者后续的工作主要包括:

- 1) 在利用 MM-PHD 平滑器和 MM-PHD 滤波器对多个机动目标进行跟踪的同时, 如何更好地形成多目标航迹, 目前是一个亟待解决的问题;
- 2) 如何将本文的交互式多模型方法和平滑方法扩展到势概率假设密度 (Cardinalized PHD, CPHD) 滤波器<sup>[37-38]</sup> 仍值得进一步研究。

## References

- 1 Goodman I, Mahler R, Nguyen H. *Mathematics of Data Fusion*. Norwood: Kluwer Academic, 1997
- 2 Mahler R. An Introduction to Multisource-Multitarget Statistics and Applications, Technical Report, Lockheed Martin Technical Monograph, USA, 2000
- 3 Mahler R. Random set theory for target tracking and identification. *Data Fusion Hand Book*. Boca Raton: CRC Press, 2001. 1-33
- 4 Mahler R. *Statistical Multisource Multitarget Information Fusion*. Norwood: Artech House, 2007
- 5 Mahler R. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4): 1152-1178
- 6 Vo B N, Singh S, Doucet A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, **41**(4): 1224-1245
- 7 Vo B N, Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(11): 4091-4104
- 8 Bar-Shalom Y. *Tracking and Data Association*. San Diego: Academic Press, 1988
- 9 Bar-Shalom Y. *Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques*. Storrs: YBS Publishing, 1995
- 10 Singer R A, Stein J J. An optimal tracking filter for processing sensor data of imprecisely determined origin in surveillance system. In: *Proceedings of the 10th Conference on Decision and Control*. Washington D. C., USA: IEEE, 1971. 171-175
- 11 Fortmann T E, Bar-Shalom Y, Scheffe M. Sonar tracking of multiple targets using joint probabilistic data association. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 1983, **8**(3): 173-184
- 12 Blackman S. Multiple hypothesis tracking for multitarget tracking. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, Part 2*, 2004, **19**(1): 5-18
- 13 Clark D, Godsill S. Group target tracking with the Gaussian mixture probability hypothesis density filter. In: *Proceedings of the International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing*. Washington D. C., USA: IEEE, 2007. 149-154
- 14 Maehlich M, Schweiger R, Ritter W, Dietmayer K. Multi-sensor vehicle tracking with the probability hypothesis density filter. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Information Fusion*. Florence, Italy: IEEE, 2006. 1-8
- 15 Tobias M, Lanterman A D. Probability hypothesis density-based multitarget tracking with bistatic range and doppler observations. *IEE Proceedings of Radar, Sonar and Navigation*, 2005, **152**(3): 195-223
- 16 Clark D, Tena R I, Petillot Y, Bell J. Particle PHD filter multiple target tracking in sonar image. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(1): 409-416
- 17 Maggio E, Taj M, Cavallaro A. Efficient multitarget visual tracking using random finite sets. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2008, **18**(8): 1016-1027
- 18 Wang Y D, Wu J K, Kassim A, Huang W. Data-driven probability hypothesis density filter for visual tracking. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2008, **18**(8): 1085-1095

- 19 Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking, part V: multiple-model methods. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, **41**(4): 1255–1321
- 20 Punithakumar K, Kirubarajan T, Sinha A. Multiple-model probability hypothesis density filter for tracking maneuvering targets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, **44**(1): 87–98
- 21 Vo B N, Pasha A, Tuan H D. A Gaussian mixture PHD filter for nonlinear jump Markov models. In: Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA: IEEE, 2006. 3162–3166
- 22 Erdinc O, Willett P, Bar-Shalom Y. A physicalspace approach for the probability hypothesis density and cardinalized probability hypothesis density filters. In: Proceedings of the Signal and Data Processing of Small Targets. Kissimmee, USA: SPIE, 2006. 1–12
- 23 Han Chong-Zhao, Zhu Hong-Yan, Duan Zhan-Sheng. *Multisource Information Fusion*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006  
(韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合. 北京: 清华大学出版社, 2006)
- 24 Tong Zhong-Xiang, Lu Yan-Long. Computing damage model based on value of undershooting and second damage. *Journal of System Simulation*, 2008, **20**(12): 3330–3332  
(童中翔, 芦艳龙. 基于脱靶量和二次损伤的毁伤定量计算模型. 系统仿真学报, 2008, **20**(12): 3330–3332)
- 25 Isard M, Blake A. A smoothing filter for condensation. In: Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision. Freiburg, Germany: Springer, 1998. 767–781
- 26 Bresler Y. Two-filter formula for discrete-time non-linear Bayesian smoothing. *International Journal of Control*, 1986, **43**(2): 629–641
- 27 Godsill S, Doucet A, West M. Maximum a posteriori sequence estimation using Monte Carlo particle filters. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2001, **53**(1): 82–96
- 28 Doucet A, Gordon N, Krishnamurthy V. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(3): 613–624
- 29 Kanungo T, Mount D M, Netanyahu N, Piatko C, Silverman R, Wu A Y. A local search approximation algorithm for K-means clustering. In: Proceedings of the 18th Annual Symposium on Computational Geometry. Barcelona, Spain: ACM, 2002. 10–18
- 30 Clark D, Bell J. Multi-target state estimation and track continuity for the particle PHD filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1441–1453
- 31 Greengard L, Sun X. A new version of the fast Gauss transform. *Documenta Mathematica*, 1998, (3): 575–584
- 32 Gray A, Moore A. *N-body problems in statistical learning. Advances in Neural Information Processing Systems*. Massachusetts: MIT Press, 2001
- 33 Gray A, Moore A. Rapid evaluation of multiple density models. *Artificial Intelligence and Statistics*. Florida: University of Toronto, 2003
- 34 Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking: dynamic models. In: Proceedings of the Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. Orlando, USA: SPIE, 2000. 212–235
- 35 Hoffman J, Mahler R. Multitarget miss distance via optimal assignment. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 2004, **34**(3): 327–336

- 36 Ruan Y, Willett P. The turbo PMHT. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, **40**(4): 1388–1398
- 37 Mahler R. PHD filters of higher order in target number. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(3): 1523–1543
- 38 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. Analytic implementations of the cardinalized probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(7): 3553–3567



**连峰** 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所讲师。主要研究方向为信息融合与目标跟踪。本文通信作者。E-mail: lianfeng1981@gmail.com  
(LIAN Feng Lecturer at the Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers information fusion and target tracking. Corresponding author of this paper.)



**韩崇昭** 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授。主要研究方向为多源信息融合, 随机控制与自适应控制, 非线性频谱分析。  
E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn  
(HAN Chong-Zhao Professor, Ph. D. in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers multi-source information fusion, stochastic control and adaptive control, and nonlinear spectral analysis.)



**刘伟峰** 杭州电子科技大学自动化学院讲师。主要研究方向为信息融合与目标跟踪。  
E-mail: dashan000.liu@gmail.com  
(LIU Wei-Feng Lecturer at the School of Automation, Hangzhou Dianzi University. His research interest covers information fusion and target tracking.)



**元向辉** 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系讲师。主要研究方向为信息融合与目标跟踪。  
E-mail: xhyuan@mail.xjtu.edu.cn  
(YUAN Xiang-Hui Lecturer in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers information fusion and target tracking.)