

H_∞ 回路成形设计的鲁棒性

何朕¹ 孟范伟¹ 刘伟^{1,2} 王广雄¹

摘要 回路成形法设计中是用互质因子摄动来表示系统不确定性的. 文中对这种互质因子摄动进行了较详尽的分析, 指出系统中的弱阻尼模态会增大互质因子摄动的范数, 因而降低了允许的摄动值, 使系统实际上失去了鲁棒性. 所以 H_∞ 回路成形设计并不一定像所期望的那样具有鲁棒性. 文中并用一个参数摄动下的鲁棒性为例来进行说明.

关键词 回路成形, 互质因子摄动, 弱阻尼模态, 鲁棒设计

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00890

Robustness of H_∞ Loop Shaping Design

HE Zhen¹ MENG Fan-Wei¹ LIU Wei^{1, 2}
WANG Guang-Xiong¹

Abstract The uncertainty of the system in the loop shaping design is represented by coprime factor perturbations. These coprime factor perturbations are analyzed in detail in the paper, and it is pointed out that the lightly damped resonant poles of the plant can increase the norm of the coprime factor perturbation and greatly reduce the size of allowable perturbation. Thus, the robustness of the system is really lost. This means that the H_∞ loop shaping design may not be a robust design as expected. An example with parameter perturbations is also illustrated in the paper.

Key words Loop shaping, coprime factor perturbation, lightly damped mode, robust design

H_∞ 回路成形是指根据要求来指定系统的开环传递函数, 再用 H_∞ 设计来保证系统的稳定性和鲁棒性. 回路成形法中的摄动是互质因子摄动, 一般认为这种摄动的描述更具普遍性^[1-2]. 根据互质因子摄动和回路成形法的理论, 文献 [1-4] 认为只要设计所得的 $\gamma^{-1} \geq 0.2$, 这个设计就具有鲁棒性. 但事实并非如此, 本文将通过实例分析指出, 即使 γ 值满足要求, H_∞ 回路成形设计也可能没有鲁棒性.

1 回路成形法简介

文献中常将开环传递函数称为回路传递函数 (Loop transfer function), 回路成形的设计思想是构造回路传递函数来满足对闭环系统的性能要求. 系统的低频段特性和高频段特性一般可根据性能要求和带宽来直接指定. 具体做法是给对方串联补偿环节, 使其具有所要求的开环特性. 对多入多出系统来说, 传递函数矩阵相乘有左乘和右乘之分, 故串联的补偿环节也分为前补偿 (W_1) 和后补偿 (W_2), 补偿后的对象称为成形的对象 (G_S),

$$G_S = W_2 G W_1 \quad (1)$$

收稿日期 2008-11-05 录用日期 2009-12-29
Manuscript received November 5, 2008; accepted December 29, 2009

国家自然科学基金 (60674102, 60374027) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60674102, 60374027)

1. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150001 2. 济南铸锻所 济南 250022

1. Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001 2. Jinan Foundry and Metal Forming Machinery Institute, Jinan 250022

为了保证成形设计系统的稳定性, 再对 G_S 进行 H_∞ 设计, 设计一 H_∞ 控制器 K_∞ . K_∞ 与 G_S 中的补偿环节构成最终的控制器

$$K = W_1 K_\infty W_2 \quad (2)$$

这种成形设计被称为 H_∞ 回路成形设计.

这里之所以要采用 H_∞ 设计, 是因为 H_∞ 回路成形设计不但能保证系统的稳定性, 而且还具有鲁棒性^[1]. 下面说明中的 H_∞ 设计是针对成形的对象 G_S 来进行的. 为了简化符号, 讨论中将忽略下标 S , 而只用 G 来表示这个成形的对象.

H_∞ 回路成形法中的对象是用互质分解来描述的. 例如, 设采用右互质分解, 则对象就是

$$G = N M^{-1} \quad (3)$$

这里要求采用标称互质分解 (Normalized coprime factorization), 即式 (3) 中的 $N, M \in RH_\infty$ 要满足

$$N \sim N + M \sim M = I \quad (4)$$

式中的波浪号角标表示 $N \sim = [N(-s)]^T$. 式 (4) 等价于要求

$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ 是内矩阵^[5].

当对象是用互质因子来表示时, 摄动的对象就用互质因子的加性摄动来表示, 即

$$G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1} \quad (5)$$

式中 $\Delta_N, \Delta_M \in H_\infty$ 为稳定的传递函数. 图 1 中 G_Δ 就是这个用互质因子的摄动来表示的 (摄动) 对象. 从图 1 可见, 这个对象的不确定性是一入二出, 对应的矩阵表达式为

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \quad (6)$$

这种不确定性就称为互质因子不确定性.

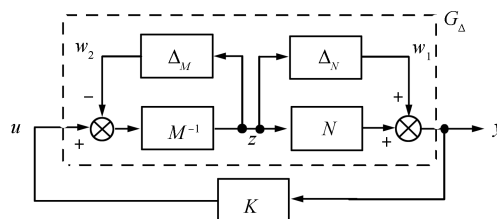


图 1 互质因子不确定性的系统

Fig. 1 System with coprime factor uncertainties

从鲁棒稳定性的角度来考虑, 现将互质因子不确定性 Δ 单独列出, 将图 1 整理成图 2 的结构形式, 图 2 中 $F_l(P, K)$ 就是不带摄动的标称系统的传递函数阵, 式中的 P 是 G_Δ 中除去 (Δ_N, Δ_M) 以外的其余部分所构成的广义对象. 设 $F_l(P, K)$ 的 H_∞ 范数为 γ , 即

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \gamma \quad (7)$$

如果互质因子不确定性的范数为 ϵ ,

$$\|\Delta\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \right\|_\infty = \epsilon \quad (8)$$

则根据小增益定理, 当

$$\epsilon < \gamma^{-1}$$

时, 系统就是稳定的.

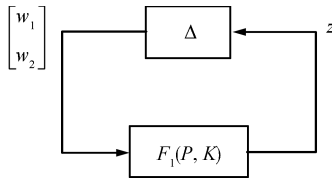


图 2 鲁棒稳定性分析的框图
Fig. 2 Scheme for robust stability analysis

H_∞ 回路成形设计指标要求 γ 值不大于 $4 \sim 5^{[2,4]}$. 这样, 当摄动 ϵ 达到 20% 时系统仍是稳定的, 即具有鲁棒性.

注意到 $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ 是内矩阵, 传递函数阵左乘一个内矩阵后其 H_∞ 范数是不变的^[6], 即

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} F_l(P, K) \right\|_\infty$$

所以求解 $F_l(P, K)$ 的 H_∞ 问题时, 也可以将输出 z 右乘 N 和 M 阵, 成为两个输出 $[z_1, z_2]^T$, 如图 3 所示. 这个二入二出系统的 H_∞ 范数也就是式 (7) 的 $\|F_l(P, K)\|_\infty$, 而图 3 系统中已经不需要用中间变量 z , 可以直接采用对象 G 的参数来求解 H_∞ 问题. 图 3 就是回路成形中 H_∞ 设计所用的系统. 所以虽然回路成形是一种基于互质分解的思想, 但实际设计时并不需要去进行互质分解.

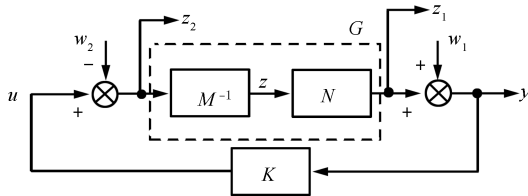


图 3 H_∞ 设计时的系统
Fig. 3 System for H_∞ design

现通过一个例子来说明 H_∞ 回路成形设计可能存在的问题. 这是一个卫星姿态控制问题, 对象具有挠性结构, 其传递函数为^[7]

$$G(s) = \frac{10ds + 10k}{s^2(s^2 + 11ds + 11k)} \quad (9)$$

式中, d, k 为结构系数, 随温度而变化. 名义系统的特性对应于 $k = 0.091$ 和 $d = 0.0036$, 即其传递函数为

$$G(s) = \frac{0.036(s + 25)}{s^2(s^2 + 0.04s + 1)} \quad (10)$$

式 (10) 中挠性模式的 $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, $\xi = 0.02$, 而式 (10) 分子中的常数项实际上就是 $0.9\omega_n^2$.

式 (10) 只是根据对象模型所列出的传递函数, 根据设计要求还需要加一补偿 W 以限制系统的带宽. 设 $W = 0.2$, 得成形的对象为

$$G_s = WG = \frac{0.0072(s + 25)}{s^2(s^2 + 0.04s + 1)} \quad (11)$$

这个 G_s 就是 H_∞ 设计时图 3 中的 G .

图 3 中系统是一个标准 H_∞ 问题, 可采用 Matlab 的 hinfsyn 函数进行 H_∞ 优化设计, 得系统的 H_∞ 范数

$$\gamma = \|F_l(P, K)\|_\infty = 3.2945 \quad (12)$$

相应的 H_∞ 控制器为

$$K_\infty(s) = -\frac{7492598.4335(s + 0.1575)(s^2 - 0.03095s + 0.9934)}{(s + 2.387 \times 10^6)(s + 0.9725)(s^2 + 0.5127s + 1.585)} \quad (13)$$

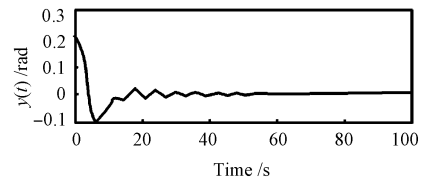
最终的控制器的应是乘上补偿 $W=0.2$ 后的控制器, 即

$$K(s) = WK_\infty(s) = -\frac{1498519.6867(s + 0.1575)(s^2 - 0.03095s + 0.9934)}{(s + 2.387 \times 10^6)(s + 0.9725)(s^2 + 0.5127s + 1.585)}$$

略去 10^6 的高频模态后的降阶控制器为

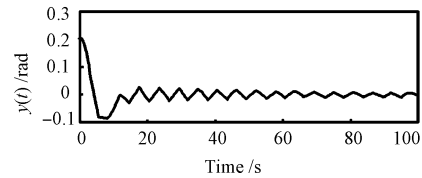
$$K(s) = -\frac{0.6278(s + 0.1575)(s^2 - 0.03095s + 0.9934)}{(s + 0.9725)(s^2 + 0.5127s + 1.585)}$$

图 4(a) 是这个控制器 $K(s)$ 与式 (9) 的对象 $G(s)$ 所构成的反馈控制系统在初始条件 $x(0) = 0.2 \text{ rad}$ 下的调节过程.



(a) 名义系统

(a) Nominal system



(b) 摄动系统

(b) Perturbed system

图 4 摄动前后系统的零初始条件下的响应曲线

Fig. 4 Transient responses for systems without/with perturbation

根据式 (12) 的设计结果, $\gamma^{-1} = 0.3035$. 因此根据回路成形设计的理论, 这个系统允许有 30% 的摄动, 即有足够的鲁棒性. 可是当式 (10) 的固有频率 ω_n 从 1 增加到 1.035 rad/s, 即 ω_n 的摄动仅为 3.5% 时, 系统就接近稳定的边缘了 (见图 4(b)), 说明这个设计对参数 (ω_n) 摄动实际上是没有鲁棒性的, 为什么按正常的 H_∞ 回路成形设计, 对参数摄动会没有鲁棒性呢? 这要从互质因子摄动的特点来进行说明.

2 互质因子振动的特点

H_∞ 回路成形法中对不确定性的描述用的就是互质因子振动. 文献中在介绍互质因子振动时一般只是用一、二个低阶的例子来说明这种振动的优越性, 并特别强调可以用来描述弱阻尼模态的振动^[1-2]. 从所见到的有关文献来看, 对互质因子振动都没有再作进一步的讨论, 都接受了互质因子振动, 并将其作为 H_∞ 回路成形法的基础. 但是互质因子振动也是有使用限制的, 使用不当时, 即使用 H_∞ 回路成形法, 设计结果也可能没有鲁棒性.

本节讨论这种互质因子振动的特性. 这里要用到双互质因子分解和参数化控制器的概念.

双互质因子分解是指 G 存在右互质分解和左互质分解, 这两种互质因子之间存在式 (14) 和 (15) 的关系, 而式 (15) 的 8 个 RH_∞ 阵都可以从构造式证明中的公式求得^[5].

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I \quad (15)$$

根据式 (15) 中的 8 个 RH_∞ 阵, 可以得出一个参数化的控制器 K ,

$$K = (Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}), \quad Q \in RH_\infty \quad (16)$$

可以证明^[5], 这个参数化控制器 K 可镇定 G .

现在用这些公式来说明互质因子振动的特性和 H_∞ 回路成形法设计潜在的问题. 这里结合标量系统来讨论问题的实质. 对标量系统来说, 没有左互质和右互质的区别, 即式 (14) 中的 $\tilde{M} = M, \tilde{N} = N$. 而对标量系统来说, 标称互质分解要求满足等式

$$N(-s)N(s) + M(-s)M(s) = 1 \quad (17)$$

根据式 (17) 可得一个与式 (15) 对应的关系式如下所示:

$$\begin{bmatrix} M(-s) & N(-s) \\ -N(s) & M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -N(-s) \\ N(s) & M(-s) \end{bmatrix} = I \quad (18)$$

将式 (18) 与式 (15) 对比, 可得式 (15) 中的 X 和 Y 为

$$X(s) = M(-s), \quad Y(s) = -N(-s) \quad (19)$$

设参数阵 $Q = 0$, 将式 (19) 代入式 (16), 可得一能镇定此对象 G 的控制器

$$K(s) = Y(s)X(s)^{-1} = -\frac{N(-s)}{M(-s)} \quad (20)$$

由 K 和 G 所形成的反馈系统的回差阵为

$$1 - K(s)G(s) = 1 + \frac{N(-s)N(s)}{M(-s)M(s)} = 1 + G(-s)G(s) \quad (21)$$

现在将传递函数用分子分母多项式来表示, 即设

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad M(s) = \frac{a(s)}{d(s)}, \quad N(s) = \frac{b(s)}{d(s)} \quad (22)$$

$$G(s) = N(s)M(s)^{-1} = \frac{b(s)}{d(s)} \left[\frac{a(s)}{d(s)} \right]^{-1} \quad (23)$$

这里用大写字母表示 RH_∞ 函数, 用小写字母表示多项式.

根据式 (21) 可写得此反馈系统的特征方程式 $1 + G(-s)G(s) = 0$, 将式 (22) 代入, 并考虑到式 (17), 可将此特征方程式整理成

$$d(-s)d(s) = 0 \quad (24)$$

式 (24) 说明, 对象 G 的标称互质因子式的分母多项式 $d(s)$ 与一个加有参数化控制器 (式 (20)) 的反馈系统的特征方程式直接有关. 下面利用这个反馈系统的特征方程式来讨论互质因子振动的特点. 根据式 (23) 可将振动对象表示为

$$G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1} = \left[\frac{b(s)}{d(s)} + \frac{\Delta_b(s)}{d(s)} \right] \left[\frac{a(s)}{d(s)} + \frac{\Delta_a(s)}{d(s)} \right]^{-1}$$

由此可得相应的互质因子的振动项为

$$\Delta_N = \frac{\Delta_b(s)}{d(s)}, \quad \Delta_M = \frac{\Delta_a(s)}{d(s)} \quad (25)$$

式中, $\Delta_b(s)$ 和 $\Delta_a(s)$ 为实际对象分子项和分母项的振动, 而 Δ_N 和 Δ_M 则是回路成形设计中的加性振动. 由此可见, $d(s)$ 直接影响到设计中所用振动值的大小.

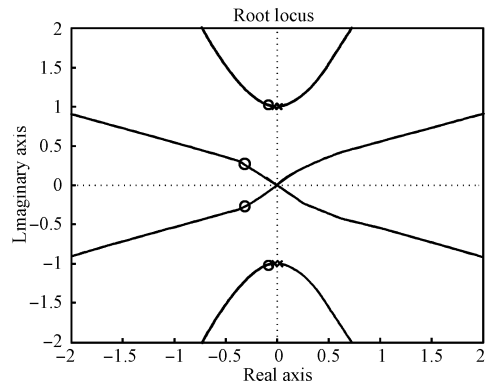


图 5 例题中的对称根轨迹

Fig. 5 Symmetric root locus in the analysis

注意到 $d(-s)d(s) = 0$ 就是系统的特征方程式 $1 + G(-s)G(s) = 0$, 这相当于 $\rho = 1$ 时的 $1 + \rho G(-s)G(s) = 0$ 问题, 或者说是根轨迹上 $\rho = 1$ 时的根分布问题. 这种根轨迹称为对称根轨迹^[7], 而 $d(s) = 0$ 的根就是这种对称根轨迹在左半平面上的根. 作为例子, 图 5 就是上一节算例中的对称根轨迹, 图中的圆圈点就是 $d(s) = 0$ 的根, 即互质因子振动 Δ_N 和 Δ_M 的极点. 这里用根轨迹来讨论, 将互质因子振动项的极点与对象 $G(s)$ 的零极点联系起来, 就可以根据 $G(s)$ 来估算振动项的极点. 因为从根轨迹的角度来说, $d(s)$ 的根都位于从 $G(s)$ 出发的根轨迹上, 所以如果对象 G 中有弱阻尼极点, 那么 $d(s)$ 中也必然存在弱阻尼的特征根, 对于高阶系统来说, 这种依赖关系就更为明显. 而从频率响应来说, 弱阻尼有可能将振动进行了放大, 见式 (25).

将式 (22) 代入式 (17), 并整理如下:

$$\frac{b(-s)b(s)}{d(-s)d(s)} + \frac{a(-s)a(s)}{d(-s)d(s)} = 1$$

$$b(-s)b(s) + a(-s)a(s) = d(-s)d(s) \quad (26)$$

现在来分析互质因子摄动的低频段特性. 作为极限情况, 取 $s = 0$. 如果系统 $G(s) = b(s)/a(s)$ 有积分环节, 这时 $a(0) = 0$, 故根据式 (26), 可知

$$b_0 = d_0 \quad (27)$$

式中下标 0 代表相应多项式中的常数项. 设 b_0 摄动 10%, 即 $\Delta_b = 0.1b_0$, 则

$$\left. \frac{\Delta_b}{d(s)} \right|_{s=0} = \frac{0.1b_0}{b_0} = 0.1$$

这样, 与式 (25) 对应的互质因子摄动的奇异值特性在 $\omega = 0$ 时的值为

$$\bar{\sigma} \left[\begin{array}{c} \Delta_N(j\omega) \\ \Delta_M(j\omega) \end{array} \right] \Big|_{\omega=0} = 0.1$$

由此可见, 互质因子的加性摄动反映的是互质因子摄动的百分比. 如果 H_∞ 成形设计得 $\gamma = 5$, 则 $\epsilon = \gamma^{-1} = 0.2$, 就表示对象的分子分母多项式 $b(s)$, $a(s)$ 可以摄动 20%. 但是如果对象中有弱阻尼模态, 那么摄动项中 $d(s)$ 的弱阻尼项, 会将互质因子摄动大大地放大 (见式 (25)), 压缩了允许的实际摄动 Δ_a 和 Δ_b , 导致所设计的系统失去了鲁棒性.

图 6 就是前面例子中摄动的 $\bar{\sigma} \left[\begin{array}{c} \Delta_N \\ \Delta_M \end{array} \right]$ 特性. 这是参数 ω_n 摄动 $\Delta\omega = 0.035$ rad/s 下的奇异值特性, 其峰值为 -8 dB, 略超出 H_∞ 设计所得的 $\gamma^{-1} = 1/3.2945$, 即 -10.4 dB. 从小增益定理来说, 系统已超出稳定的边缘. 这说明, 本例中 ω_n 的摄动为 0.035 rad/s, 即 ω_n 从 $1 \rightarrow 1.035$ rad/s 时系统就不稳定了. 图 4 是该系统摄动前后的过渡过程, 摄动后实际系统已接近临界稳定状态. 当然小增益定理对非结构化不确定性来说是充要条件, 本例中观察的已是一个明确的参数 ω_n 摄动的结构化不确定性, 所以小增益定理有一定的保守性. 计算数据表明, 如果对对象谐振模态的阻尼更小, 例如 $\xi = 0.0003$, 这时小增益定理的保守性就会非常明显了.

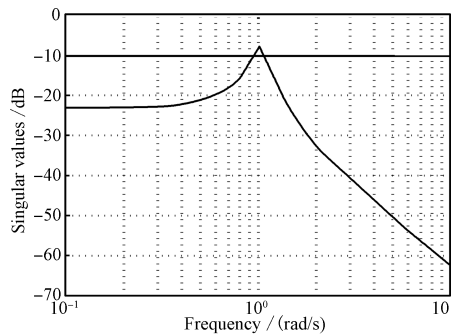


图 6 摄动 $\left[\begin{array}{c} \Delta_N \\ \Delta_M \end{array} \right]$ 的最大奇异值 Bode 图

Fig. 6 Singular value Bode plot of the perturbation $\left[\begin{array}{c} \Delta_N \\ \Delta_M \end{array} \right]$

本例中由于 $d(s)$ 中的弱阻尼项而使摄动项峰值增长 15 dB (见图 6). 再考虑到一般谐振模态的常数项是 ω_n^2 (见式 (10)), 对于 ω_n 的参数摄动来说, 式 (25) 中 Δ_a 所对应的 $\Delta(\omega_n^2) \approx 2\Delta\omega$, 所以对于 ω_n 的摄动来说, 这 2 倍 (即 6 dB) 的关系再加上峰值的 15 dB, 已超出 20 dB. 也就是说, 按回路成形设计, 看起来似乎能满足鲁棒性要求, 例如允许摄动量为 30%, 但实际上只允许谐振频率的摄动为 3%, 实际上就失去了鲁棒性. 所以那种认为 H_∞ 回路成形设计都具有鲁

棒性的说法是不确切的, 上面的例子可以看作是这种说法的一个反例.

3 结论

H_∞ 回路成形是用 H_∞ 设计来保证成形系统的稳定性和鲁棒性的, 所以设计结果具有鲁棒性似乎是毋庸置疑的. 不过 H_∞ 回路成形是用互质因子摄动来表示系统不确定性的. 采用互质因子摄动的一个重要理由是更适合于表示弱阻尼谐振模态的摄动. 但从本文的算例中可以看到, 弱阻尼模态会增加互质因子摄动的范数, 因而压缩了实际允许的摄动范围, 使系统实际上失去了鲁棒性. 所以 H_∞ 回路成形设计的系统并不一定具有鲁棒性, 其鲁棒性尚需要用其他方法来作进一步的验证.

References

- 1 McFarlane D, Glover K. A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(6): 759-769
- 2 Glover K, McFarlane D. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*. New York: Springer-Verlag, 1990
- 3 Fujita M, Hatake K, Matsumura F. Loop shaping based robust control of a magnetic bearing. *IEEE Control Systems Magazine*, 1993, **13**(4): 57-65
- 4 Lanzon A, Tsiotras P. A combined application of H_∞ loop shaping and μ -synthesis to control high-speed fly wheels. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, **13**(5): 767-777
- 5 Francis B A. *A Course in H_∞ Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1987
- 6 Zhou K, Doyle J C, Glover K. *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice Hall, 2002
- 7 Franklin G F, Powell J D, Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems (Fourth Edition)*. Beijing: Pearson Education, 2003

何朕 哈尔滨工业大学控制科学与工程系副教授. 主要研究方向为奇异 H_∞ 控制、描述系统和控制系统的鲁棒设计. 本文通信作者. E-mail: hezhen@hit.edu.cn

(HE Zhen Associate professor in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. Her research interest covers singular H_∞ control, descriptor systems, and robust design for control systems. Corresponding author of this paper.)

孟范伟 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生. 主要研究方向为控制系统的鲁棒设计. E-mail: heumfw@163.com

(MENG Fan-Wei Ph.D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His main research interest is robust design for control systems.)

刘伟 2008 年获哈尔滨工业大学控制科学与工程学科硕士学位, 济南铸锻所工程师. 主要研究方向为控制系统的应用与设计. E-mail: jacky19830108@163.com

(LIU Wei Received his master degree in control science and engineering at Harbin Institute of Technology in 2008. Now he is an engineer at the Jinan Foundry and Metal Forming Machinery Institute. His research interest covers application and design for control systems.)

王广雄 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授. 主要研究方向为 H_∞ 控制理论、控制系统的鲁棒设计. E-mail: gxwang@hit.edu.cn

(WANG Guang-Xiong Professor in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His research interest covers H_∞ control theory and robust design for control systems.)