

## 轮廓曲线的 LoG 变换及图像共变区域的检测

杨丹<sup>1</sup> 王洪星<sup>2</sup> 张小洪<sup>1</sup> 闫卫杰<sup>2</sup>

**摘要** 本文将 LoG (Laplacian of Gaussian) 变换应用到轮廓曲线上, 其范数的平方具有稳健的曲率特性, 由此构造了轮廓角点的响应函数; 在此基础上, 结合轮廓 LoG 所检测的角点和角点邻域内轮廓方向的尺度共变性设计了一种新的关于旋转和尺度共变的特征区域检测算法. 最后, 利用相关度准则对多组受干扰的图像进行特征共变区域匹配, 实验结果验证了所提出的共变特征区域检测算法具有计算简单、容易实现和较强的鲁棒性等特点.

**关键词** 轮廓曲线, 高斯型的 Laplace 算子, 角点, 轮廓方向, 共变区域

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00817

### LoG Transform of Contour Curves and Detection of Image Covariant Regions

YANG Dan<sup>1</sup> WANG Hong-Xing<sup>2</sup> ZHANG Xiao-Hong<sup>1</sup> YAN Wei-Jie<sup>2</sup>

**Abstract** In this paper, Laplacian of Gaussian (LoG) of contour curves is applied and its norm square shows a robust curvature feature. So, norm square of contour LoG is defined as the response function of corners. Further, a novel covariant region detector with rotation and scale invariants is designed based on the contour orientation of each point at neighbor of each corner detected by LoG and the corner itself. Finally, matching among image feature covariant regions is performed using cross correlation criterion and the results illustrate that the proposed algorithm has the properties such as simple calculation, easy realization, and better robustness.

**Key words** Contour curve, Laplacian of Gaussian (LoG), corner, contour orientation, covariant region

在实际问题中, 图像可能受到噪声、背景的干扰, 也可能发生视角、光照、尺度、平移、旋转、仿射等变化, 给图像的理解和表示造成困难, 从而局部特征共变区域的提取就显得尤为重要. 共变性要求特征区域始终对应相同的图像内容, 这样, 计算机视觉的高层次问题就可以转变为由共变区域所导出的描述器或图像模型的分析与处理的问题, 避免了图像分割所产生的各种困难<sup>[1-2]</sup>. 共变区域的检测在诸多领域都有广泛地应用. 例如, 宽基线图像匹配<sup>[3]</sup>、图像全景拼接<sup>[4-5]</sup>、目标识别与分类<sup>[6-7]</sup>、机器人导航<sup>[8-9]</sup>、运动跟踪<sup>[10]</sup> 等.

作为计算机视觉领域的一个重要思想和发展方向, 目前关于局部特征共变区域的检测已经取得一些成果. 比较有代表性的有, Lindeberg 和 Garding<sup>[11]</sup> 基于二阶矩阵使用自适应仿射方法提出了仿射不变的团块 (Blob) 检测方法. Tuytelaars 和 Van Gool<sup>[12]</sup> 通过不变特征响应函数的构造提出了两种仿射不变区域检测方法. Matas 等<sup>[13]</sup> 把图像

分割算法中的分水岭方法引入到不变区域的检测中, 提出了最大稳定极值区域检测方法. Kadir 等<sup>[14]</sup> 根据图像灰度直方图的熵提出了尺度不变的区域检测方法. Lowe<sup>[15]</sup> 利用图像尺度空间的极值提取提出了尺度不变特征检测方法 (Scale invariant feature transform, SIFT). Mikolajczyk 和 Schmid<sup>[16]</sup> 将多尺度方法和 Lindeberg<sup>[11]</sup> 的自适应仿射方法融入经典的 Harris<sup>[17]</sup> 角点检测方法中, 提出了尺度和仿射都不变的区域检测方法. Bay 基于整数运算的 Hessian 矩阵提出了快速鲁棒特征 (Speeded up robust features, SURF) 检测方法<sup>[18]</sup>.

虽然这些方法都取得了比较好的检测性能, 但是由于它们都是基于图像灰度信息提取区域特征的, 需要处理的数据量比较大, 算法的效率受到限制. 而图像的边缘轮廓稳定, 同时待处理的数据量少且耗时短, 适合对图像特征的实时检测. 本文的方法就是基于图像边缘轮廓的. 本文首先分析了 LoG (Laplacian of Gaussian) 变换作用于轮廓曲线的曲率特性, 将曲线的 LoG 范数的平方用作角点的响应函数. 接下来指出轮廓方向具有尺度共变特性, 并结合角点信息在图像上提取出关于尺度和旋转共变的特征区域. 最后, 利用相关度准则对多组图像进行匹配, 验证了算法计算简单且易于实现, 计算耗时较短, 并且提取的特征区域对旋转和尺度具有很好的共变性, 对光照和噪声具有较强的鲁棒性等特性.

收稿日期 2009-03-27 录用日期 2009-08-18  
Manuscript received March 27, 2009; accepted August 18, 2009  
国家自然科学基金 (60975015), 重庆市科技攻关项目 (CSTC2009AC2057) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60975015) and Chongqing Science and Technology Key Project (CSTC2009AC2057)  
1. 重庆大学软件学院 重庆 400030 2. 重庆大学数理学院 重庆 400030  
1. School of Software Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030 2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030

## 1 LoG 角点检测

角点几乎不随图像旋转和尺度的变化而变化,也几乎不受光照和噪声的影响,本节基于图像轮廓构造新的角点检测算法. 设  $\mathbf{\Pi}$  为一条平面目标轮廓曲线

$$\mathbf{\Pi}(u) = (X(u), Y(u)) \quad (1)$$

其中,  $u$  为弧长参数,  $X(u)$  和  $Y(u)$  分别表示曲线的坐标函数. 由式 (1), 曲线上任何一点  $P(X(u), Y(u))$  的梯度可以表示为

$$\nabla \mathbf{\Pi}(u) = \left( \frac{dX}{du}, \frac{dY}{du} \right) \quad (2)$$

其中,  $\nabla$  表示梯度算子. 在二维平面曲线上, 一个点的梯度表示沿着曲线该点增长最快的方向, 也就是曲线在该点的切线方向. 令  $\mathbf{v}(u)$  为曲线的切向量, 则有

$$\mathbf{v}(u) = \nabla \mathbf{\Pi}(u) \quad (3)$$

对式 (2) 作用一个梯度运算就得到曲线的 Laplace 变换

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}(u) = \left( \frac{d^2 X}{du^2}, \frac{d^2 Y}{du^2} \right) \quad (4)$$

结合式 (3), 得到

$$\nabla \mathbf{v}(u) = \nabla^2 \mathbf{\Pi}(u) \quad (5)$$

对  $\nabla \mathbf{v}$  有如下事实成立<sup>[19]</sup>:

**定理 1.** 设  $\mathbf{v}(u)$  为平面曲线的单位切线向量,  $u$  是弧长参数,  $\Delta\phi$  表示  $\mathbf{v}(u)$  和  $\mathbf{v}(u + \Delta u)$  之间的夹角, 则下式成立

$$\|\nabla \mathbf{v}(u)\| = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta u} \right| \quad (6)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数,  $|\cdot|$  表示标量的绝对值.

关于定理 1, 有几点说明:

1) 式 (6) 等号右边为平面曲线的绝对曲率;

2) 由于角点是指目标轮廓曲线上曲率大于某个阈值的局部极大值点<sup>[20]</sup>, 所以  $\|\nabla \mathbf{v}(u)\|$  可以直接用来作为角点的响应函数, 而实际操作中, 为了不致增加计算量, 不必归一化  $\mathbf{v}(u)$ , 同时以  $\|\nabla \mathbf{v}(u)\|^2$  作为角点的响应函数;

3) 因为有式 (5) 成立, 所以  $\|\nabla \mathbf{v}(u)\|^2$  可以刻画轮廓曲率信息, 从而作为角点的响应函数.

实际图像的轮廓不可避免地受到噪声的干扰, 为了从轮廓曲线移去噪声同时简化轮廓并使之光滑, 利用高斯函数对曲线做卷积得到演化曲线

$$\mathbf{\Pi}(u, \sigma) = g(u, \sigma) * \mathbf{\Pi}(u) = (X(u, \sigma), Y(u, \sigma)) \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} X(u, \sigma) &= g(u, \sigma) * X(u) \\ Y(u, \sigma) &= g(u, \sigma) * Y(u) \end{aligned} \quad (8)$$

\* 是卷积算子,  $g(u, \sigma)$  表示偏差为  $\sigma$  的高斯函数. 在  $\mathbf{\Pi}(u, \sigma)$  上应用 Laplace 变换, 得到

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{\Pi}(u, \sigma) &= \nabla^2 (g(u, \sigma) * \mathbf{\Pi}(u)) = \\ &= \nabla^2 g(u, \sigma) * \mathbf{\Pi}(u) \end{aligned} \quad (9)$$

由此便得到了高斯型的 Laplace 算子 (Laplacian of Gaussian, LoG)

$$\begin{aligned} \nabla^2 g(u, \sigma) &= \\ &= \frac{(u^2 - \sigma^2)}{\sqrt{2\pi}} \sigma^4 \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

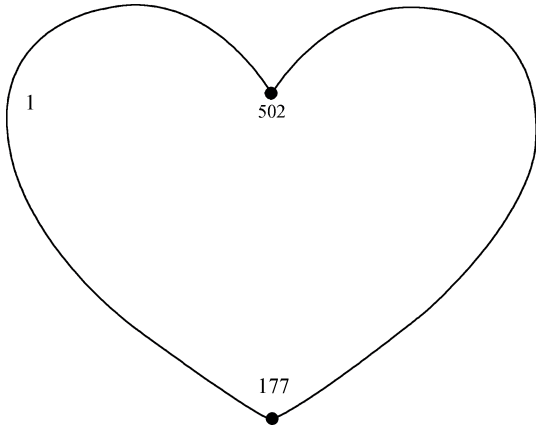
以及曲线的 LoG 变换

$$\begin{aligned} \text{LoG}(\mathbf{\Pi}(u)) &= \\ &= \nabla^2 g(u, \sigma) * \mathbf{\Pi}(u) = \\ &= (\nabla^2 g(u, \sigma) * X(u), \nabla^2 g(u, \sigma) * Y(u)) \end{aligned} \quad (11)$$

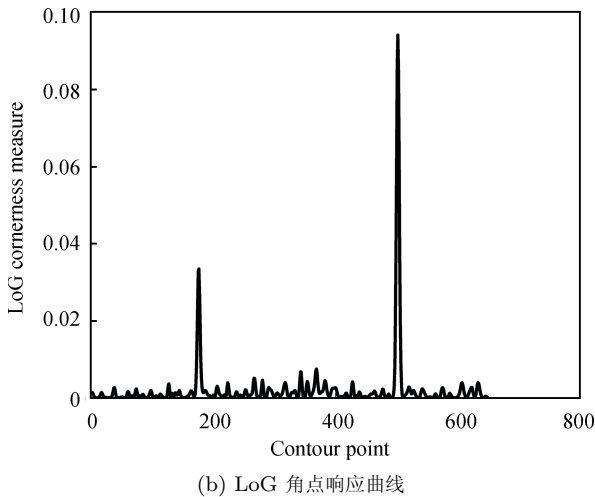
这样, 角点响应函数修正为式 (12)

$$\begin{aligned} \|\text{LoG}(\mathbf{\Pi}(u))\|^2 &= \\ \|\nabla^2 \mathbf{\Pi}(u, \sigma)\|^2 &= \\ (\nabla^2 g(u, \sigma) * X(u))^2 &+ (\nabla^2 g(u, \sigma) * Y(u))^2 \end{aligned} \quad (12)$$

图 1 形象地说明了 LoG 是如何检测角点的. 其中, 图 1(a) 为一个心形轮廓及应用 LoG 检测到的角点, 图 1(b) 为轮廓上各点的 LoG 角点响应图. 显然, 图 1(a) 标示的第 177 和第 502 个轮廓点为轮廓上仅有的两个角点位置; 对应图 1(b), 角点 177 和 502 的 LoG 响应表现出很强的极值特性, 提取 LoG 响应的极值就可以得到轮廓角点. 另外, 角点 177 的曲率较角点 502 要小, 从而角点 502 具有更强的角点特性, 在 LoG 响应中则表现为角点 502 具有更强的极值响应, 反映出式 (12) 确定的轮廓 LoG 角点响应与轮廓曲率是互相对应的.



(a) 649 个点连接成的心形轮廓 (标记“1”为起始点位置, “177”和“502”分别为 LoG 检测到的角点位置)  
 (a) A heart-shaped contour with 649 points (The mark “1” is the starting point, “177” and “502” are the corners detected by LoG.)



(b) LoG 角点响应曲线  
 (b) LoG cornerness response curve

图 1 心形轮廓及其 LoG 角点响应

Fig. 1 A heart-shaped contour and its LoG cornerness response

## 2 LoG 共变区域检测

利用第 1 节中介绍的方法, 我们在轮廓上获得了稳定的角点. 对某一角点附近的轮廓点可以依据该角点提取其方向, 角点与方向信息将用来提取旋转和尺度共变的特征区域. 在一段具有单一角点的轮廓上, 假设轮廓已在式 (7) 作用下平滑, 处处可微, 这段轮廓上的角点  $(X_0, Y_0)$  具有切线方向

$$\theta(X_0, Y_0) = \tan^{-1} \left( \frac{dY_0}{dX_0} \right) \quad (13)$$

类似地, 该角点附近的任一轮廓点  $(X, Y)$  具有

切线方向

$$\theta(X, Y) = \tan^{-1} \left( \frac{dY}{dX} \right) \quad (14)$$

为了获得稳定的方向信息, 对式 (14) 进行如下改进, 得到

$$\Delta\theta = \tan^{-1} (\tan (\theta(X, Y) - \theta(X_0, Y_0))) \quad (15)$$

式 (15) 使  $\Delta\theta$  落入区间  $(-\pi/2, \pi/2)$ , 实际上式 (15) 得到的是轮廓点方向与角点方向的夹角信息, 而夹角是不随图像的旋转而改变的. 接下来就可以利用式 (15) 来提取共变区域.

假设一段轮廓  $\widehat{ABC}$  上  $A, B, C$  分别为临近的三个角点. 现考察角点  $B$ , 在  $\widehat{AB}$  段找到靠近点  $B$  使得  $\Delta\theta = 0$  的点  $D$ , 我们称  $D$  为拐点, 如果不存在拐点则标记点  $A$  为  $D$ ; 同样地, 在  $\widehat{BC}$  段找到靠近点  $B$  的拐点  $E$ , 不存在则标记点  $C$  为  $E$ . 现令

$$r_B = k \times \max(|DB|, |BE|) \quad (16)$$

其中,  $k \in (0, 1)$  为一个乘数因子, 有效地控制了区域的大小, 通常取  $k = 0.2$ ,  $|\cdot|$  表示两点的欧式距离. 在图像上可以得到一个以点  $B$  为中心,  $r_B$  为半径的局部区域.  $\Delta\theta$  的旋转不变性决定了区域的旋转共变性. 同时, 这个区域是适应图像尺度变化的. 为了指出区域的尺度共变性, 只需证明  $\Delta\theta$  或者  $\theta$  具有尺度不变性即可.

事实上, 设  $y = f(x)$  为平面上一条连续光滑曲线, 将其按比例  $c$  缩放后, 得到

$$y = cf \left( \frac{1}{c}x \right) \quad (17)$$

原曲线上的点  $(x, f(x))$  对应缩放后曲线上的点  $(cx, cf(x))$ , 对原曲线上的点  $(x, f(x))$ , 有

$$\theta(x, f(x)) = \tan^{-1} \left( \frac{dy}{dx} \Big|_{(x, f(x))} \right) = \tan^{-1} (f'(x)) \quad (18)$$

对缩放曲线上的点  $(cx, cf(x))$ , 有

$$\theta(cx, cf(x)) = \tan^{-1} \left( \frac{dy}{dx} \Big|_{(cx, cf(x))} \right) = \tan^{-1} (f'(x)) \quad (19)$$

显然得到  $\theta(x, f(x)) = \theta(cx, cf(x))$ , 由此可知曲线上各对应点的值并不因图像尺寸的缩放而改变, 从而决定了区域半径的尺度共变性.

基于前述内容及有关分析, 这里总结算法如下:

1) 采用一个较好的边缘检测器提取图像的边缘轮廓, 本文选用 Canny 边缘检测器提取图像边缘轮廓;

- 2) 按照式 (7) 平滑轮廓;
- 3) 利用 LoG 角点检测器检测图像的角点;
- 4) 在包含角点的平滑轮廓段上, 按照式 (15) 计算轮廓各点的方向;
- 5) 根据轮廓方向的变化情况, 按照式 (16) 计算特征区域半径. 图像的角点和半径一一对应, 在图像上就表现为以角点为中心的若干局部特征共变区域.

### 3 实验结果

特征共变区域的一个重要应用就是图像匹配, 图像匹配的结果直接验证了区域的共变性. 因此为了测试和验证算法检测区域的性能, 本节利用相关度准则对多组图像进行匹配.

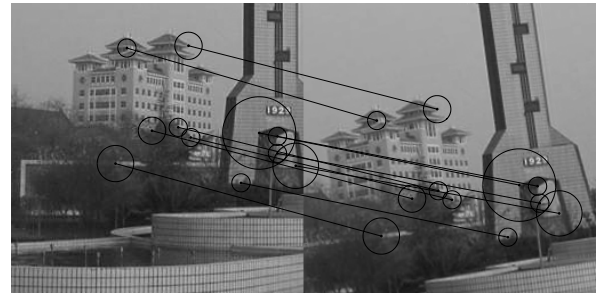
对两幅待匹配图像  $I_1(x, y)$  和  $I_2(x, y)$ ,  $A_i(p_i, s_i)$  为图像  $I_1(x, y)$  以角点  $p_i$  为中心,  $s_i$  为半径的特征区域,  $B_j(q_j, t_j)$  为图像  $I_2(x, y)$  以角点  $q_j$  为中心,  $t_j$  为半径的特征区域. 通过线性插值, 将两块区域归一化, 分别为  $A_i(p_i, r_{ij})$  和  $B_j(q_j, r_{ij})$ , 其中  $r_{ij} = \max(s_i, t_j)$ , 然后计算两块区域的相关度, 若相关度大于 0.9 则判定两块区域匹配, 相关度定义如式 (20) (见下页上方).

式 (20) 中,  $p_i = (p_{ix}, p_{iy})^t$  和  $q_i = (q_{ix}, q_{iy})^t$  分别是待匹配图像  $I_1(x, y)$  和  $I_2(x, y)$  提取出来的特征点,  $\mu_{ki}$  和  $\sigma_{ki}$  是图像  $I_k(x, y)$  在区域  $A_i(p_i, r_{ij})$  或  $B_j(q_j, r_{ij})$  处的均值和方差.

我们做了大量实验以验证算法的性能, 鉴于篇幅限制, 这里只列出 4 组图像及其匹配结果, 并且将每幅图按照相同的比例缩小了, 同时为了便于观察, 将检测区域同比例做了适当的放大, 如图 2 所示. 其中, 图 2(a) 为在同一场景下拍摄的图像, 但是图像的内容不尽相同, 并且右图带有一定程度的旋转; 图 2(b) 为 Lenna 图像, 两图缩放比例为 3:2; 图 2(c) 为在不同光照条件下拍摄的图像; 图 2(d) 中的右图被强烈的高斯噪声干扰过. 图像中标记出的圆圈内部代表特征区域, 区域中心 (角点) 连线表示两个区域匹配. 从图 2(b) 中可以看到, 图像的缩放也伴随着特征区域的缩放, 使得相互匹配的特征区域之间的包含相同的图像内容, 说明了特征区域的尺度共变性. 类似的, 旋转、光照, 以及噪声的干扰不改变景物在图像中的尺寸, 相互匹配的特征区域在面积大小上保持一致, 包含相同的图像内容, 如图 2(a)、2(c) 和 2(d), 说明了特征区域对旋转表现出共变性, 并且能在光照和噪声干扰条件下获得足够多的匹配特征, 表现出较强的鲁棒性. 各组实验均是在 Windows XP, Intel® Pentium IV 3.00 GHz 处理器上应用软件 Matlab 7.4.0 实现的.

对图 2 的实验结果进行统计并列于表 1 中, 统计数据包括检测到的特征总数, 匹配的特征区域对

数, 检测区域耗时 (包含了从输入图像, 提取轮廓, 检测角点和获得区域特征整个过程的耗时), 区域匹配耗时, 以及总的耗时. 其中各组实验都被执行了 10 次, 取平均时间. 各组图像都获得了足够多的匹配区域对, 说明了算法的优秀检测性能. 算法在计算耗



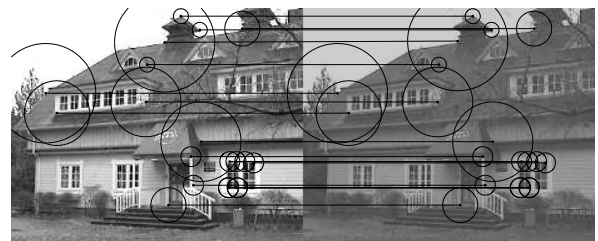
(a) 旋转

(a) Rotation



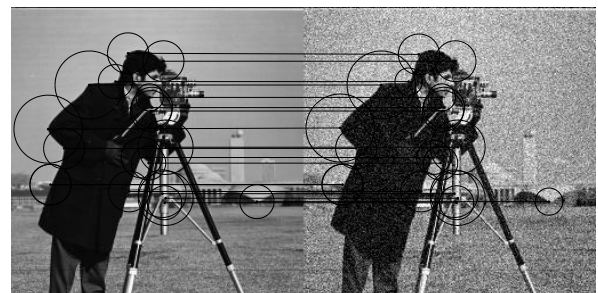
(b) 缩放

(b) Scaling



(c) 光照

(c) Illumination



(d) 噪声

(d) Noise

图 2 图像匹配结果

Fig. 2 Matching results for testing images

$$C_{A_i, B_j}(p_i, q_j) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{1i}\sigma_{2j}}} \sum_{x, y=-r_{ij}}^{r_{ij}} [I_1(x+p_i, y+p_j) - \mu_{1i}] [I_2(x+q_j, y+q_j) - \mu_{2j}] \quad (20)$$

表 1 图 2 各组图像匹配结果及平均运行时间 (s)

Table 1 Matching results and average running times for testing images of Fig. 2 (s)

图像	((a) 256 × 256, 256 × 256)	((b) 308 × 308, 205 × 205)	((c) 233 × 189, 233 × 189)	((d) 256 × 256, 256 × 256)
变换关系	旋转	缩放	光照	噪声
特征总数	左图: 63, 右图: 52	左图: 58, 右图: 37	左图: 46, 右图: 48	左图: 42, 右图: 45
匹配对数	11	12	18	18
检测时间	1.3978	1.3625	1.0932	1.2752
匹配时间	9.6805	6.5292	6.6477	6.1624
运行时间	11.0783	7.8917	7.7409	7.4376

时上同样表现优秀, 每组图像在足够短的时间内检测出特征区域, 大部分时间都用于对区域进行匹配, 这是由于匹配需要大量的灰度运算. 即便如此, 整个过程所需时间也较短, 说明了算法的高效性.

#### 4 结论

本文将 LoG 变换作用于图像轮廓来检测角点, 之后结合轮廓方向的尺度共变特征, 提出了一种新的关于旋转和尺度共变的特征区域检测方法. 由于角点以及特征区域的提取都是关于图像边缘的操作, 有效减少了计算耗时. 最后利用相关度准则对多组变换图像进行匹配, 结果表明算法计算简单且易于实现, 检测区域耗时短; 特征区域对旋转和尺度具有很好的共变性, 对光照和噪声具有较强的鲁棒性.

#### References

- 1 Tuytelaars T, Mikolajczyk K. Local invariant feature detectors: a survey. *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, 2008, **3**(3): 177–280
- 2 Mikolajczyk K, Schmid C. A performance evaluation of local descriptors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(10): 1615–1630
- 3 Colletto F, Marcon M, Sarti A, Tubaro S. A robust method for the estimation of reliable wide baseline correspondences. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*, Atlanta, USA: IEEE, 2006. 1041–1044
- 4 Liu J, Chen Z Y, Guo R F. A mosaic method for aerial image sequence by R/C model. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Science and Software Engineering*. Wuhan, China: IEEE, 2008. 58–61
- 5 Yang Z L, Guo B L. Image mosaic based on SIFT. In: *Proceedings of the International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing*. Harbin, China: IEEE, 2008. 1422–1425
- 6 Suga A, Fukuda K, Takiguchi T, Ariki Y. Object recognition and segmentation using SIFT and graph cuts. In: *Proceedings of the 19th International Conference on Pattern Recognition*. Tampa, USA: IEEE, 2008. 1–4
- 7 Ootom A F, Gunes H, Piccardi M. Feature extraction techniques for abandoned object classification in video surveillance. In: *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Image Processing*. San Diego, USA: IEEE, 2008. 1368–1371
- 8 Song X Y, Lee H K, Cho H. A sensor fusion method for mobile robot navigation. In: *Proceedings of SICE-ICASE International Joint Conference*. Busan, South Korea: IEEE, 2006. 5310–5316
- 9 Gao Q J, Li J, Yang G Q. Vision based road crossing scene recognition for robot localization. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Science and Software Engineering*. Wuhan, China: IEEE, 2008. 62–66
- 10 Hu X L, Tang Y C, Zhang Z H. Video object matching based on SIFT algorithm. In: *Proceedings of the International Conference on Neural Networks and Signal Processing*. Zhenjiang, China: IEEE, 2008. 412–415
- 11 Lindeberg T, Garding J. Shape-adapted smoothing in estimation of 3-D shape cues from affine deformations of local 2-D brightness structure. *Image and Vision Computing*, 1997, **15**(6): 415–434
- 12 Tuytelaars T, Van Gool L. Matching widely separated views based on affine invariant regions. *International Journal of Computer Vision*, 2004, **59**(1): 61–85
- 13 Matas J, Chum O, Urban M, Pajdla T. Robust wide baseline stereo from maximally stable extremal regions. *Image and Vision Computing*, 2004, **22**(10): 761–767
- 14 Kadir T, Zisserman A, Brady M. An affine invariant salient region detector. In: *Proceedings of the 8th European Conference on Computer Vision*. Prague, Czech Republic: Springer, 2004. 228–241
- 15 Lowe D G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints detectors. *International Journal of Computer Vision*, 2004, **60**(2): 91–110

- 16 Mikolajczyk K, Schmid C. Indexing based on scale invariant interest points. In: Proceedings of the 8th International Conference on Computer Vision. Vancouver, Canada: IEEE, 2001. 525–531
- 17 Harris C, Stephens M. A combined corner and edge detector. In: Proceedings of the 4th Alvey Vision Conference. Manchester, UK: Springer, 1988. 147–151
- 18 Bay H, Ess A, Tuytelaars T, Van Gool L. Speeded-up robust features (SURF). *Computer Vision and Image Understanding*, 2008, **110**(3): 346–359
- 19 Chen Wei-Heng. *Differential Geometry*. Beijing: Peking University Press, 2006  
(陈维恒. 微分几何. 北京: 北京大学出版社, 2006)
- 20 Mokhtarian F, Suomela R. Robust image corner detection through curvature scale space. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, **20**(12): 1376–1381



杨丹 重庆大学教授. 主要研究方向为数字图像处理与计算机视觉. 本文通信作者. E-mail: dyang@cqu.edu.cn  
(**YANG Dan** Professor at Chongqing University. His research interest covers digital image processing and computer vision. Corresponding author of this paper.)



王洪星 重庆大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向为数字图像处理与计算机视觉. E-mail: whx185@163.com  
(**WANG Hong-Xing** Master student at the College of Mathematics and Physics, Chongqing University. His research interest covers digital image processing and computer vision.)



张小洪 重庆大学软件学院副教授. 主要研究方向为数字图像处理与计算机视觉. E-mail: xhongz@yahoo.com.cn  
(**ZHANG Xiao-Hong** Associate professor at the School of Software Engineering, Chongqing University. His research interest covers digital image processing and computer vision.)



闫卫杰 重庆大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向为数字图像处理与计算机视觉. E-mail: 123yanweijie@163.com  
(**YAN Wei-Jie** Master student at the College of Mathematics and Physics, Chongqing University. Her research interest covers digital image processing and computer vision.)