

严格反馈非线性时变系统的 迭代学习控制

朱胜¹ 孙明轩¹ 何熊熊¹

摘要 针对一类含未知时变参数的严格反馈非线性系统, 提出一种实现有限作业区间轨迹跟踪控制的迭代学习算法. 基于 Lyapunov-like 方法设计控制器, 回避了常规迭代学习控制中受控系统非线性特性需满足全局 Lipschitz 连续条件的要求. 以反推设计 (Backstepping) 方法设计控制器, 为使得虚拟控制项可导, 引入一级数收敛序列; 将时变参数展开为有限项多项式形式, 在控制器设计中采取双曲正切函数处理余项对于系统跟踪性能的影响. 理论分析表明, 闭环系统所有信号有界, 并能够实现系统输出完全收敛于理想轨迹.

关键词 迭代学习控制, 时变系统, Lyapunov-like, 反推设计

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00454

Iterative Learning Control of Strict-feedback Nonlinear Time-varying Systems

ZHU Sheng¹ SUN Ming-Xuan¹ HE Xiong-Xiong¹

Abstract In this paper, an iterative learning controller is presented for a class of strict-feedback nonlinear systems with time-varying uncertainties. The learning controller is designed based on the Lyapunov-like synthesis, which can handle system dynamics with non-global Lipschitz nonlinearities. For the controller design, the time-varying parameters are expanded into Taylor series with bounded remained term, and backstepping design technique is applied. Hyperbolic tangent function is used with a typical series introduced in order to guarantee the differentiability of the virtue control variables. Theoretical analysis shows that all signals in the closed-loop system remain bounded and that complete tracking over a pre-specified time interval is achieved.

Key words Iterative learning control (ILC), time-varying systems, Lyapunov-like, backstepping

迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 技术实现系统输出关于期望轨迹在有限区间 $[0, T]$ 上的完全跟踪. 经典迭代学习控制^[1] 系统分析与设计的主要方法是压缩映射方法, 它本质上适用于解决非线性系统的轨迹跟踪控制问题, 但它所研究的受控对象局限于全局 Lipschitz 连续的动力系统. 这使学习控制难于融入其他主流非线性控制理论^[2-3]. 近年来兴起的基于 Lyapunov-like 方法的学习控制^[4-9], 在控制器设计时能充分利用非线性系统的动态信息, 因此, 能有效地结合自适应控制和鲁棒控制.

自适应反推设计 (Backstepping)^[10-11] 是解决严格反馈非线性系统控制器设计问题的重要方法. 由于在用 Backstepping 设计控制器时, 引入了虚拟控制, 而虚拟控制含有

参数估计并在后一步的控制器设计中需要对虚拟控制求导, 而具有差分形式的迭代学习律无法给出参数的导数值, 因此, 迭代学习控制方法很难应用于严格反馈非线性系统. 文献 [12] 针对含时变扰动的严格反馈非线性系统设计鲁棒自适应控制器, 为保证虚拟控制的连续性, 使用双曲正切函数替代符号函数, 同时避免系统出现颤振. 文献 [13-14] 对周期时变参数进行 Fourier 级数展开, 并通过构造自适应学习律估计 Fourier 系数; 文献 [15] 对有限时间间隔 T 内的时变参数进行 Taylor 级数展开, 设计自适应控制器.

本文提出的关于严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制是基于 Lyapunov-like 方法的. 通过对二阶系统的设计与分析, 本文指出有界误差项会随迭代次数的增加而不断累加, 最终导致系统发散, 这一点不同于自适应鲁棒控制所能达到的有界收敛. 为消除残余误差的影响, 同时又要保证控制器的连续性和可导性, 本文引入级数收敛序列, 保证闭环系统所有信号有界, 并最终做到跟踪误差完全收敛于 0. 仿真算例验证了算法的有效性.

1 问题提出和准备

考虑一类单输入单输出的不确定非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \mathbf{p}^T(t)\boldsymbol{\xi}_i(x_1, \dots, x_i), \\ &1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= u + \mathbf{p}^T(t)\boldsymbol{\xi}_n(x_1, \dots, x_n) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $t \in [0, T]$; $\mathbf{x}(t) = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态; $u(t) \in \mathbf{R}$ 是系统控制; $y(t) \in \mathbf{R}$ 是系统输出; $\boldsymbol{\xi}_i$ 是已知光滑函数; $\mathbf{p}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是未知时变参数.

注 1. 本文所针对的控制系统不含噪声扰动, 意在突出所设计的迭代学习控制器在处理未知时变参数上的能力, 对于实际系统含噪声的情形, 采用本文的设计方法仍然有效.

假设 1. 未知时变参数向量 $\mathbf{p}(t)$ 的每一个分量 $p_i(t)$, 在 $[0, T]$ 上存在直至 l_i 阶的连续导函数, 在 $(0, T)$ 内存在 $(l_i + 1)$ 阶连续导函数, 其中, $i = 1, \dots, n$.

这里 l_i 表示 Taylor 展开的项数. 根据 Taylor 定理, 满足假设 1, 可对未知时变函数向量 $\mathbf{p}(t)$ 的每一个分量在 $t = 0$ 处进行 Taylor 展开, 如下:

$$p_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T(t)\boldsymbol{\theta}_i + \epsilon_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

其中, $\boldsymbol{\phi}_i(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_{l_i}(t)]^T$, $\boldsymbol{\theta}_i = [\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,l_i}]^T$, $i = 1, \dots, n$.

$$\varphi_j = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \dots, l_i \quad (3)$$

$$\theta_{i,j} = p_i^{(j-1)}(0), \quad j = 1, 2, \dots, l_i \quad (4)$$

$$\epsilon_i = \int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{l_i-1}}{(l_i-1)!} p_i^{(l_i)}(\varsigma) d\varsigma \quad (5)$$

然后令

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times \sum_{i=1}^n l_i}$$

收稿日期 2008-12-29 录用日期 2009-08-31
Manuscript received December 29, 2008; accepted August 31, 2009
国家自然科学基金 (60474005, 60774021, 60874041) 和浙江省自然科学基金 (Y107494) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60474005, 60774021, 60874041) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Y107494)

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023
1. Institute of Information and Control, College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

$\Theta = [\theta_1^T, \dots, \theta_n^T]^T$, $\epsilon(t) = [\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_n(t)]^T$. 那么参数向量 $p(t)$ 可写为

$$p(t) = \Phi^T(t)\Theta + \epsilon(t) \quad (6)$$

由于系统是在有限时间区间 $[0, T]$ 上运行, 根据假设 1, $p_i(t)$ 的 l_i 次导数有界, 假设 $\sup_{t \in [0, T]} |p_i^{(l_i)}(t)| \leq c_l$, 那么 ϵ_i 有界, 且界为

$$|\epsilon_i(t)| \leq \frac{c_{l_i} T^{l_i}}{l_i!}, \quad t \in [0, T] \quad (7)$$

令 $\bar{\epsilon}$ 为误差向量 $\epsilon(t)$ 的界, 即: $\|\epsilon(t)\| \leq \bar{\epsilon}$. 由于时变参数 $p(t)$ 是未知的, 所以 Θ 是未知常数向量, 令 $\hat{\Theta}(t) = [\hat{\theta}_1^T(t), \dots, \hat{\theta}_n^T(t)]^T$ 作为其估计, 设计估计律. 将式 (3) 代入式 (1), n 阶系统重新描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \Theta^T \Phi(t) \xi_i(x_1, \dots, x_i) + \\ &\quad \epsilon^T(t) \xi_i(x_1, \dots, x_i), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= u + \Theta^T \Phi(t) \xi_n(x_1, \dots, x_n) + \\ &\quad \epsilon^T(t) \xi_n(x_1, \dots, x_n) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

本文的目标是针对系统 (1), 给定足够光滑的理想轨迹 y_r , 设计控制器, 使得系统输出 y 在 $[0, T]$ 上完全收敛于 y_r . 由于是有限区间上的完全跟踪问题, 本文采用迭代学习控制方法, 设计迭代学习控制律 u^k , 其中, k 表示迭代次数, 最终实现当 $k \rightarrow \infty$ 时, $e^k = y^k - y_r \rightarrow 0$. 下文各变量上标中的 k 均表示迭代次数.

为控制器设计需要, 给出一级数收敛序列的定义以及相关引理.

定义 1. 级数收敛序列 Δ^k 定义为

$$\Delta^k = \frac{q}{k^m} \quad (9)$$

其中, $k = 1, 2, 3, \dots$; q 和 m 是给定常参数, 要求 $q \geq 0 \in \mathbf{R}$, $m \geq 2 \in \mathbf{N}$.

引理 1. 对于给定序列 $1/k^m$, 其中, $k = 1, 2, \dots$, 正整数 $m \geq 2$, 下列不等式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^m} \leq 2 \quad (10)$$

证明. 令 $s_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^m}$, 显然 $s_k \geq 1$ 是递增的, 下面证明 s_k 具有上界. 事实上

$$s_k \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} = 2 - \frac{1}{k} \leq 2 \quad (11)$$

于是得出结论 (10). \square

注 2. 根据引理 1, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \Delta^i \leq 2q$, 在控制器设计中, 将双曲正切函数里的参数 Δ 替换成 Δ^k , 并不影响虚拟控制的连续性, 同时可保证误差收敛. 参数 m 用来调节收敛速度, 另外, 选择合适的参数 q 可以抑制颤振.

2 有界扰动对系统跟踪性能的影响

为详细说明有界扰动对系统跟踪性能的影响, 考虑下述

在区间 $[0, T]$ 上重复运行的系统 (即假设系统 (1) 中 $n = 2$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k &= x_2^k + \Theta^T \Phi(t) \xi_1^k(x_1^k) + \epsilon^T(t) \xi_1^k(x_1^k) \\ \dot{x}_2^k &= u^k + \Theta^T \Phi(t) \xi_2^k(x_1^k, x_2^k) + \epsilon^T(t) \xi_2^k(x_1^k, x_2^k) \\ y^k &= x_1^k \end{aligned} \quad (12)$$

记 $z_1^k = x_1^k - y_r$, $z_2^k = x_2^k - \alpha_1^k - \dot{y}_r$, 其中, α_1^k 是虚拟控制. 虚拟控制的具体形式在下面的反步推算中获得. 另外, 记 $\hat{\Theta}^k(t)$ 作为未知常数 Θ 的估计.

假设 2. $\forall k$, 当 $t = 0$ 时, $x_1^k(0) = y_r(0)$, $x_2^k(0) = \alpha_1^k(0) + \dot{y}_r(0)$, $\hat{\Theta}^k(0) = \hat{\Theta}^{k-1}(T)$.

由于系统式 (9) 是二阶参数非匹配系统, 我们利用 Backstepping 方法, 分两步设计控制器:

步骤 1. 令 $\omega_1^k = \xi_1^k$, 存在光滑函数 $\bar{\xi}_1^k(x_1) > 0$, 使得 $|\epsilon^T(t) \omega_1^k| \leq \bar{\xi}_1^k(x_1)$; 记 $\bar{\omega}_1^k = \bar{\xi}_1^k(x_1)$, $\beta_1^k = \bar{\omega}_1^k \tanh[\frac{\bar{\omega}_1^k z_1^k}{\Delta}]$, $\tau_1^k = \Gamma \Phi \omega_1^k z_1^k$; 对 z_1^k 两边求导可得

$$\dot{z}_1^k = z_2^k + \alpha_1^k + \Theta^T \Phi \omega_1^k + \epsilon^T(t) \omega_1^k \quad (13)$$

取虚拟控制: $\alpha_1^k = -c_1 z_1^k - (\hat{\Theta}^k)^T \Phi \omega_1^k - \beta_1^k$, 其中, c_1 为正常数, 代入上式, 得

$$\dot{z}_1^k = z_2^k - c_1 z_1^k - (\tilde{\Theta}^k)^T \Phi \omega_1^k - \beta_1^k + \epsilon^T(t) \omega_1^k \quad (14)$$

式中, $\tilde{\Theta}^k = \hat{\Theta}^k - \Theta$ 为参数估计误差. 取如下非负函数:

$$V_1^k(z^k, \hat{\Theta}^k) = \frac{1}{2}(z_1^k)^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}^k \quad (15)$$

其中, Γ 是对称正定矩阵. 对 V_1^k 求导并将式 (14) 代入得

$$\dot{V}_1^k \leq z_1^k z_2^k - c_1 (z_1^k)^2 - (\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1} (\tau_1^k - \dot{\hat{\Theta}}^k) + \delta \Delta \quad (16)$$

上式的推导中用到双曲正切函数的一个性质^[12]:

对任意 $\Delta > 0$ 和 $a \in \mathbf{R}$, 下列不等式成立

$$0 \leq |a| - a \tanh\left(\frac{a}{\Delta}\right) \leq \delta \Delta \quad (17)$$

其中, δ 是一个正常数满足: $\delta = e^{-(\delta+1)}$.

步骤 2. 令 $\omega_2^k = \xi_2^k - \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} \xi_1^k$, 存在光滑函数 $\bar{\xi}_2^k(x_1, \hat{\Theta}) > 0$, 使得 $|\epsilon^T(t) (\xi_2^k - \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} \xi_1^k)| \leq \bar{\xi}_2^k$; 记 $\bar{\omega}_2^k = \bar{\xi}_2^k$, $\beta_2^k = \bar{\omega}_2^k \tanh[\frac{\bar{\omega}_2^k z_2^k}{\Delta}]$, $\tau_2^k = \tau_1^k + \Gamma \Phi \omega_2^k z_2^k$; 对 z_2^k 两边求导可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2^k &= u - \dot{y}_r + \Theta^T \Phi \omega_2^k + \epsilon^T(t) \omega_2^k - \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} x_2^k - \\ &\quad \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial \hat{\Theta}^k} \dot{\hat{\Theta}}^k + (\hat{\Theta}^k)^T \dot{\Phi}(x_1^k)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

选取控制律: $u^k = -z_1^k - c_2 z_2^k + \dot{y}_r - (\hat{\Theta}^k)^T \Phi \omega_2^k + \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} x_2^k - \beta_2^k + \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial \hat{\Theta}^k} \tau_2^k - (\hat{\Theta}^k)^T \dot{\Phi}(x_1^k)^2$, 其中, c_2 为正常数, 将控制律代入式 (18), 得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2^k &= -z_1^k - c_2 z_2^k - (\tilde{\Theta}^k)^T \Phi \omega_2^k + \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial \hat{\Theta}^k} (\tau_2^k - \dot{\hat{\Theta}}^k) + \\ &\quad \epsilon^T(t) \omega_2^k - \beta_2^k \end{aligned} \quad (19)$$

取如下非负函数:

$$V_2^k(z^k, \hat{\Theta}^k) = V_1 + \frac{1}{2}(z_2^k)^2 \quad (20)$$

对 V_2^k 求导并将式 (16) 和 (19) 代入得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2^k \leq & -c_1(z_1^k)^2 - c_2(z_2^k)^2 - (\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1}(\tau_2^k - \dot{\hat{\Theta}}^k) + \\ & \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial \hat{\Theta}^k}(\tau_2^k - \dot{\hat{\Theta}}^k)z_2^k + 2\delta\Delta \end{aligned} \quad (21)$$

由此可知, 参数学习律取 $\dot{\hat{\Theta}}^k = \tau_2^k$, 并代入上式, 得

$$\dot{V}_2^k \leq -c_1(z_1^k)^2 - c_2(z_2^k)^2 + 2\delta\Delta \quad (22)$$

迭代学习控制考虑输出误差在 $[0, T]$ 上的收敛性, 根据假设 2, 有 $\|z^k(0)\|^2 = 0 \leq \|z^k(T)\|^2$, 由式 (22) 知

$$\begin{aligned} V_2^k(z^k(0), \hat{\Theta}^k(T)) \leq & V_2^1(z^1(0), \hat{\Theta}^1(0)) + 2kT\delta\Delta - \\ & c_1 \sum_{i=1}^k \int_0^T (z_1^i)^2 dt - c_2 \sum_{i=1}^k \int_0^T (z_2^i)^2 dt \end{aligned} \quad (23)$$

由于式 (23) 中的 $2kT\delta\Delta$ 项, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 无法保证 z_1 收敛.

双曲正切函数代替符号函数解决了控制器的连续性问题, 同时也消除了颤振现象, 但是并不适用于有限区间上作业的参数非匹配系统, 本质上是因为有界误差项的存在, 经过迭代域的无限累加, 导致了输出发散.

3 学习控制

在控制器设计中, 引入定义 1 的级数收敛序列, 可彻底消除时变参数经 Taylor 展开后的余项对系统性能的影响. 下面给出高阶严格反馈非线性系统式 (1) 的控制器设计过程.

3.1 控制器设计

步骤 1. 令 $\omega_1^k = \xi_1^k$, 存在光滑函数 $\bar{\xi}_1^k(x_1) > 0$, 使得 $|\epsilon^T(t)\omega_1^k| \leq \bar{\xi}_1^k$; 记 $\bar{\omega}_1^k = \bar{\xi}_1^k$, $z_1^k = x_1^k - y_r$, $z_2^k = x_2^k - \alpha_1^k - y_r$, 其中, α_1^k 是虚拟控制, 对 z_1^k 两边求导得

$$\dot{z}_1^k = z_2^k + \alpha_1^k + \Theta^T \Phi \omega_1^k + \epsilon^T(t)\omega_1^k \quad (24)$$

给定任意实数 $q \geq 0$ 和正整数 $m \geq 2$, 令 $\Delta^k = q/k^m$, 记 $\beta_1^k = \bar{\omega}_1^k \tanh[\frac{\bar{\omega}_1^k z_1^k}{\Delta^k}]$, $\tau_1^k = \Gamma \Phi \omega_1^k z_1^k$;

取虚拟控制: $\alpha_1^k = -c_1 z_1^k - (\tilde{\Theta}^k)^T \Phi \omega_1^k - \beta_1^k$, 其中, c_1 为正常数, 代入式 (24), 得

$$\dot{z}_1^k = z_2^k - c_1 z_1^k - (\tilde{\Theta}^k)^T \Phi \omega_1^k - \beta_1^k + \epsilon^T(t)\omega_1^k \quad (25)$$

式中, $\tilde{\Theta}^k = \hat{\Theta}^k - \Theta$ 为参数估计误差. 取如下非负函数:

$$V_1^k(z^k, \hat{\Theta}^k) = \frac{1}{2}(z_1^k)^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}^k \quad (26)$$

其中, Γ 是对称正定矩阵. 对 V_1^k 求导并将式 (25) 代入, 并应用式 (17), 得

$$\dot{V}_1^k \leq z_1^k z_2^k - c_1(z_1^k)^2 - (\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1}(\tau_1^k - \dot{\hat{\Theta}}^k) + \delta\Delta^k \quad (27)$$

步骤 i ($2 \leq i \leq n-1$). 令 $\omega_i^k = \xi_i^k - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial x_j^k} \xi_j^k$, 由于 ξ_1^k, \dots, ξ_i^k 是已知光滑函数, 所以存在光滑函数

$\bar{\xi}_i^k(x_1, \dots, x_i, \hat{\Theta}) > 0$ 使得下式成立:

$$\left| \epsilon^T(t) \left(\xi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \xi_k \right) \right| \leq \|\epsilon\| \bar{\xi}_i^k \leq \bar{\xi}_i^k \quad (28)$$

记 $\bar{\omega}_i^k = \bar{\xi}_i^k$, 记 $z_{i+1}^k = x_{i+1}^k - \alpha_i^k - y_r^{(i)}$, $\beta_i^k = \bar{\omega}_i^k \tanh[\frac{\bar{\omega}_i^k z_i^k}{\Delta^k}]$, $\tau_i^k = \tau_{i-1}^k + \Gamma \Phi \omega_i^k z_i^k$, 对 z_i^k 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^k = & z_{i+1}^k + \alpha_i^k + \Theta^T \Phi \omega_i^k + \epsilon^T(t)\omega_i^k - \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial t} - \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial x_j^k} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial \Theta} \dot{\hat{\Theta}}^k \end{aligned} \quad (29)$$

取虚拟控制如下:

$$\begin{aligned} \alpha_i^k = & -z_{i-1}^k - c_i z_i^k + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial x_j^k} x_{j+1} - (\hat{\Theta}^k)^T \Phi \omega_i^k - \\ & \beta_i^k + \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial \hat{\Theta}^k} \tau_i^k + \vartheta_i^k + \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial t} \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $\vartheta_i^k = \sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial \hat{\Theta}^k} \Gamma \Phi \omega_i^k z_{j+1}^k$. 选择如下非负函数:

$$V_i^k(z^k, \hat{\Theta}^k) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{2} z_j^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}^k \quad (31)$$

对其求导, 将式 (29) 和 (30) 代入并化简, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^k \leq & -\sum_{j=1}^i c_j (z_j^k)^2 + z_i^k z_{i+1}^k - (\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1}(\tau_i^k - \dot{\hat{\Theta}}^k) + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial \hat{\Theta}^k} z_i^k (\tau_i^k - \dot{\hat{\Theta}}^k) + i\delta\Delta^k \end{aligned} \quad (32)$$

步骤 n . 令 $\omega_n^k = \xi_n^k - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}^k}{\partial x_j^k} \xi_j^k$, 由于 ξ_1^k, \dots, ξ_n^k 是已知光滑函数, 所以存在光滑函数 $\bar{\xi}_n^k > 0$ 使得下式成立:

$$\left| \epsilon^T(t) \left(\xi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \xi_k \right) \right| \leq \|\epsilon\| \bar{\xi}_n^k \leq \bar{\xi}_n^k \quad (33)$$

记 $\bar{\omega}_n^k = \bar{\xi}_n^k$, 记 $\beta_n^k = \bar{\omega}_n^k \tanh[\frac{\bar{\omega}_n^k z_n^k}{\Delta^k}]$, $\tau_n^k = \tau_{n-1}^k + \Gamma \Phi \omega_n^k z_n^k$, 对 z_n^k 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{z}_n^k = & u^k - y_r^{(n)} + \Theta^T \Phi \omega_n^k + \epsilon^T(t)\omega_n^k - \frac{\partial \alpha_{n-1}^k}{\partial t} - \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}^k}{\partial x_j^k} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}^k}{\partial \Theta} \dot{\hat{\Theta}}^k \end{aligned} \quad (34)$$

取控制律和迭代学习律如下:

$$u^k = \alpha_n^k + y_r^{(n)} \quad (35)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}^k = \tau_n^k \quad (36)$$

选择如下非负函数:

$$V_n^k(z^k, \hat{\Theta}^k) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} z_j^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}^k \quad (37)$$

对其求导, 将式 (34) ~ (36) 代入并化简, 得

$$\dot{V}_n^k \leq - \sum_{j=1}^n c_j (z_j^k)^2 + n\delta\Delta^k \quad (38)$$

为得到系统输出在有限区间 $[0, T]$ 上的完全跟踪, 迭代学习控制一般要求在每次迭代时, 系统状态重置为零. 但是由于 Backstepping 设计方法的特殊性, 初态设置跟虚拟控制的初态有关, 作如下假设:

假设 3. 对 $\forall k$, 当 $t = 0$ 时, 状态 $x_1^k(0) = y_r(0)$; $x_{i+1}^k(0) = \alpha_i^k(0) - y_r^{(i)}(0)$, 其中, $i = 1, \dots, n-1$; 参数 $\hat{\Theta}^k(0) = \hat{\Theta}^{k-1}(T)$.

注 3. 上述对系统状态初值的假设, 使得误差 $z_i^k(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; 对参数估计的初值所作的假设, 连接了前后两次的迭代过程, 保证了参数学习在迭代域上的连贯性.

3.2 稳定性和收敛性分析

定理 1. 针对非线性系统式 (1), 并满足假设 1 和 3, 采用控制律式 (35), 和参数微分学习律式 (36), 则闭环系统里的所有信号在区间 $[0, T]$ 上有界, 并且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_j^k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0 \quad (41)$$

证明. 根据假设 3, 有 $\|z^k(0)\|^2 = 0 \leq \|z^k(T)\|^2$, 由式 (37) 知

$$V_n^k(z^k(0), \hat{\Theta}^k(T)) \leq V_n^k(z^k(0), \hat{\Theta}^k(0)) + \int_0^T \dot{V}_n^k dt \quad (42)$$

把式 (38) 代入上式, 得

$$V_n^k(z^k(0), \hat{\Theta}^k(T)) \leq V_n^1(z^1(0), \hat{\Theta}^1(0)) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \int_0^T c_j (z_j^i)^2 dt + n\delta T \left(\sum_{i=1}^k \Delta^i \right) \quad (43)$$

记 $V_0(k) = V_n^1(z^1(0), \hat{\Theta}^1(0)) + n\delta T \left(\sum_{i=1}^k \Delta^i \right)$, 因此, 式 (43) 又可以写成:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \int_0^T c_j (z_j^i)^2 dt \leq V_0(k) - V_n^k(z^k(0), \hat{\Theta}^k(T)) \quad (44)$$

由式 (23) 知 $\lim_{k \rightarrow \infty} V_0(k) = V_n^1 + 2qn\delta T$, 所以 $V_0(k)$ 有界, 又因为 $V_n^k(z^k(0), \hat{\Theta}^k(T)) > 0$, 所以有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_0^T c_j (z_j^k)^2 dt = 0 \quad (45)$$

由式 (37) 知, 对 $\forall k$, 有 $V_n^k(t) = V_n^k(0) + \int_0^t \dot{V}_n^k(\tau) d\tau$, 把式 (38) 代入, 得

$$V_n^k(t) \leq V_n^k(0) - \sum_{j=1}^n \int_0^t c_j (z_j^k(\tau))^2 d\tau + tn\delta\Delta^k \quad (46)$$

由式 (45) 知 $\sum_{j=1}^n \int_0^t c_j (z_j^k(\tau))^2 d\tau$ 有界, 由定义 1 知 Δ^k 有界,

而 $t \in [0, T]$, 故 $tn\delta\Delta^k$ 有界. 又因为 $\hat{\Theta}^k(0) = \hat{\Theta}^{k-1}(T)$, 由式 (43) 知 $\forall k, V_n^k(0, \hat{\Theta}^k(T))$ 有界, 故 $V_n^k(0, \hat{\Theta}^k(0)) = V_n^{k-1}(0, \hat{\Theta}^{k-1}(T))$ 亦有界, 因此, $\forall k, V_n^k(t)$ 有界, 从而有 x_i^k 有界, $\hat{\Theta}^k(t)$ 有界, 由式 (35) 知 u^k 有界, 由式 (29) 知 \dot{z}_i^k 有界, 所以 z_i^k 一致连续, 由此得出结论 (40) 和 (41). \square

4 仿真算例

为说明上述算法的有效性, 我们考虑如下二阶系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k &= x_2^k + \eta(t)(x_1^k)^2 \\ \dot{x}_2^k &= u^k \\ y &= x_1^k \end{aligned} \quad (47)$$

其中, $t \in [0, 1]$, $\eta(t)$ 是未知时变参数, 对其在 $t = 0$ 处进行 Taylor 展开, 系统重新描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k &= x_2^k + \Phi(t)^T \Theta (x_1^k)^2 + \epsilon(t)(x_1^k)^2 \\ \dot{x}_2^k &= u^k \\ y &= x_1^k \end{aligned} \quad (48)$$

其中, $\Phi(t) = [1, t, t^2, t^3, t^4]^T$, $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$, $|\epsilon(t)| \leq \frac{\sup|\eta^{(5)}(t)|T^5}{5!} = \bar{\epsilon}$. 为仿真需要, 我们假定实际系统中 $\eta(t) = \sin(2\pi t)$. 给定的理想轨迹为 $y_r = \frac{\pi}{6} \sin(2\pi t) + 0.5$.

步骤 1. 设 $z_1^k = x_1^k - y_r, z_2^k = x_2^k - \alpha_1^k - \dot{y}_r$, 其中虚拟控制取 $\alpha_1^k = -c_1 z_1^k - (\hat{\Theta}^k)^T \Phi (x_1^k)^2 - \beta_1^k$; $\beta_1^k = \bar{\epsilon} (x_1^k)^2 \tanh[\frac{\bar{\epsilon} (x_1^k)^2 z_1^k}{\Delta^k}]$, $\Delta^k = \frac{q}{k^2}, \tau_1^k = \Gamma \Phi (x_1^k)^2 z_1^k$.

步骤 2. 设计控制律 $u^k = -z_1^k - c_2 z_2^k + y_r^{(2)} + (\hat{\Theta}^k)^T \Phi \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} (x_1^k)^2 + \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} x_2^k + \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial \hat{\Theta}^k} \tau_2^k - (\hat{\Theta}^k)^T \dot{\Phi} (x_1^k)^2 - \beta_2^k$, 其中, $\beta_2^k = \bar{\omega}_2^k \tanh[\frac{\bar{\omega}_2^k z_2^k}{\Delta^k}]$, $\tau_2^k = \tau_1^k - \Gamma \Phi \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} (x_1^k)^2 z_2^k$. 设计参数自适应律 $\dot{\hat{\omega}}^k = \tau_2^k = \Gamma \Phi (x_1^k)^2 z_1^k - \Gamma \Phi \frac{\partial \alpha_1^k}{\partial x_1^k} (x_1^k)^2 z_2^k$.

设定各个参数值以及状态初值和参数估计的初值如下: $x_1^k(0) = 0.5, x_2^k(0) = \frac{\pi}{3}, \Theta(0) = [0, 0, 0, 0, 0]^T$; $c_1 = 0.05, c_2 = 0.01, \Gamma = \text{diag}\{0.01\}$. 取 $m = 2, 1/q = 0.03$, 用对数形式表示输出误差, 图 1 表示表明经过 20 次迭代, 收敛精度接近 10^{-3} ; 图 2 是学到的控制. 改变 q 的取值, 取 $1/q =$

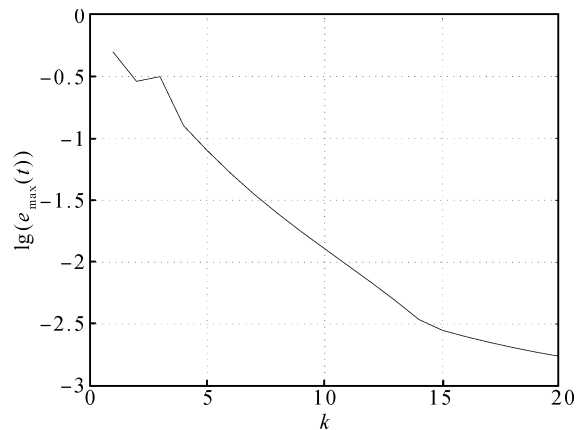
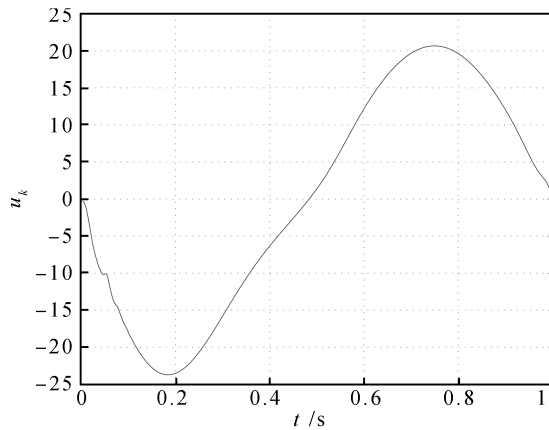
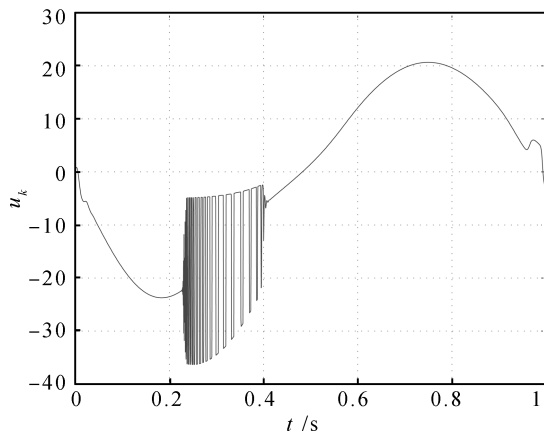


图 1 输出误差 ($1/q = 0.03, m = 2$)
Fig. 1 Output error ($1/q = 0.03, m = 2$)

图2 控制输入 ($1/q = 0.03, m = 2$)Fig. 2 Control input ($1/q = 0.03, m = 2$)

0.04, 虽然输出也能收敛到理想轨迹, 但从图3看出控制在时间段0.2s到0.4s之间出现了明显的颤振, 这与文中的理论分析相符合. 因此, 选取合适的 q 值是非常重要的.

图3 控制输入 ($1/q = 0.04, m = 2$)Fig. 3 Control input ($1/q = 0.04, m = 2$)

5 结论

本文给出一类严格反馈非线性系统的迭代学习控制算法, 对时变参数进行 Taylor 展开, 回避了 Backstepping 方法无法在学习控制中应用的难点. 在控制器的设计中充分考虑了余项对系统性能的影响. 为防止系统发散, 引入级数收敛序列, 从而实现在给定时间区间上的完全跟踪.

References

- 1 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123–140
- 2 Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995
- 3 Marino R, Tomei P. *Nonlinear Control Design — Geometric, Adaptive, and Robust*. London: Prentice Hall, 1995
- 4 Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940–1945

- 5 French M, Rogers E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique. *International Journal of Control*, 2000, **73**(10): 840–850
- 6 Marino R, Tomei P. An iterative learning control for a class of partial feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(8): 1991–1996
- 7 Sun M X, Ge S S, Marreels I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, **22**(3): 563–568
- 8 Sun M X, Ge S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(10): 1684–1688
- 9 Sun Ming-Xuan, Wang Dan-Wei, Chen Peng-Nian. Repetitive learning control of non-linear systems over finite intervals. *Science in China: Series F*, 2010, **53**(1): 115–128 (孙明轩, 王郸维, 陈彭年. 有限区间非线性系统的重复学习控制. *中国科学: F 辑*, 2010, **53**(1): 115–128)
- 10 Tanner H G, Kyriakopoulos K J. Backstepping for nonsmooth systems. *Automatica*, 2003, **39**(7): 1259–1265
- 11 Jiang Z P, Praly L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties. *Automatica*, 1998, **34**(7): 825–840
- 12 Polycarpou M M, Ioannou P A. A robust adaptive nonlinear control design. *Automatica*, 1996, **32**(3): 423–427
- 13 Liuzzo S, Tomei P. A global adaptive learning control for robotic manipulators. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1379–1384
- 14 Liuzzo S, Marino R, Tomei P. Adaptive learning control of linear systems by output error feedback. *Automatica*, 2007, **43**(4): 669–676
- 15 Pagilla P R, Zhu Y L. Adaptive control of mechanical systems with time-varying parameters and disturbances. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2004, **126**(3): 520–530

朱 胜 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为非线性系统的学习控制. E-mail: zuseng@163.com

(ZHU Sheng Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control of nonlinear systems.)

孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

(SUN Ming-Xuan Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper.)

何熊熊 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为重复控制. E-mail: hxx@zjut.edu.cn

(HE Xiong-Xiong Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is repetitive control.)