

# 随机非线性严格反馈系统的 自适应神经网络输出反馈镇定

李靖<sup>1</sup> 李俊民<sup>1</sup> 陈为胜<sup>1</sup>

**摘要** 针对具有严格反馈形式的随机非线性系统,首次引入神经网络控制技术,设计了适当形式的随机控制 Lyapunov 函数,并运用反推 (Backstepping) 技术和非线性观测器设计技术,构造出一类自适应神经网络输出反馈控制器.在一定条件下,证明了闭环系统平衡点依概率稳定.仿真算例验证了所给控制方案的有效性.

**关键词** 输出反馈镇定,随机非线性严格反馈系统,非线性观测器,神经网络,自适应反推

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00450

## Adaptive Neural Network Output-feedback Stabilization for a Class of Stochastic Nonlinear Strict-feedback Systems

LI Jing<sup>1</sup> LI Jun-Min<sup>1</sup> CHEN Wei-Sheng<sup>1</sup>

**Abstract** Neural network (NN) control scheme is first introduced into a class of stochastic nonlinear strict-feedback systems. Based on the well known backstepping method and the technique of nonlinear observer design, a suitable stochastic control Lyapunov function is then proposed to construct an adaptive neural network output-feedback controller. Under some conditions, it is shown that the equilibrium of the closed-loop system is stable in probability. A simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed control scheme.

**Key words** Stochastic nonlinear strict-feedback systems, output-feedback stabilization, nonlinear observer, neural network (NN), adaptive backstepping

自从系统化的控制设计技术如反推 (Backstepping) 技术<sup>[1]</sup>被成功地用于确定性非线性系统之后,如何将这些技术推广到随机非线性系统已经成为一个公开的研究领域<sup>[2-8]</sup>.随机系统 Lyapunov 设计的主要技术障碍在于,Itô 随机微分不仅涉及梯度还涉及高阶 Hessian 项,通过引入一个四次 Lyapunov 函数, Krstic 等<sup>[8]</sup>首次对严格反馈和输出反馈的随机系统给出了一个反推设计方案.最近,几类随机非线性系统如随机大系统<sup>[2]</sup>、随机非最小相位系统<sup>[3]</sup>和具有线性有界不可测状态的随机系统<sup>[4]</sup>等的输出反馈控制方法也已经被研究.另一方面, Pan 等采用风险灵敏度判据和二次 Lyapunov 函数首次解决了严格反馈系统的随机镇定问题<sup>[5]</sup>.随后,一系列的问题都得以解决<sup>[6]</sup>.同时,自适应神经网络控制 (Adaptive neural network control, ANNC) 方法已经被成功应用到很多未知非线性系统中<sup>[9-10]</sup>.但在已有的研究中,当系统状态不可测时,随机非线性严格反馈系统的自适

神经网络 (Neural network, NN) 输出反馈控制还很少被考虑.

本文考虑一类具有不可测状态的随机非线性严格反馈系统的自适应 NN 输出反馈镇定问题.可以证明,基于反推方法和非线性观测器设计技术的闭环系统依概率稳定.与文献 [3-5] 相比,本文所研究的系统更一般,那些系统只具有输出反馈形式而不是严格反馈形式.文献 [4] 针对随机非线性严格反馈系统导出了一个输出反馈控制方案,但是其假定状态依赖的非线性函数是 Lipschitz 的,并且采用一个高增益线性观测器估计不可测状态,而本文则通过引入一个新的非线性观测器消除了对状态依赖的非线性函数的 Lipschitz 限制条件.同时,现有的随机非线性控制<sup>[3-5]</sup>都假定非线性函数被已知上界函数界化,而本文首次将 ANNC 方法引入随机非线性控制系统设计,可以利用 NN 补偿依赖于系统输出的所有上界函数.

### 1 系统描述

考虑如下随机非线性严格反馈系统

$$\begin{cases} dx_i = [x_{i+1} + \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j + \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + f_i(y)]dt + \mathbf{g}_i^T(y)dw, & 1 \leq i \leq n-1 \\ dx_n = [u + \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + \varphi_n(\bar{\mathbf{x}}_n) + f_n(y)]dt + \mathbf{g}_n^T(y)dw \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  是以  $\mathbf{x}(0)$  为初值的状态向量;记  $\bar{\mathbf{x}}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ ;  $u \in \mathbf{R}$  和  $y \in \mathbf{R}$  分别为系统输入和可测的系统输出;  $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j \leq i$  为已知常数;  $\varphi_i(\bar{\mathbf{x}}_i), i = 1, \dots, n$  为已知非线性函数;  $f_i(y) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  和  $\mathbf{g}_i(y) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^r, i = 1, \dots, n$  是未知光滑函数,并且  $f_i(0) = 0, \mathbf{g}_i(0) = \mathbf{0}; \mathbf{w}$  是独立的  $r$  维标准 Wiener 过程.

注.与文献 [8] 不同的是,假定系统 (1) 中的函数  $f_i(y)$  和  $\mathbf{g}_i(y)$  是完全未知的.  $f_i(0) = 0$  和  $\mathbf{g}_i(0) = \mathbf{0}$  表示  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  是系统 (1) 的平衡点.根据众所周知的平均值定理,下面的等式成立

$$f_i(y) = y\bar{f}_i(y), \quad \mathbf{g}_i(y) = y\bar{\mathbf{g}}_i(y) \quad (2)$$

其中,  $\bar{f}_i(\cdot)$  和  $\bar{\mathbf{g}}_i(\cdot)$  是完全未知的非线性函数,在本文中可以通过一个 NN 加以补偿.

本文的目标是对系统 (1) 寻找一个输出反馈的自适应 NN 控制器  $u(t)$ , 使闭环系统依概率稳定,并且  $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0\} = 1$ . 为表述方便,系统 (1) 可被改写为如下紧凑形式

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = [A\mathbf{x} + \Phi(\mathbf{x}) + Bu + F(y)]dt + d\mathbf{w} \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $A, B, C, F(y), G(y), \Phi(\mathbf{x})$  为相应的适当维数的矩阵,并进一步作如下假设:

**假设 1**<sup>[11]</sup>. 函数  $\Phi(\mathbf{x})$  已知光滑,且  $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . 存在矩阵  $H$  和已知向量值函数  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  使得  $\Phi(\mathbf{x}) = H\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , 其中,  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  满足

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (4)$$

收稿日期 2009-03-18 录用日期 2009-09-11  
Manuscript received March 18, 2009; accepted September 11, 2009  
国家自然科学基金 (60804021, 60974139) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60804021, 60974139)

1. 西安电子科技大学理学院 西安 710071  
1. School of Science, Xidian University, Xi'an 710071

假设 2<sup>[11]</sup>. 存在矩阵  $P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$  使上面所定义的矩阵  $A, C, H$  满足下面的条件:

$$\begin{aligned} (A + LC)^T P + P(A + LC) + Q &\leq 0 \\ PH + (I + KC)^T &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $K = [k_1, \dots, k_n]^T, L = [l_1, \dots, l_n]^T$ .

## 2 控制器设计与稳定性分析

### 2.1 非线性观测器设计

既然状态  $x_2, \dots, x_n$  不可测, 首先对随机非线性系统 (3) 设计如下的观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + \Phi[\hat{x} + K(C\hat{x} - y)] + Bu \quad (6)$$

其中,  $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$  是观测器状态;  $K, L$  满足假设 2. 由式 (3) 和 (6) 可知, 观测器误差  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  满足

$$d\tilde{x} = [(A + LC)\tilde{x} + \Phi(x) - \Phi(v) + F(y)]dt + G^T(y)d\mathbf{w} \quad (7)$$

其中,  $v = \hat{x} + K(C\hat{x} - y)$ . 定义  $\mu = x - v$  和  $\psi(x, \mu) = h(x) - h(x - \mu)$ . 由此以及假设 1, 可得

$$d\tilde{x} = [(A + LC)\tilde{x} + H\psi(x, \mu) + F(y)]dt + G^T(y)d\mathbf{w} \quad (8)$$

并且, 由平均值定理, 可得

$$\psi(x, \mu) = \int_0^1 \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{t=x-\theta\mu} \mu d\theta \quad (9)$$

结合假设 1, 可得

$$\begin{aligned} \mu^T \psi(x, \mu) &= \\ \frac{1}{2} \mu^T \left( \int_0^1 \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^T \right]_{t=x-\theta\mu} d\theta \right) \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

考虑四次 Lyapunov 函数  $V_{\tilde{x}} = \frac{b}{2}(\tilde{x}^T P \tilde{x})^2$ , 其中,  $b$  是正常数;  $P$  是正定对称矩阵, 且满足式 (5), 则由观测器误差系统 (8) 和 Itô 公式<sup>[12]</sup>, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{\tilde{x}} &= b\{\tilde{x}^T P \tilde{x}\} \{ \tilde{x}^T [(A + LC)^T P + P(A + LC)] \tilde{x} + \\ &2\tilde{x}^T PH\psi + 2\tilde{x}^T PF(y) \} + \\ &2b \operatorname{tr}\{G(y)^T (2P\tilde{x}\tilde{x}^T P + \tilde{x}^T P\tilde{x}P)G(y)\} \end{aligned} \quad (11)$$

由  $v$  和  $\mu$  的定义, 容易看出

$$\mu^T = x^T - v^T = x^T - (\hat{x} - KC\hat{x})^T = \tilde{x}^T (I + KC)^T$$

将上式代入式 (11), 并注意到式 (10), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{\tilde{x}} &= b\{\tilde{x}^T P \tilde{x}\} \{ -\tilde{x}^T Q \tilde{x} - 2\mu^T \psi + 2\tilde{x}^T PF(y) \} + \\ &2\operatorname{tr}\{G(y)^T (2P\tilde{x}\tilde{x}^T P + \tilde{x}^T P\tilde{x}P)G(y)\} \leq \\ &b\{-\lambda\|\tilde{x}\|^4 + 2(\tilde{x}^T P \tilde{x})\tilde{x}^T PF(y) + \\ &2\operatorname{tr}\{G(y)^T (2P\tilde{x}\tilde{x}^T P + \tilde{x}^T P\tilde{x}P)G(y)\} \} \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\lambda = \lambda_{\min}(P)\lambda_{\min}(Q), \lambda_{\min}(P)$  是矩阵  $P$  的最小特征值. 进而, 利用 Young 不等式<sup>[13]</sup> 可得

$$\begin{aligned} (\tilde{x}^T P \tilde{x})\tilde{x}^T PF(y) &\leq \|P\|^2 \|\tilde{x}\|^3 \|y\| \|\bar{F}(y)\| \leq \\ \frac{3}{4} \|P\|^{\frac{8}{3}} \|\tilde{x}\|^4 + \frac{1}{4} \|\bar{F}(y)\|^4 y^4 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\{G(y)^T (2P\tilde{x}\tilde{x}^T P + \tilde{x}^T P\tilde{x}P)G(y)\} &\leq \\ 3\|P\|^2 \|\tilde{x}\|^2 \|y\|^2 \|\bar{G}(y)\|^2 &\leq \\ \frac{3}{2} \|P\|^4 \|\tilde{x}\|^4 + \frac{3}{2} \|\bar{G}(y)\|^4 y^4 \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 结合式 (12) ~ (14), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{\tilde{x}} &\leq b \left( -\lambda + \frac{3}{2} \|P\|^{\frac{8}{3}} + 3\|P\|^4 \right) \|\tilde{x}\|^4 + \\ &b \left( \frac{1}{2} \|\bar{F}(y)\|^4 + 3\|\bar{G}(y)\|^4 \right) y^4 \end{aligned} \quad (15)$$

### 2.2 自适应神经网络输出反馈控制器设计

基于系统 (3) 和观测器 (6), 整个系统可被表示为

$$\begin{aligned} dy &= [\hat{x}_2 + \tilde{x}_2 + a_{11}y + \phi_1(y) + f_1(y)]dt + \mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w} \\ d\hat{x}_i &= \left[ \hat{x}_{i+1} - l_i \tilde{x}_1 + \sum_{j=1}^i a_{ij} \hat{x}_j + \phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, y) \right] dt, \\ & \quad i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$d\hat{x}_n = \left[ u - l_n \tilde{x}_1 + \sum_{j=1}^n a_{nj} \hat{x}_j + \phi_n(\tilde{\mathbf{x}}_n, y) \right] dt$$

其中,  $\phi_1(y) = \varphi_1(y), \phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, y) = \varphi_i(\hat{x}_1 - k_1(y - \hat{x}_1), \dots, \hat{x}_i - k_i(y - \hat{x}_1)), i = 2, \dots, n$ . 显然, 可以通过反推方法设计系统控制器. 定义下面的坐标变换

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1 \\ z_i &= \hat{x}_i - \alpha_{i-1}(y, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, \hat{\theta}, \hat{W}), \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

其中,  $\hat{\theta}$  和  $\hat{W}$  分别是式 (24) 中的未知常数  $\theta$  和 NN 权向量  $W$  的估计量;  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  为稳定化函数, 其形式随后给出. 在上述坐标变换下, 系统 (16) 可改写为

$$\begin{aligned} dz_1 &= [\alpha_1 + z_2 + \tilde{x}_2 + (a_{11}y + \phi_1(y)) + f_1(y)]dt + \\ &\mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w} \\ dz_i &= \left[ \alpha_i + z_{i+1} + \sum_i -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\tilde{x}_2 + f_1(y)) - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 \right] dt - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w} \\ & \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (17) \\ dz_n &= \left[ u + \sum_n -\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} (\tilde{x}_2 + f_1(y)) - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial y^2} \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 \right] dt - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w} \end{aligned}$$

其中,  $\sum_i (i = 2, \dots, n)$  定义为

$$\begin{aligned} \sum_i &= -l_i(y - \hat{x}_1) + \sum_{j=1}^i a_{ij} \hat{x}_j + \phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, y) - \\ &\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \hat{x}_2 - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} [a_{11}y + \phi_1(y)] - \\ &\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} \left[ \hat{x}_{j+1} - l_j(y - \hat{x}_1) + \sum_{k=1}^j a_{jk} \hat{x}_k + \right. \\ &\left. \phi_j(\tilde{\mathbf{x}}_j, y) \right] - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{W}} \dot{\hat{W}} \end{aligned}$$

对系统 (17), 设计下面的稳定化函数和控制律

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1 y - \phi_1(y) - a_{11} y - y(\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(y) + \hat{\theta}\psi(y)) \\ \alpha_i &= -c_i z_i - \sum_i -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \right)^2 z_i^3 - \frac{3}{4} z_i - \Xi_i z_i, \\ & \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (18) \\ u &= -c_n z_n - \sum_n -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial y^2} \right)^2 z_n^3 - \Xi_n z_n \end{aligned}$$

其中,  $\Xi_i$  定义为

$$\Xi_i = \frac{3}{2} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^4 + \frac{1}{4}, \quad i = 2, \dots, n \quad (19)$$

$c_i$  为正的设计参数;  $\mathbf{S}(y)$  为向量基函数. 将式 (18) 代入系统 (17), 即得下面的动态系统

$$\begin{aligned} dz_1 &= [-c_1 y - y(\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(y) + \hat{\theta}\psi(y)) + z_2 + \tilde{x}_2 + \\ & \quad f_1(y)]dt + \mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w} \\ dz_i &= \left[ -c_i z_i - \Xi_i z_i - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \right)^2 z_i^3 - \frac{3}{4} z_i + z_{i+1} - \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\tilde{x}_2 + f_1(y)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 \right] dt - \\ & \quad \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ dz_n &= \left[ -c_n z_n - \Xi_n z_n - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial y^2} \right)^2 z_n^3 - \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} (\tilde{x}_2 + f_1(y)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial y^2} \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 \right] dt - \\ & \quad \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \mathbf{g}_1^T(y)d\mathbf{w} \quad (20) \end{aligned}$$

### 2.3 稳定性分析

考虑下面的四次 Lyapunov 函数

$$V = V_{\tilde{x}} + \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n z_i^4 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{W}} + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2 \quad (21)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}, \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  分别表示  $\mathbf{W}$  和  $\theta$  的估计误差. 按照 Itô 公式和式 (20), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= \mathcal{L}V_{\tilde{x}} - c_1 y^4 - y^4 (\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(y) + \hat{\theta}\psi(y)) + \\ & \quad y^3 (z_2 + \tilde{x}_2 + f_1(y)) + \frac{3}{2} y^2 \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 - \\ & \quad \sum_{i=2}^n \left[ c_i z_i^4 + \Xi_i z_i^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \right)^2 z_i^6 - \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\tilde{x}_2 + f_1(y)) z_i^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2} \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 z_i^3 + \right. \\ & \quad \left. \frac{3}{2} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^2 \|\mathbf{g}_1(y)\|^2 z_i^2 \right] - \\ & \quad \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{3}{4} z_i^4 + z_{i+1} z_i^3 \right] - \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(y) y^4 - \tilde{\theta} \psi(y) y^4 \quad (22) \end{aligned}$$

利用 Young 不等式, 按照与式 (13) 和 (14) 类似的思路, 可将上式转化为下面的形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &\leq (-\lambda b + \frac{3b}{2} \|P\|^{\frac{8}{3}} + 3b \|P\|^4 + \frac{n}{4}) \|\tilde{\mathbf{x}}\|^4 - \\ & \quad \sum_{i=1}^n c_i z_i^4 - y^4 (\mathbf{W}^T \mathbf{S}(y) + \theta\psi(y)) + \\ & \quad y^4 \Psi(y) \quad (23) \end{aligned}$$

其中,  $\Psi(y) = \frac{b}{2} \|\bar{F}(y)\|^4 + 3b \|\bar{G}(y)\|^4 + \frac{3}{2} + \bar{f}_1(y) + \frac{3}{2} \|\bar{\mathbf{g}}_1(y)\|^2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{4} \bar{f}_1^4(y) + \sum_{i=2}^n \|\bar{\mathbf{g}}_1(y)\|^4$ , 则可用径向基函数神经网络 (Radial basis function neural networks, RBFNN)<sup>[9]</sup> 来逼近  $\Psi(y)$ , 得

$$\Psi(y) = \mathbf{W}^T \mathbf{S}(y) + \theta\psi(y) \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{S}(y) = [s_1(y), \dots, s_l(y)]^T: D \rightarrow \mathbf{R}^l$  是已知的光滑向量函数, NN 节点数  $l > 1$ , 基函数  $s_i(y), 1 \leq i \leq l$  取做通常形式的高斯函数  $s_i(y) = \exp[-(y - \mu_i)^2 / \eta^2]$ ,  $\mu_i \in D, \eta > 0$  分别是基函数的中心和宽度, 其自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \psi(y) y^4, \quad \dot{\hat{\mathbf{W}}} = \Gamma \mathbf{S}(y) y^4 \quad (25)$$

其中,  $\gamma > 0$  和  $\Gamma > 0$  为自适应增益. 将式 (24) 代入式 (23), 得到

$$\mathcal{L}V \leq (-\lambda b + \frac{3b}{2} \|P\|^{\frac{8}{3}} + 3b \|P\|^4 + \frac{n}{4}) \|\tilde{\mathbf{x}}\|^4 - \sum_{i=1}^n c_i z_i^4 \quad (26)$$

对给定的正数  $p > 0$ , 选择合适的参数  $b$ , 使下面的不等式成立

$$-\lambda b + \frac{3b}{2} \|P\|^{\frac{8}{3}} + 3b \|P\|^4 + \frac{n}{4} \leq -p \quad (27)$$

进而, 有

$$\mathcal{L}V \leq -p \|\tilde{\mathbf{x}}\|^4 - \sum_{i=1}^n c_i z_i^4 \quad (28)$$

即整个闭环系统的无穷小生成元是负半定的. 由随机 Lasalle 定理<sup>[8]</sup>, 立即可得下面的稳定性结果.

**定理 1.** 在假设 1 和 2 的条件下, 考察包括系统 (1), 控制律 (18) 和自适应律 (25) 在内的闭环系统, 对有界初始条件, 下面的性质成立:

1) 闭环系统的原点平衡状态依概率稳定;

2) 对每一个  $(\mathbf{x}(0), \hat{\mathbf{W}}(0), \hat{\theta}(0))$ , 系统状态  $\mathbf{x}(t)$  和参数估计  $\hat{\theta}(t), \hat{\mathbf{W}}(t)$  满足

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \right\} = 1 \quad (29)$$

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{W}}(t) \text{ 存在且为有限值} \right\} = 1 \quad (30)$$

### 3 仿真研究

本节将给出一个数值例子说明本文所提控制方案的有效性. 考虑下面的二阶随机非线性系统

$$\begin{cases} dx_1 = (x_2 + y \cos y) dt + [y \sin y] d\mathbf{w} \\ dx_2 = \left( u + x_2 - x_2^3 + \sin y e^{-y^2} \right) dt + \\ \quad [y + y^2 \sin(y^2)] d\mathbf{w} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (31)$$

在仿真中, NN 节点数  $l = 9$ , 且假定  $\psi(y) = 1$ , 参数估计的初值取为  $\hat{\theta}(0) = 0, \hat{W}(0) = \mathbf{0}$ , 自适应增益  $\gamma = 1$ ,  $\Gamma = I$ . 对不同的初始状态  $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$ ;  $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = -1$  时仿真结果分别如图 1 和图 2 所示. 从中可以看出, 所设计的控制器均可以使闭环系统稳定, 并且估计参数的极限存在且为有限值.

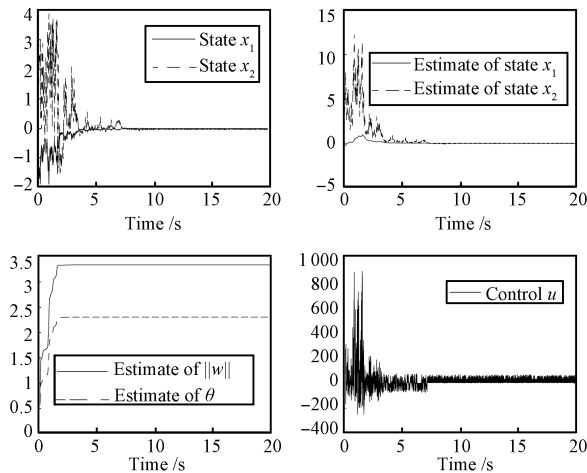


图 1  $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$  时闭环系统仿真结果

Fig. 1 Simulation results of closed-loop system for  $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$

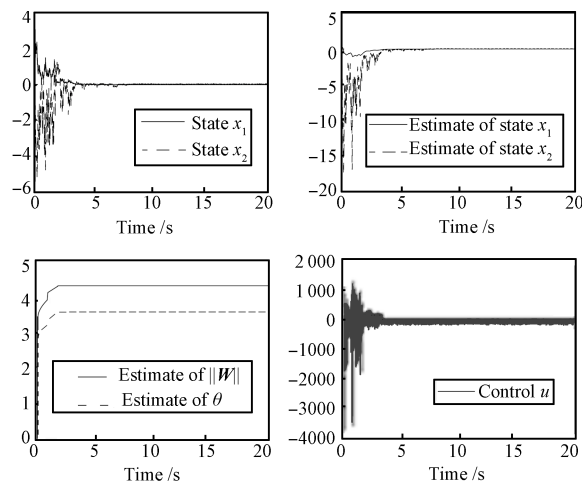


图 2  $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = -1$  时闭环系统仿真结果

Fig. 2 Simulation results of closed-loop system for  $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = -1$

## 4 结论

本文首次将 ANNC 方法推广到随机非线性严格反馈系统的输出反馈控制设计中, 并且仅采用一个 NN 补偿所有的未知上界函数, 放松了对未知非线性项的限制条件, 结合自适应反推方法和非线性观测器设计技术, 并通过构造一个四次 Lyapunov 函数, 保证了闭环系统依概率稳定.

## References

1 Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995

- 2 Zhao Ping, Liu Shu-Jun. Adaptive stabilization control of a class of large-scale stochastic nonlinear systems with time-delays and unknown virtual control coefficients. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(8): 912–920  
(赵平, 刘淑君. 一类虚拟控制系数未知的随机非线性时滞大系统的自适应镇定控制. *自动化学报*, 2008, **34**(8): 912–920)
- 3 Liu S J, Jiang Z P, Zhang J F. Globally output-feedback stabilization for a class of stochastic non-minimum-phase nonlinear systems. *Automatica*, 2008, **44**(2): 1944–1957
- 4 Liu S J, Zhang J F. Output-feedback control of a class of stochastic nonlinear systems with linearly bounded unmeasurable states. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, **18**(6): 665–687
- 5 Pan Z G, Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, **37**(3): 957–995
- 6 Liu Y G, Pan Z G, Shi S J. Output feedback control design for strict-feedback stochastic nonlinear systems under a risk-sensitive cost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(3): 509–513
- 7 Xie X J, Tian J. Adaptive state-feedback stabilization of high-order stochastic systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 2009, **45**(1): 126–133
- 8 Krstic M, Deng H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*. London: Springer-Verlag, 1998
- 9 Polycarpou M M, Mears M J. Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parametrized on-line approximators. *International Journal of Control*, 1998, **70**(3): 363–384
- 10 Chen W. Adaptive NN control for discrete-time pure-feedback systems with unknown control direction under amplitude and rate actuator constraints. *ISA Transactions*, 2009, **48**(3): 304–311
- 11 Fan X Z, Arcak M. Observer design for systems with multi-variable monotone nonlinearities. *Systems and Control Letters*, 2003, **50**(4): 319–330
- 12 Oksendal B K. *Stochastic Differential Equations — An Introduction with Applications (Sixth Edition)*. New York: Springer-verlag, 2005
- 13 Deng H, Krstic M, Williams R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(8): 1237–1253

李 靖 西安电子科技大学理学院讲师, 博士研究生. 主要研究方向为非线性控制和神经网络控制. 本文通信作者.

E-mail: xidianjing@126.com

(LI Jing Lecturer and Ph. D. candidate at the School of Science, Xidian University. Her research interest covers nonlinear control and neural networks control. Corresponding author of this paper.)

李俊民 西安电子科技大学理学院教授. 主要研究方向为智能控制, 非线性控制和学习控制. E-mail: jmli@mail.xidian.edu.cn

(LI Jun-Min Professor at the School of Science, Xidian University. His research interest covers intelligent control, nonlinear control, and learning control.)

陈为胜 西安电子科技大学理学院副教授. 主要研究方向为非线性控制和神经网络控制. E-mail: wshchen@126.com

(CHEN Wei-Sheng Associate professor at the School of Science, Xidian University. His research interest covers nonlinear control and neural networks control.)