# 多变量离散系统随机信号 跟踪性能极限

丁李1 关治洪1 王后能1

要 研究线性时不变、多变量、离散系统对随机信号的跟踪性能极 限问题, 所考虑的随机参考输入信号为布朗运动序列. 研究结果表明此 类系统的跟踪性能极限完全由被控对象的结构特征和参考输入的统计特 征决定, 其中, 结构特征指被控对象的非最小相位零点和不稳定极点的位 置和方向. 作为特殊情形, 本文给出了参考输入为一致随机信号以及被控 对象仅含有单个非最小相位零点和单个不稳定极点时系统跟踪性能极限 问题的解. 最后,给出了两自由度补偿器跟踪系统对随机信号的跟踪性

关键词 多变量离散系统, 随机信号, 跟踪性能极限, 非最小相位零点, 不稳定极点

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00446

## Tracking Performance Limitations of Random Signal in Multivariable Discrete-time Systems

DING Li<sup>1</sup> GUAN Zhi-Hong<sup>1</sup> WANG Hou-Neng1

Abstract This paper studies tracking performance limitations in linear time invariant multivariable discrete-time systems with a random signal reference input. The random input signal considered is the Brownian motion sequence. Results show that tracking performance limitations in these kinds of systems depend on the structure of the plant and the statistic characteristics of the reference input. Here, the structure of the plant represents locations and directions of the nonminimum phase zeros and unstable poles. As special cases, this paper also studies tracking performance limitations when a uniform random reference input and only a single non-minimum phase zero with single unstable pole are considered. Finally, tracking performance limitations of a two-degrees-of-freedom compensator tracking system with a random reference input is given.

Key words Multivariable discrete-time systems, random signal, tracking performance limitations, nonminimum phase zeros, unstable poles

控制系统的跟踪性能研究是一类经典的控制问题. 单变 量系统的最小跟踪误差由系统的非最小相位零点和时延决 定[1]. 近年来, 研究者将单变量系统跟踪性能的研究拓展到 多变量系统, 分别研究了连续、离散多变量系统的跟踪性能 问题[2-4]. 相关研究表明, 影响多变量系统跟踪性能的因素 包括时延, 非最小相位零点和不稳定极点的位置、方向, 以 及参考输入信号. 这些研究揭示了这样一个本质: 线性时不 变系统的最小跟踪误差完全地由被控对象的固有结构特征决 定, 无论采取何种补偿方式和补偿器, 系统的跟踪性能都无 法超越由对象和参考输入共同决定的某个极限值, 即系统跟 踪性能极限. 对于多变量控制系统的跟踪性能研究, 已有的 结果均基于确定性的参考输入信号,如:阶跃信号、正弦信 号,但针对随机信号的跟踪性能极限研究尚不多见.基于此, 本文研究线性时不变、多变量、离散控制系统对随机信号的 跟踪性能极限问题. 考虑到系统输入信号的随机性, 这里研 究的是平均跟踪问题, 其结果定量地反映了当参考输入随机 变化时, 控制系统性能极限的期望值. 本文的研究, 旨在揭示 系统的跟踪性能极限与随机参考输入信号统计规律的联系, 给出由参考输入和系统结构共同决定的跟踪性能极限值,为 跟踪系统控制器的设计提供理论上的指导.

本文的符号及相关定义说明如下:  $\mathcal{H}_{\infty}$  表示所有稳定正 则实有理函数矩阵构成的空间.  $\bar{z}$  表示复数 z 的共轭.  $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$  和  $A^{\mathrm{T}}$  分别表示向量  $\boldsymbol{x}$  和矩阵 A 的转置,  $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$  和  $A^{\mathrm{H}}$  为相应的 共轭转置.  $\operatorname{tr} A$  表示矩阵 A 的迹.  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 表示单位开圆面,  $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  表示单位闭圆面,  $\partial \mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$  表示单位圆,  $\bar{\mathbb{D}}^c = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\}$ 表示  $\bar{\mathbb{D}}$  的补集.  $\angle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \arccos |\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{v}|$  表示单位向量  $\boldsymbol{u}$  和 v 的夹角.  $||F||_F^2 = \operatorname{tr}(F^H F)$  表示矩阵 F 的 Frobenius 范数.  $\mathcal{L}_2$  表示 Hilbert 空间, 定义为

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ F : F(z) \, \, \text{在} \, \partial \mathbb{D} \, \, \text{中可测}, \right.$$

$$\|F\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| F(e^{\mathrm{j}\theta}) \right\|_{\mathrm{F}}^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

相应的内积定义为

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}(F^{H}(e^{j\theta})G(e^{j\theta})) d\theta$$

 $\mathcal{H}_2$  空间和  $\mathcal{H}_2^{\perp}$  空间为  $\mathcal{L}_2$  空间的子空间, 分别定义为<sup>[5]</sup>

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ F : F(z) \text{ 在 } \bar{\mathbb{D}}^c \text{ 中解析}, \right.$$
$$\|F\|_2 = \left( \sup_{r>1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| F(re^{\mathrm{j}\theta}) \right\|_{\mathrm{F}}^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

$$\begin{split} \mathcal{H}_2^\perp &= \left\{ F: F(z) \ \text{在} \ \mathbb{D} \ \text{中解析}, \right. \\ \left\| F \right\|_2 &= \left( \sup_{r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| F(r \mathrm{e}^{\mathrm{j} \theta}) \right\|_{\mathrm{F}}^2 \mathrm{d} \theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \end{split}$$

它们构成了  $\mathcal{L}_2$  空间的一个正交对.

## 准备工作

#### 1.1 问题描述

本文研究的问题如图 1 所示, 图中 K 为补偿器, P 为对 象, y 为系统输出, u 为布朗运动序列, 作为系统参考输入, 其 中任意通道 i 中布朗运动序列的均值为 0, 方差为  $\sigma_i^2 t$ .

定义系统的平均跟踪误差为

$$J = \mathrm{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^{\mathrm{T}} \mathbf{e}[k]\right\}$$
 (1)

其中, k 为采样时刻. 所要解决的问题为: 在所有镇定补偿器 集合  $\mathbb{K}$  中确定一个补偿器 K, 求取系统的跟踪误差极限值,

收稿日期 2009-01-20 录用日期 2009-05-06 Manuscript received January 20, 2009; accepted May 6, 2009

国家自然科学基金 (60834002, 60704035, 60973012) 和教育部博士点基金 (20090142110039) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60834002, 60704035, 60973012) and the Doctoral Foundation of Ministry of Education of China (20090142110039)

华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074
 Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074

即系统的跟踪性能极限值, 也就是求:

$$J^* = \inf_{K \in \mathbb{K}} J$$

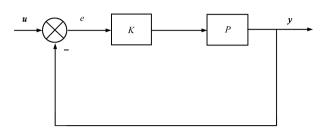


图 1 单自由度多变量跟踪系统

Fig. 1 One degree of freedom multivariable tracking system

#### 1.2 预备知识

对于有理传递函数矩阵 P, 其右互质分解和左互质分解可以表示为

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$
 (2)

这里  $N, M, \tilde{N}, \tilde{M} \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}$  且满足:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I$$
 (3)

其中,  $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}$ .

对于多变量控制系统, 如果  $\mathbf{\eta}^{\mathrm{H}}N(s)=0$ , 则称  $\mathbf{\eta}$  为零点 s 的输出方向, 如果  $\tilde{M}(p)\boldsymbol{\omega}=0$ , 则称  $\boldsymbol{\omega}$  为极点 p 的右极点 方向

所有镇定补偿器的集合通过 Youla 参数化<sup>[5]</sup> 可以表示为

$$\mathbb{K} = \left\{ K : K = -(Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = -(\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}), \ Q \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty} \right\}$$

文献 [6-7] 表明 P 右可逆才能保证跟踪误差为有限值, 因此本文假定矩阵 P 右可逆. 此外, 类似于以往对系统跟踪性能极限的研究, 假定所研究的系统不具有多重极点或零点, 该假定出于技术分析简化的需要. 通过 Smith-McMillan型定义对象 P 的非最小相位零点为  $s_i$ ,  $i=1,\cdots,N_s$ , 可将 N(z) 分解为

$$N(z) = L(z)N_m(z)$$

这里 z 为 Z 变换算子,  $N_m(z)$  表示 N(z) 的最小相位部分, L(z) 为全通部分, 可以表示为

$$L(z) = \prod_{i=1}^{N_s} L_i(z)$$

$$L_i(z) = I - \frac{|s_i| - 1}{1 - s_i} \frac{z - 1}{1 - \bar{s}_i z} \eta_i \eta_i^{\mathrm{H}}$$
(4)

其中,  $\eta_i$  为非最小相位零点  $s_i$  的输出方向向量, 满足  $\|\eta_i\|$  = 1. 上述构造方法在文献 [8-9] 中均可见到. 注意到 L(z) 的这种构造方法使得当 z=1 时有 L(1)=I, 后面的推导将用到这个重要的特性.

## 2 主要结果

定理 1. 假设图 1 中的对象 P 含有  $N_s$  个非最小相位零点和  $N_p$  个不稳定极点, 其中, 第 i 个非最小相位零点的输出方向为  $\eta_i$ , 第 i 个不稳定极点的输入方向为  $\omega_i$ . y 为系统输出, u 为零均值布朗运动序列, 且通道 i 中的布朗运动序列的方差为  $\sigma_i^2 t$ ,  $i=1,\cdots,n$ . 则该多变量离散系统的平均最小跟踪误差为

$$\begin{split} J^* &= \sum_{i=1}^{N_s} \left( \frac{\left|s_i\right|^2 - 1}{\left|1 - s_i\right|^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \cos^2 \angle (\pmb{\eta}_i, \pmb{e}_j) \right) + \\ &\sum_{i,j=1}^{N_p} \frac{(\left|p_i\right|^2 - 1)(\left|p_j\right|^2 - 1)}{(1 - \bar{p}_i)(1 - p_j)(\bar{p}_i p_j - 1)} [\pmb{\omega}_i^{\mathrm{H}} H_i^{\mathrm{H}} U^{\mathrm{H}} \times \\ &(I - L^{-1}(p_i))^{\mathrm{H}} (I - L^{-1}(p_j)) U H_j \pmb{\omega}_j \pmb{\omega}_i^{\mathrm{H}} G_j^{\mathrm{H}} G_i \pmb{\omega}_i] \end{split}$$

这里  $e_i$  表示第 i 个元素为 1 的单位向量,

$$egin{align} U &= \operatorname{diag}\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\} \ G_i &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} F_k(p_i)
ight)^{-\mathrm{H}}, \quad H_i &= \left(\prod_{k=i+1}^{N_p} F_k(p_i)
ight)^{-1} \ F_i(z) &= I - rac{|p_i|^2 - 1}{1 - p_i} rac{z - 1}{1 - ar{p}_i z} oldsymbol{\omega}_i oldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{H}} \ \end{cases}$$

证明. 由式 (1) 可以得到:

$$J = E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^{\mathrm{T}} \mathbf{e}[k]\right\} = \mathrm{tr}E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k] \mathbf{e}[k]^{\mathrm{T}}\right\} = \mathrm{tr}R_{e}(0)$$
(5)

这里  $R_e(0)$  为随机误差信号 e[k] 的自相关函数. 将参考输入随机信号 u[k] 的谱密度表示为  $S_u$ , 可以得到 $^{[10]}$ :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}[S(e^{j\theta}) S_u S^{H}(e^{j\theta})] d\theta = \left\| SU \frac{1}{z-1} \right\|_{2}^{2}$$
 (6)

其中, S 为系统的灵敏度传递函数,即从输入参量 u 到误差 参量 e 的传递函数. 类似于其他离散系统跟踪性能的研究,假定 S(z) 至少有一个零点 z=1 以保证跟踪误差为有限值.矩阵 U 为:  $U=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$ .由式  $(2)\sim(3)$  可以得到:

$$S(z) = (X(z) - N(z)Q(z))\tilde{M}(z)$$

因此有:

$$J^* = \inf_{Q \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}} \left\| (X(z) - N(z)Q(z))\tilde{M}(z)U\frac{1}{z-1} \right\|_2^2$$

由文献[2] 知, 存在  $R_1(z) \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}$  满足:

$$L^{-1}(z)X(z)\tilde{M}(z) = L^{-1}(z) + R_1(z)$$

故可以得到:

$$\left\| (X(z) - N(z)Q(z))\tilde{M}(z)U\frac{1}{z-1} \right\|_{2}^{2} = \left\| ((L^{-1}(z) - I) + (I + R_{1}(z) - N_{m}(z)Q(z)\tilde{M}(z)))U\frac{1}{z-1} \right\|_{2}^{2}$$

П

由 L(1) = I 可知  $(L^{-1}(z) - I)U\frac{1}{z-1} \in \mathcal{H}_2^{\perp}$ ,通过选择适当的 Q(z) 可以使  $(I + R_1(z) - N_m(z)Q(z)\tilde{M}(z))U\frac{1}{z-1} \in \mathcal{H}_2$ ,因此有:

$$J^* = \left\| (L^{-1}(z) - I)U \frac{1}{z - 1} \right\|_2^2 + \inf_{Q \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}} \left\| (I + R_1(z) - N_m(z)Q(z)\tilde{M}(z))U \frac{1}{z - 1} \right\|_2^2$$

利用式 (4) 计算  $\left\| (L^{-1}(z) - I)U \frac{1}{z-1} \right\|_{c}^{2}$ , 可以得到:

$$\left\| (L^{-1}(z) - I)U \frac{1}{z - 1} \right\|_{2}^{2} = \sum_{i=1}^{N_{s}} \left\| \frac{|s_{i}|^{2} - 1}{1 - s_{i}} \frac{1}{1 - \bar{s}_{i} z} \boldsymbol{\eta}_{i} \boldsymbol{\eta}_{i}^{H} U \right\|_{2}^{2} = \sum_{i=1}^{N_{s}} \left( \frac{|s_{i}|^{2} - 1}{|1 - s_{i}|^{2}} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{j}^{2} \cos^{2} \angle(\boldsymbol{\eta}_{i}, \boldsymbol{e}_{j}) \right)$$
(7)

将  $\tilde{M}(z)U$  分解为  $\tilde{M}(z)U=W(z)F(z)$ , 其中, W(z) 为最小相位部分, F(z) 为全通部分, 可以表示为  $F(z)=\prod_{i=1}^{N_p}F_i(z)$ . 则有:

$$\inf_{Q \in \mathbf{R} \mathcal{H}_{\infty}} \left\| (I + R_1(z) - N_m(z)Q(z)\tilde{M}(z)))U \frac{1}{z - 1} \right\|_2^2 =$$

$$\inf_{Q \in \mathbf{R} \mathcal{H}_{\infty}} \left\| (I + R_1(z)UF^{-1}(z) - \frac{1}{z - 1}) \right\|_2^2 =$$

$$\inf_{Q \in \mathbf{R} \mathcal{H}_{\infty}} \left\| \left( \sum_{i=1}^{N_p} (I - L^{-1}(p_i))UH_i(z)(F_i^{-1}(z) - I) \times \right) \right)$$

$$G_i^{\mathbf{H}}(z) \times \frac{1}{z - 1} + (R_2(z) - N_m(z)Q(z)W(z)) \frac{1}{z - 1} \right\|_2^2$$

注意到

$$\left(\sum_{i=1}^{N_p} (I - L^{-1}(p_i))UH_i(z)(F_i^{-1}(z) - I)G_i^{\mathrm{H}}(z)\right) \times \frac{1}{z - 1} \in \mathcal{H}_2^{\perp}$$

而  $R_2(z) \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}$  以及选择合适的 Q(z) 使得:

$$(R_2(z) - N_m(z)Q(z)W(z))\frac{1}{z-1} \in \mathcal{H}_2$$

可以得到:

$$\inf_{Q \in \mathbf{R} \mathcal{H}_{\infty}} \left\| (I + R_{1}(z) - N_{m}(z)Q(z)\tilde{M}(z))U \frac{1}{z - 1} \right\|_{2}^{2} = \\
\left\| \left( \sum_{i=1}^{N_{p}} (I - L^{-1}(p_{i})UH_{i}(F_{i}^{-1}(z) - I)G_{i}^{\mathbf{H}}) \frac{1}{z - 1} \right\|_{2}^{2} = \\
\left\| \left( \sum_{i=1}^{N_{p}} \frac{|p_{i}|^{2} - 1}{1 - \bar{p}_{i}} \frac{z - 1}{z - p_{i}} (I - L^{-1}(p_{i})) \times UH_{i}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{i}G_{i}^{\mathbf{H}} \right) \times \\
\frac{1}{z - 1} \right\|_{2}^{2} = \sum_{i,j=1}^{N_{p}} \frac{(|p_{i}|^{2} - 1)(|p_{j}|^{2} - 1)}{(1 - \bar{p}_{i})(1 - p_{j})(\bar{p}_{i}p_{j} - 1)} [\boldsymbol{\omega}_{i}^{\mathbf{H}} H_{i}^{\mathbf{H}} U^{\mathbf{H}} \times (I - L^{-1}(p_{i}))^{\mathbf{H}} (I - L^{-1}(p_{j}))UH_{j}\boldsymbol{\omega}_{j}\boldsymbol{\omega}_{i}^{\mathbf{H}} G_{i}^{\mathbf{H}} G_{i}\boldsymbol{\omega}_{i}] \tag{8}$$

由式 (7) 和 (8), 定理 1 得证.

通过定理1可以看到,多变量离散系统对随机信号的跟踪性能由以下三个因素决定:对象非最小相位零点的位置和右极点方向,对象不稳定极点的位置和输入方向,随机参考输入信号的统计特征.其中前两个因素是由对象的结构决定的,第三个因素则是跟踪随机信号时特有的影响因素.下面我们将针对定理1讨论若干特殊情况.

**注 1.** 考虑一致多变量离散系统跟踪性能极限问题. 设 参考输入各个通道中的布朗运动序列均值为 0, 方差相同, 即  $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma$ . 这时定理 1 退化为如下形式:

$$J^* = \sigma^2 \Delta \tag{9}$$

其中

$$\begin{split} & \Delta = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{|s_i|^2 - 1}{|1 - s_i|^2} + \sum_{i,j=1}^{N_p} \frac{(|p_i|^2 - 1)(|p_j|^2 - 1)}{(1 - \bar{p}_i)(1 - p_j)(\bar{p}_i p_j - 1)} \times \\ & [\pmb{\omega}_i^{\mathrm{H}} H_i^{\mathrm{H}} (I - L^{-1}(p_i))^{\mathrm{H}} (I - L^{-1}(p_j)) H_j \pmb{\omega}_j \pmb{\omega}_j^{\mathrm{H}} G_j^{\mathrm{H}} G_i \pmb{\omega}_i] \end{split}$$

各个通道内的布朗运动序列方差相同, 因此可以将布朗运动的统计特征量  $\sigma$  从极限值表达式中剥离出来. 式 (9) 中的  $\Delta$  是由确定的对象决定的常量, 显见  $\sigma$  的增大将恶化系统的跟踪性能.

**注 2.** 考虑被控对象仅含有单个非最小相位零点和单个不稳定极点的特殊情形. 假定该非最小相位零点为 s, 输出方向为  $\eta$ , 不稳定极点为 p. 则定理 1 退化为如下形式:

$$J^* = \frac{|s|^2 - 1}{|s - 1|^2} \left| \frac{1 - \bar{s}p}{p - s} \right|^2 ||U\boldsymbol{\eta}||^2$$
 (10)

更进一步, 如果参考输入信号是一致的, 则有:

$$J^* = \frac{|s|^2 - 1}{|s - 1|^2} \left| \frac{1 - \bar{s}p}{p - s} \right|^2 \sigma^2 \tag{11}$$

式 (10) 和 (11) 均揭示了零极点对消对系统跟踪性能的致命影响.

## 3 两自由度跟踪系统设计

通过上述分析可知,对于单自由度补偿器跟踪,一旦对象和被跟踪信号确定,就将产生一个无法超越的跟踪性能极限.因此要继续提高跟踪精度,必须增加补偿器的个数.图 2中的两自由度补偿器系统是一种常见的广泛用于信号跟踪的

系统结构. 在图 2 中,  $D_c \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}$ ,  $[N_{C_1} \ N_{C_2}] \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}$ , 补偿器集合可以表示为 $^{[11-12]}$ :

$$\mathbb{K}_{2} = \left\{ K : K = [K_{1} \ K_{2}] = (\tilde{X} - R\tilde{N})^{-1}[Q \ \tilde{Y} - R\tilde{M}] \right.$$

$$Q \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty}, R \in \mathbf{R}\mathcal{H}_{\infty} \right\}$$

$$(12)$$

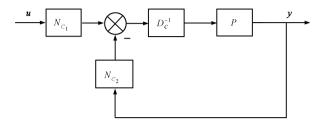


图 2 两自由度多变量跟踪系统

Fig. 2 Two degree of freedom multivariable tracking system

以下给出多变量离散系统采用两自由度补偿器结构跟踪 布朗运动序列的结果.

**定理 2.** 图 2 中两自由度多变量离散系统的平均最小跟踪误差为

$$J^* = \sum_{i=1}^{N_s} \left( \frac{|s_i|^2 - 1}{|1 - s_i|^2} \sum_{i=1}^n \sigma_j^2 \cos^2 \angle (\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{e}_j) \right)$$
(13)

证明. 根据式 (12) 可以将式 (1) 写为

$$J = \left\| (I - N(z)Q(z))U\frac{1}{z-1} \right\|_2^2$$

后面的证明方法类似于定理 1 的证明.

从定理 2 可以看到, 对象的不稳定极点不再影响控制系统的跟踪性能, 这是因为相对于单自由度补偿器跟踪系统, 多出的一个自由度补偿了不稳定极点带来的负面影响.

#### 4 结论

本文研究了线性时不变、多变量离散系统的跟踪性能极限问题,考虑的参考输入信号为随机信号——布朗运动序列.结果表明,在跟踪随机信号时,这类系统的跟踪性能除了受到对象非最小相位零点和不稳定极点的影响外,还与参考输入的统计特征有关,当输入信号序列的标准差较大时,跟踪性能将变差.特殊地,本文研究了一致参考输入以及仅有单个非最小相位零点和单个不稳定极点时的系统跟踪性能极限问题,后者的研究结果表明零极点对消将显著恶化系统跟踪性能.最后,本文研究了两自由度补偿器跟踪系统的跟踪性能.最后,本文研究了两自由度补偿器跟踪系统的跟踪性能极限问题,所获得的跟踪误差极值小于采用单自由度补偿时跟踪误差的极值,这是由于多出的自由度补偿了系统不稳定极点带来的负面影响.

### References

- 1 Morari M, Zaririou E. Robust Process Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1989
- 2 Chen J, Qiu L, Toker O. Limitations on maximal tracking accuracy. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(2): 326-331
- 3 Toker O, Chen J, Qiu L. Tracking performance limitations in LTI multivariable discrete-time systems. *IEEE Transac*tions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(5): 657–670

- 4 Su W Z, Qiu L, Chen J. Fundamental performance limitations in tracking sinusoidal signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(8): 1371–1380
- 5 Francis B A. A Course in  $H_{\infty}$  Control Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1987
- 6 Kwakernaak H, Sivan R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(1): 79–86
- 7 Qiu L, Davison E J. Performance limitations of nonminimum phase systems in the servomechanism problem. *Automatica*, 1993, **29**(2): 337–349
- 8 Chen J, Nett C N. Sensitivity integrals for multivariable discrete-time systems. *Automatica*, 1995, **31**(8): 1113-1124
- 9 Zhang Z, Freudenberg J S. Loop transfer recovery for non-minimum phase plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(5): 547-553
- 10 Gasparyan O N. Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: a Classical Approach. New York: Wiley, 2008
- 11 Vidyasagar M. Control System Synthesis: a Factorization Approach. Cambridge: MIT Press, 1995
- 12 Hara S, Sugie T. Independent parameterization of twodegree-of-freedom compensators in general robust tracking systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(1): 59-67

**丁 李** 华中科技大学控制科学与工程系博士研究生. 主要研究方向为 无线传感器网络, 网络控制系统和最优控制.

E-mail: dingliaruo@163.com

(**DING Li** Ph. D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology. His research interest covers wireless sensor networks, networked control systems, and optimal control.)

**关治洪** 华中科技大学控制科学与工程系教授. 主要研究方向为脉冲控制系统. 复杂网络与混杂系统和网络控制系统. 本文通信作者.

E-mail: zhguan@mail.hust.edu.cn

(GUAN Zhi-Hong Professor in the Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology. His research interest covers impulsive control systems, complex networks and hybrid systems, and networked control systems. Corresponding author of this paper.)

王后能 华中科技大学控制科学与工程系博士研究生. 主要研究方向为切换控制系统和网络控制系统. E-mail: wanghouneng@163.com

(WANG Hou-Neng Ph.D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology. His research interest covers switched control systems and networked control systems.)