

# 基于数据挖掘与系统理论建立摩擦模糊模型与控制补偿

王永富<sup>1</sup> 王殿辉<sup>2</sup> 柴天佑<sup>3</sup>

**摘要** 建立机械摩擦力模型及其相应的控制补偿策略一直是人们所关注的问题. 由于摩擦力所固有的非线性及不确定特征, 用传统的数学建模与控制补偿方法难以达到满意的系统性能要求. 本文采用模糊建模技术逼近摩擦动力系统并将辨识结果用在前馈补偿控制器设计中. 模糊建模过程由以下 3 个部分组成: 首先采用数据挖掘技术辨识出模糊系统的模糊规则库, 然后利用该规则库建立模糊系统的静态模型, 最后以李雅普诺夫稳定性理论为基础进一步辨识出模糊系统的动态模型. 在控制器设计方面, 采用了自适应模糊系统前馈补偿的比例微分 (Proportional-derivative, PD) 算法. 运用李雅普诺夫稳定性分析证明了闭环系统跟踪误差的有界性. 数值仿真结果表明了该方法的有效性和实用性.

**关键词** 摩擦动力, 模糊模型, 数据挖掘, 李雅普诺夫稳定性, 前馈控制补偿

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00412

## Data Mining and Systems Theory Based Fuzzy Modeling and Control Compensation for Friction

WANG Yong-Fu<sup>1</sup> WANG Dian-Hui<sup>2</sup> CHAI Tian-You<sup>3</sup>

**Abstract** Modeling and control compensation of friction force has been a challenging task in mechanical engineering. The traditional way, such as mathematical modeling approach, was found quite difficult to achieve satisfactory performances due to some immanent nonlinearity and uncertainties of the system. This paper aimed to develop fuzzy modeling techniques to characterize the friction dynamics, which can then be employed in a feed-forward compensation controller design. The proposed fuzzy modeling approach is three fold: extraction of fuzzy rules using data mining techniques, setup of static model based on the fuzzy rules, and fuzzy identification of dynamic model according to Lyapunov theory. An adaptive version of the fuzzy feed-forward compensation proportional-derivative (PD) control law was employed in the control system. A theoretical result on estimates of error bounds for closed-loop systems was established by the well-known Lyapunov stability theory. An numerical example was analysed in details and simulation results demonstrated its the usefulness and effectiveness.

**Key words** Friction dynamics, fuzzy model, data mining, Lyapunov stability, feed-forward control compensation

摩擦是一种复杂的、非线性的、具有不确定性的自然现象. 摩擦的存在降低了系统的性能, 特别是对某些系统, 如机械手、数控机床、转台以及坐标测量机而言, 摩擦对这些系统性能的提高构成了严重的障碍. 在工程实际中为了克服摩擦给机械系统带来的危害, 人们从控制角度提出了一些补偿方法<sup>[1-10]</sup>. 总的来说, 分为以下两大类: 如果已知摩擦模型, 便可以在控制系统中施加一个控制作用, 使之抵消每一瞬时的摩擦力, 这样就可以消除摩擦对系统性能的影响, 这就是基于摩擦模型的补偿. 不依赖于模型

的补偿主要是基于高增益 PD 控制器补偿方法.

基于摩擦模型的补偿是人们对摩擦的物理过程给出一种近似的数学模型, 通过摩擦实验数据辨识其参数. 这种基于摩擦模型的补偿技术主要问题是: 1) 由于摩擦的内在机理还在探索与研究中, 人们提出的多种摩擦模型没有形成统一的描述形式, 在实际应用中很难确定哪种摩擦模型更合适; 2) 现有的摩擦模型只是对真实摩擦过程的一种近似描述, 故在控制补偿时很难保证控制精度; 3) 现有这些摩擦模型从形式上看比较复杂, 很难进行控制系统的稳定性分析. 另外, 不依赖于模型的高增益 PD 补偿的主要问题是只能在一定程度上减小摩擦的影响且鲁棒性与稳定性较差.

非线性系统的自适应模糊建模与控制的基本出发点是仿人的智能以实现复杂不确定性系统进行有效的建模与控制, 它具有从环境自学习、适应环境的能力. 从智能建模与控制角度出发, 研究摩擦的智能建模与控制补偿应是提高含摩擦环节的机电系统性能的一条值得探索的途径. 我们知道, 摩擦实验可以产生大量的摩擦实验数据, 而这些实验数据为用

收稿日期 2008-12-16 录用日期 2009-03-16  
Manuscript received December 16, 2008; accepted March 16, 2009

国家自然科学基金 (50875042, 50875039) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (50875042, 50875039)

1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110004 2. 澳大利亚拉筹伯大学计算机科学与计算机工程系 Melbourne VIC 3086 3. 东北大学自动化中心 沈阳 110004

1. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004 2. Department of Computer Science and Computer Engineering, La Trobe University, Melbourne VIC 3086, Australia 3. Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110004

智能建模 (神经网络或模糊系统) 提供了数据基础. 本文将采用如下思路研究摩擦的智能建模与控制补偿问题: 1) 基于数据挖掘技术对摩擦实验数据进行模糊规则的挖掘; 2) 基于此模糊规则库建立摩擦的基础模糊模型 (静态模型); 3) 结合具体的对象与控制问题, 从 Lyapunov 稳定性导出自适应参数, 建立摩擦的自适应模糊模型 (动态模型) 并设计相应的控制器; 4) 进行仿真实验对比分析.

### 1 常用摩擦模型及在补偿中的问题

对摩擦非线性环节建立准确的数学模型, 无论是对认识摩擦现象, 还是对其进行控制补偿都是十分重要的. 因此, 有关摩擦建模的研究一直非常活跃, 到目前为止, 已提出的摩擦模型有几十种, 主要分为静态摩擦模型和动态摩擦模型两大类. 其中静态摩擦模型主要包括经典摩擦模型 (静摩擦 + 库仑 + 粘性模型)、指数模型、Karnopp 模型等; 动态摩擦模型主要包括 LuGre 模型、七参数模型等. 下面简要介绍在控制补偿常用的几种模型及存在的问题:

#### 1) 基于静摩擦 + 库仑 + 粘性模型的补偿方法

摩擦力最早是由 DaVinci 于 1519 年发现的. Coulomb 在 1785 年提出了与速度成函数关系的摩擦力模型, 该模型在零速度时不连续. Morin 于 1833 年又引入了静摩擦力的概念. 1866 年, Reynolds 进一步引入粘滞摩擦的概念, 从而形成了至今仍广泛使用的“静摩擦 + 库仑摩擦 + 粘滞摩擦”的模型. 但该模型是摩擦的静态模型, 不能刻画摩擦的动态行为 (见图 1 (a), (b) 和 (c)).

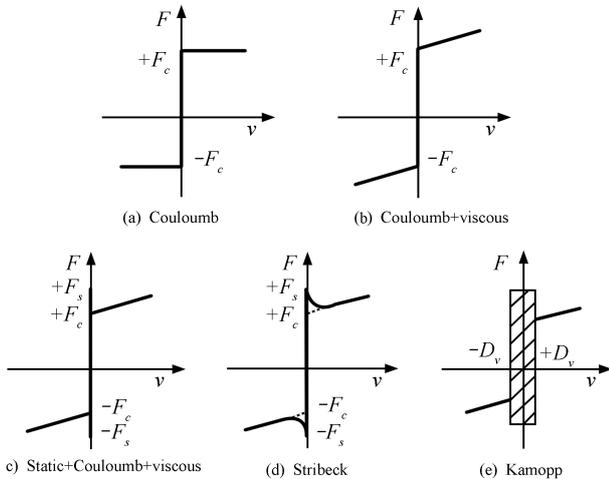


图 1 几种典型的摩擦力模型

Fig. 1 Several classical models of friction force

#### 2) 基于指数摩擦模型的补偿方法

指数模型 (见式 (1)) 是对经典模型 (静摩擦 + 库仑 + 粘性模型) 的一种发展. 该模型虽然是静态

摩擦模型, 但它在描述摩擦现象时, 考虑了 Stribeck 效应, 指数模型对摩擦现象的描述更为精确, 因此基于指数模型的摩擦补偿控制对于提高系统的超低速性能和抑制稳态极限环振荡有明显的效果. 但由于指数模型的参数空间是非线性的, 使得参数的在线辨识较为困难, 这也是基于指数模型的摩擦补偿难点所在 (见图 1(d)).

$$F = \begin{cases} F(v), & v \neq 0 \\ F_e, & v = 0 \text{ 且 } |F_e| < F_s \\ F_s \text{sgn}(F_e), & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

#### 3) 基于 Karnopp 摩擦模型的补偿方法

采用基于 Karnopp 模型 (见式 (2)) 的摩擦补偿方法的突出优点在于对速度信号的测量精度要求不高, 且能较好地改善系统在零速时的动态响应, 因此在实践中深受控制系统工程师们欢迎. 该模型只考虑了摩擦与稳恒速度的关系, 当速度发生变化时, 摩擦会表现出滞后于速度的动特性, 该模型就不足以刻画真实的摩擦力 (见图 1(e)).

$$F = \begin{cases} F(v), & |v| > dv \\ F_e, & |v| < dv \text{ 且 } |F_e| < F_s \\ F_s, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

#### 4) 基于 LuGre 摩擦模型的补偿方法

1995 年, Canudas 等提出了 LuGre 模型 (见式 (3)), 这是一个较为完善的动态摩擦模型, 它能较精确地描述摩擦的动态和静态特性, 目前, 基于 LuGre 模型的摩擦补偿控制已成为理论和应用研究的一个热点. 该方法的优点在于对摩擦环节的动态特性的补偿效果好, 其难点是参数辨识很困难.

$$\begin{cases} \dot{F} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \\ \dot{z} = v - \frac{|v|z}{g(v)} \\ \sigma_0 g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-|\frac{v}{v_s}|^2} \end{cases} \quad (3)$$

我们相信, 随着对摩擦机理的深入研究以及其他相关学科的发展, 将会有更精确的摩擦模型被提出. 从上面的摩擦机理模型的发展进程可以得出以下基本结论: 1) 缺少一个比较直观的、具有明显物理意义且能够精确描述摩擦静态、动态特性的摩擦模型; 2) 人们提出了多种摩擦模型, 但它们没有形成统一的描述形式, 在实际应用中很难确定哪种摩擦模型更合适; 3) 现有的摩擦模型要么过于简化, 易于实现控制补偿但很难保证控制精度, 要么过于复杂, 使得参数辨识很难、不易于实现控制补偿; 4) 现有这些摩擦模型从理论上很难把控制器设计与稳定性分析有机地结合起来.

## 2 数据挖掘法建立摩擦的静态模型

在工业过程建模领域中,对于那些非线性复杂系统,建立精确的数学模型非常困难.实际应用中,人们发现利用专家经验建立系统的模糊描述模型是一行之有效的方法,但模糊规则的获取是模糊建模的成功关键.模糊规则的获取一般有3种方法:1)专家语言产生规则;2)从样本数据中自动产生规则;3)样本数据结合专家语言产生混合规则.近年来,从样本数据中自动产生规则引起了人们的极大关注,其主要原因在于简单系统可以采用专家语言产生规则,但是当变量增多及变量的模糊集分割过多时,单纯依靠专家语言知识获取模糊规则是十分困难的.结果,梯度下降法、最小二乘法、遗传算法、模糊聚类和神经网络等方法相继被提出用于从样本数据中自动产生模糊规则<sup>[11-12]</sup>.不幸的是,这些方法要求不断地反复学习或是产生规则的机理过于复杂,使得工程难以实施.

文献[13]提出了从样本数据中获取模糊规则的查表法,此方法的优点是简单实用,已成为该领域的经典方法并被广泛引用,但查表法的主要缺点是产生的模糊规则库缺乏良好的完备性和鲁棒性.数据挖掘是一种基于数据库的自动信息提取技术,近年来已成为一个逐渐兴起的研究领域.采用数据挖掘方法产生的模糊规则库和查表法相比具有良好的完备性和鲁棒性,从而提高了模糊模型的精度<sup>[14]</sup>,本文首先采用数据挖掘方法挖掘摩擦的模糊规则库,基于此库建立摩擦的基础模糊模型.

### 2.1 摩擦实验数据的采集

正电子发射型计算机断层显像(Positron emission computed tomography, PET)技术采用特殊的体外测量仪器探测这些正电子核素在人体全身各脏器的分布情况<sup>[15]</sup>.其中做衰减扫描时棒源进给装置如图2所示.

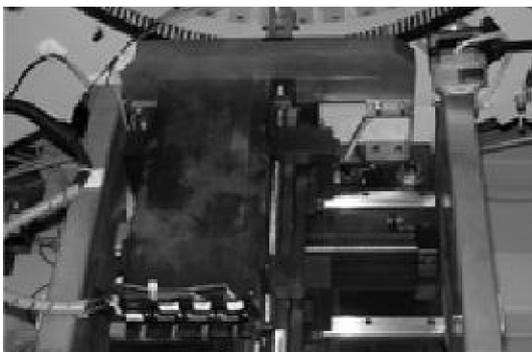


图2 棒源进给装置

Fig. 2 Feeding device for rod source

该装置在进给时存在摩擦力以及棒源的颤抖都

将影响图像的质量.我们将采集该装置的摩擦力数据进行建模与控制补偿研究.该部分的系统采集与控制的结 构简图如图3所示.

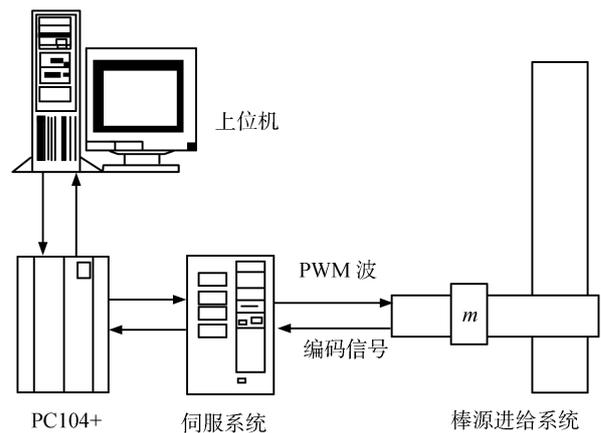


图3 系统采集与控制的结 构图

Fig. 3 Structure diagram of acquisition and control

在上面控制系统结构中:主机和PC104+通过远程过程调用的Socket接口进行通讯连接;PC104+向伺服系统传送控制指令;通过编码器反馈所需要的信号.在该实验中通过文献[1]使用的Breakaway方法采集摩擦实验数据,通过几次采集的结果如图4所示.

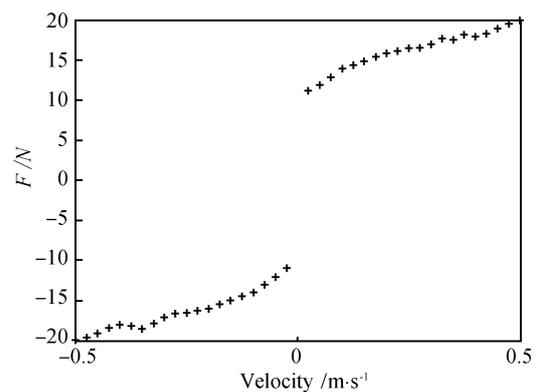


图4 检测的摩擦力数据

Fig. 4 Friction force data measured

### 2.2 摩擦模糊规则库的数据挖掘

下面给出用数据挖掘方法产生摩擦模糊规则库的主要步骤,这种方法的优点保证了无论是用小样本数据还是大样本数据产生的摩擦模糊规则库都是完备的.另外,这种方法保证了即使在样本数据中混入少量坏数据,产生的规则库仍能保证模糊模型的性能,即规则库具有良好的鲁棒性.

**步骤 1.** 摩擦的模糊变量及隶属度函数的选择.

由前面的摩擦模型可知摩擦力是速度的函数,即摩擦力随速度的变化而变化.故把速度作为模

糊规则库的前提变量, 而把摩擦力做为结论变量. 如  $\dot{x}$  的模糊量可取:  $\{NB, NS, ZR, PS, PB\}$ , 隶属度函数取高斯函数. 如  $F$  的模糊量可取:  $\{NB, NS, ZR, PS, PB\}$ , 隶属度函数取三角型函数.

**步骤 2.** 摩擦的关系数据库转换为模糊型关系数据库.

首先把  $\dot{x}$  和  $F$  的采集数据存放到普通型关系数据库表中. 然后把  $\dot{x}$  和  $F$  的数据转换成隶属度函数值存放到模糊型关系数据库表中.

在摩擦的普通型关系数据库中, 设  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_D\}$  表示一个普通型关系数据库,  $t_i$  表示  $T$  的第  $i$  个元组,  $A = \{\dot{x}, F\}$  表示摩擦属性集,  $t_j[\dot{x}]$  和  $t_j[F]$  分别表示属性  $\dot{x}$  和  $F$  在第  $j$  个元组上的值.

在摩擦的模糊型关系数据库中, 设  $X = \{\dot{x}\}$ ,  $Y = \{F\}$  是  $A$  的子集, 且  $X \cap Y = \emptyset$ . 其中,  $X$  和  $Y$  分别表示单入单出摩擦模糊系统的前提变量和结论变量所对应的属性集. 对前提属性  $\dot{x}$  在区间  $[\alpha_1, \beta_1]$  上定义  $N$  个模糊集  $A^j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), 且  $A^j$  在  $[\alpha_1, \beta_1]$  上是完备模糊集. 类似地, 对结论属性  $F$  在  $[\alpha_2, \beta_2]$  上定义  $N$  个模糊集  $B^j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), 它们在  $[\alpha_2, \beta_2]$  上也是完备模糊集. 通过上面的定义可以得到, 前提变量  $\dot{x}$  的模糊集合为  $A = \{A^1, \dots, A^N\}$ , 结论变量  $F$  的模糊集合为  $B = \{B^1, \dots, B^N\}$ . 设  $S_A = \{A^i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $S_B = \{B^j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 分别是  $A, B$  的子集. 一个普通型关系数据库  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_D\}$  转换为模糊型关系数据库  $FT_S = \{\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \dots, \mu_{t_D}\}$ ,  $S = S_A \cup S_B$  表示模糊属性集.

**步骤 3.** 计算摩擦模糊规则的支持度.

从数据挖掘的角度看, 如果一条模糊规则有实际意义, 它必须具有足够的支持度, 它反映了样本元组对该条规则的支持程度. 现定义支持度如下:

$$\text{Support}(\dot{x} \Rightarrow F) = \frac{\sum_{k=1}^D [\mu_{S_A}(\dot{x}) \times \mu_{S_B}(F)]}{D} \quad (4)$$

其中,  $\mu_{S_A}(\dot{x})$  为归一化后样本元组中的第  $k$  个元组中的前提变量  $\dot{x}$  在模糊集合  $S_A$  中的隶属度,  $\mu_{S_B}(F)$  为第  $k$  个元组中的结论变量  $F$  在模糊集  $S_B$  中的隶属度,  $D$  为元组的总个数.

由上面的支持度定义可以看出, 数据挖掘法所产生的某条模糊规则是所有空间样本数据  $(t_1, \dots, t_D)$  选举出的结果. 有理由相信数据挖掘方法所选举出的规则比单纯用空间样本部分数据(如查表法)所选举出的规则更可靠、更可信. 即使在样本数据中有个别坏数据, 也会被众多好数据进行有效的屏蔽, 由个别坏数据选举出坏规则的现象

将在一定程度上得到抑制.

**步骤 4.** 创建完备的摩擦模糊规则库.

首先, 算法要保证由前提变量构成的每个模糊子空间都能被遍历, 其次, 结论变量在模糊子空间选用哪个模糊集, 由规则的最大支持度决定. 算法的主要步骤如图 5 所示.

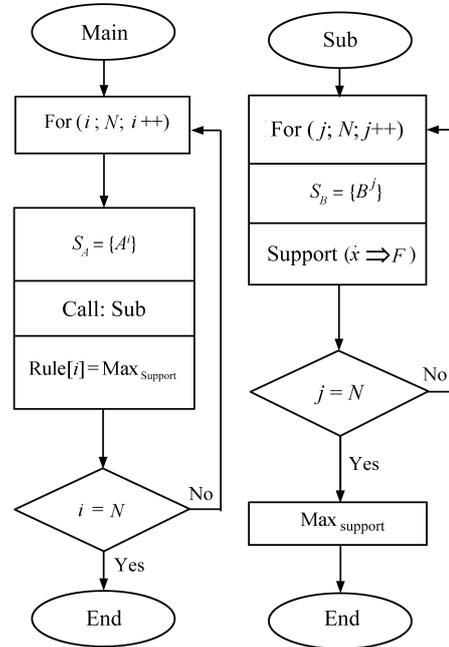


图 5 创建完备的摩擦模糊规则库流程

Fig. 5 Process of creating complete friction rules base

通过上面的遍历产生了完备的模糊规则库. 如图 6 所示, 对于前提变量  $\dot{x}$  的某个模糊集  $\{NB\}$  将遍历结论变量  $F$  的所有模糊集  $\{NB, NS, ZR, PS, PB\}$ . 但结论变量  $F$  最终选择哪个模糊集由最大支持度决定, 由这些规则构成了所有模糊规则的一个子空间, 该子空间是最后选择的模糊规则库(由图 6 星号构成的空间).

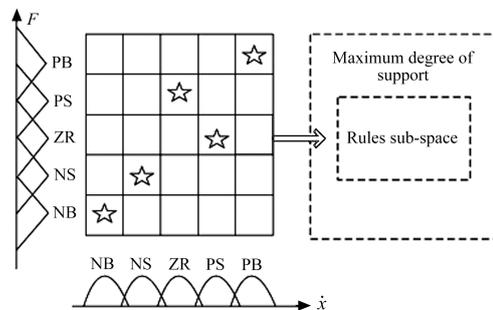


图 6 最大支持度决定的模糊规则子空间

Fig. 6 Fuzzy rules subspace based on maximum support

### 2.3 建立摩擦的静态模糊模型

由上面最大支持度决定的摩擦模糊规则子空间

构成如下模糊语句

$$R^{(j)}: \text{if } \dot{x} \text{ is } A^j \text{ then } F \text{ is } B^j \quad (j = 1, \dots, M) \quad (5)$$

其中,  $\dot{x} \in R$  作为模糊系统的输入, 把要辨识的摩擦力  $F \in R$  作为模糊系统的输出,  $A^j$  和  $B^j$  是模糊集,  $M$  表示规则的条数.

在建立了上面的摩擦模糊语句后, 采用文献 [16] 提出的单值模糊化、乘积运算、加权平均反模糊化可得到下面的摩擦静态模糊模型.

$$\hat{F}(\dot{x}) = \frac{\sum_{j=1}^M \bar{F}^j(\mu_{A^j}(\dot{x}))}{\sum_{j=1}^M (\mu_{A^j}(\dot{x}))} \quad (6)$$

其中,  $\bar{F}^j$  是模糊隶属度函数  $\mu_{B^j}(F^j)$  取得最大值的点, 也就是  $\mu_{B^j}(F^j) = 1$  时. 若定义下面的模糊基函数

$$\xi_j = \frac{\mu_{A^j}(\dot{x})}{\sum_{j=1}^M (\mu_{A^j}(\dot{x}))} \quad (7)$$

式 (6) 可以改写成如下的形式

$$\hat{F}(\dot{x}) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) \quad (8)$$

其中,  $\boldsymbol{\theta} = [\bar{F}^1, \bar{F}^2, \dots, \bar{F}^M]^T$  表示该模糊系统的参数向量,  $\boldsymbol{\xi}(\dot{x}) = [\xi_1(\dot{x}), \xi_2(\dot{x}), \dots, \xi_M(\dot{x})]^T$  表示模糊基函数向量.

如果单纯从摩擦建模角度来看, 模糊系统的参数向量  $\boldsymbol{\theta} = [\bar{F}^1, \bar{F}^2, \dots, \bar{F}^M]^T$  一般取模糊隶属度函数  $\mu_{B^j}(F^j) = 1$  最大值的点. 但此时的参数向量不是自适应的, 此时称为摩擦的静态模糊模型. 下面将结合 Lyapunov 稳定性进一步导出参数向量的自适应特性, 也就是摩擦的动态模糊模型, 从而用该自适应模糊模型在线逼近摩擦力.

### 3 Lyapunov 稳定性建立摩擦的动态模型及控制器设计

为了便于问题的描述, 考虑文献 [2] 所用的一维运动系统, 系统运动方程如下

$$m\ddot{x} = u - F \quad (9)$$

其中,  $m$  为运动体的质量;  $x$  为运动体的输出位移;  $F$  为摩擦力;  $u$  为控制力.

若式 (9) 中的摩擦力已知, 可采用基于摩擦模型补偿的 PD 经典控制器, 也就是如下方程

$$u = k_p e + k_d \dot{e} + F \quad (10)$$

其中,  $e = x_d - x$ ,  $\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x}$ .  $x_d$  是已知的系统期望输出位移,  $k_p$  和  $k_d$  分别表示比例和微分系数.

把式 (10) 代入式 (9) 可得如下动态误差方程

$$m\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = m\ddot{x}_d \quad (11)$$

上面的控制器在运动系统中得到了广泛应用, 它在定位调节控制中取得了十分满意的性能; 在跟踪控制中能保证跟踪误差的有界性.

式 (11) 的结果是在假设摩擦力  $F$  已知情况下得到的. 对摩擦项  $F$  来说, 由于建立精确摩擦模型的高难度, 得到精确算法 (10) 是不可能的. 为此, 拟用前文的模糊系统替代方程 (10) 中的摩擦项, 可得如下方程

$$u = k_p e + k_d \dot{e} + \hat{F} \quad (12)$$

其中,  $\hat{F}$  代表前文提到的模糊系统, 把式 (12) 代入式 (9) 可得如下动态误差方程

$$m\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = m\ddot{x}_d + F - \hat{F} \quad (13)$$

因  $x_d$  是有界的、已知的参考输入, 故可以把  $m\ddot{x}_d + F$  看成是摩擦的广义函数, 式 (13) 等价如下方程

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = m^{-1}[F_g - \hat{F}] \quad (14)$$

其中,  $k_2 = m^{-1}k_d$ ,  $k_1 = m^{-1}k_p$ ,  $F_g = m\ddot{x}_d + F$ . 下面用模糊系统对广义摩擦项进行逼近, 定义最优参数向量为

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta} [\sup \|\hat{F} - F_g\|] \quad (15)$$

其中,  $\Omega_\theta$  表示  $\boldsymbol{\theta}$  的界, 那么最小逼近误差可表示如下方程

$$\varepsilon = F_g - \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) \quad (16)$$

由式 (14) 和 (16) 知, 式 (14) 可写成

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = m^{-1}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) + \varepsilon] \quad (17)$$

其中,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}$ . 式 (17) 也等价如下形式

$$\dot{e} = A e + B \tilde{u} \quad (18)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e = [e, \dot{e}]^T, \quad \tilde{u} = m^{-1}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) + \varepsilon]$$

下面结合 Lyapunov 稳定性把第 2 部分基于数据挖掘形成的摩擦基础模糊模型 (静态模型) 转变成摩擦的自适应模糊模型 (动态模型). 设定正解  $P > 0$  满足如下 Lyapunov 方程

$$A^T P + P A = -Q \quad (19)$$

证明. 取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \frac{m^{-1}}{2\gamma} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \quad (20)$$

求沿式 (20) 的微分, 可推出

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{e} + \frac{m^{-1}}{\gamma} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}) \quad (21)$$

因为  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}$ , 结合式 (19) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} [\mathbf{e}^T (PA + A^T P) \mathbf{e}] + \\ & m^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) + \varepsilon) \mathbf{B}^T P - \frac{m^{-1}}{\gamma} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}) \end{aligned} \quad (22)$$

若使  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \mathbf{B}^T P \mathbf{e} \boldsymbol{\xi}(\dot{x})$  并结合式 (19), 上面方程对消一部分后可得到

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + m^{-1} \varepsilon \mathbf{B}^T P \mathbf{e} \quad (23)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \|\mathbf{e}\| [\lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{e}\| - 2m^{-1} \|\varepsilon_0\| \lambda_{\max}(P)] \quad (24)$$

其中,  $\varepsilon_0$  是  $\varepsilon$  的界, 从式 (24) 可以看出其是变号函数, 但只要方括号中的项大于零就可得  $\dot{V} < 0$ , 即满足下式

$$\|\mathbf{e}\| > \frac{2\|\varepsilon_0\| \lambda_{\max}(P)}{m \lambda_{\min}(Q)} \quad (25)$$

由标准 Lyapunov 理论可知, 只要误差项大于式 (25) 的右边项, 因  $\dot{V} < 0$  那么跟踪误差就会减小. 这也说明跟踪误差的有界性, 即

$$\|\mathbf{e}\| < \frac{2\|\varepsilon_0\| \lambda_{\max}(P)}{m \lambda_{\min}(Q)} \quad (26)$$

式 (26) 的有界性说明闭环系统的跟踪误差最终进入某一个紧集. 由式 (26) 还可以看出, 跟踪误差的界依赖于建模误差的界  $\varepsilon_0$ , 如果建模误差为零, 那么将取得零跟踪误差. 所以说模糊系统对摩擦的逼近精度对系统的精度提高是至关重要的, 故本文首先基于数据挖掘技术建立了摩擦的静态模型, 然后根据 Lyapunov 稳定性建立了摩擦的动态模型, 从而提高对摩擦的逼近精度.  $\square$

**定理 1.** 若采用式 (27) 和 (28) 摩擦动态模型, 其中自适应参数由式 (27) 在线调节且控制器采用式 (29), 从上面证明可知跟踪误差必收敛到某一紧集.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{cases} \gamma \mathbf{B}^T P \mathbf{e} \boldsymbol{\xi}(\dot{x}), & \text{若 } \|\boldsymbol{\theta}\| < M \text{ 或} \\ & (\|\boldsymbol{\theta}\| = M \text{ 且 } \gamma \mathbf{B}^T P \mathbf{e} \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) \geq 0) \\ P[\cdot], & \text{若 } \|\boldsymbol{\theta}\| = M \text{ 且} \\ & \gamma \mathbf{B}^T P \mathbf{e} \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) < 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\hat{F} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\dot{x}) \quad (28)$$

$$u = k_p e + k_d \dot{e} + \hat{F} \quad (29)$$

其中,  $P[\cdot]$  是投影算子, 正定解  $P > 0$  满足 Lyapunov 方程 (19).

### 4 仿真实验

把文中所采用的摩擦建模与控制补偿用于如下运动系统进行仿真实验.

$$m\ddot{x} = u - F \quad (30)$$

#### 1) 系统参数选择

$m = 4/3$ , 参考信号为:  $x_d = \sin(t)$ ,  $\dot{x}_d = \cos(t)$ . 选择  $Q = \begin{pmatrix} 6000 & 1200 \\ 1200 & 260 \end{pmatrix}$ , 解 Lyapunov 方程 (19) 可得  $P = \begin{pmatrix} 600 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$ .

#### 2) $\dot{x}$ 和 $F$ 的隶属度函数

$\dot{x}$  的模糊量取  $\{NB, NS, ZR, PS, PB\}$ , 隶属度函数取高斯函数. 5 组参数分别为:  $[0.1, -0.5]$ ,  $[0.1, -0.25]$ ,  $[0.1, 0.0]$ ,  $[0.1, 0.25]$ ,  $[0.1, 0.5]$ .  $F$  的模糊量取  $\{NB, NS, ZR, PS, PB\}$ , 隶属度函数取三角型函数. 5 组参数分别为:  $[-30, -20, -10]$ ,  $[-20, -10, 0]$ ,  $[-10, 0, 10]$ ,  $[0, 10, 20]$ ,  $[10, 20, 30]$ .

#### 3) 摩擦数据的关系表建立

首先, 建立  $\dot{x}$  和  $F$  的 10 个样本数据采集点  $t_1 \sim t_{10}$  的普通型关系表 (见表 1). 然后, 将  $\dot{x}$  和  $F$  的 10 个样本数据采集点的普通型关系表转换成模糊型关系表 (见表 2).

表 1 样本数据  
Table 1 Sample data

序号	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$
$\dot{x}$	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	+0.1	+0.2	+0.3	+0.4	+0.5
$F$	-20	-18	-17	-16	-14	+14	+16	+17	+18	+20

注: 上表为节省篇幅, 实际应行列互换或转置.

#### 4) 计算全部支持度

基于最大支持度建立模糊规则库的定义, 由表 3 的计算结果可得如下模糊规则库:

- If  $\dot{x}$  is NB then  $F$  is NB
- If  $\dot{x}$  is NS then  $F$  is NB
- If  $\dot{x}$  is ZR then  $F$  is NS or PS
- If  $\dot{x}$  is PS then  $F$  is PB
- If  $\dot{x}$  is PB then  $F$  is PB

表 2 模糊化的样本数据  
Table 2 Fuzzified sample data

序号	$\dot{x}_{NB}$	$\dot{x}_{NS}$	$\dot{x}_{ZR}$	$\dot{x}_{PS}$	$\dot{x}_{PB}$	$F_{NB}$	$F_{NS}$	$F_{ZR}$	$F_{PS}$	$F_{PB}$
$\mu_{t_1}$	1.00	0.04	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.30
$\mu_{t_2}$	0.61	0.32	0.00	0.00	0.00	0.80	0.20	0.00	0.00	0.00
$\mu_{t_3}$	0.14	0.88	0.01	0.00	0.00	0.70	0.30	0.00	0.00	0.00
$\mu_{t_4}$	0.01	0.88	0.14	0.00	0.00	0.60	0.40	0.00	0.00	0.00
$\mu_{t_5}$	0.00	0.32	0.61	0.00	0.00	0.40	0.60	0.00	0.00	0.00
$\mu_{t_6}$	0.00	0.00	0.61	0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.60	0.40
$\mu_{t_7}$	0.00	0.00	0.14	0.88	0.01	0.00	0.00	0.00	0.40	0.60
$\mu_{t_8}$	0.00	0.00	0.01	0.88	0.14	0.00	0.00	0.00	0.30	0.70
$\mu_{t_9}$	0.00	0.00	0.00	0.32	0.61	0.00	0.00	0.00	0.20	0.80
$\mu_{t_{10}}$	0.00	0.00	0.00	0.04	1.00	0.30	0.00	0.00	0.00	1.00

表 3 计算出的支持度  
Table 3 Calculated degrees of support

Support	$F_{NB}$	$F_{NS}$	$F_{ZR}$	$F_{PS}$	$F_{PB}$
$\dot{x}_{NB}$	0.16	0.02	0.00	0.00	0.03
$\dot{x}_{NS}$	0.16	0.09	0.00	0.00	0.00
$\dot{x}_{ZR}$	0.03	0.04	0.00	0.04	0.03
$\dot{x}_{PS}$	0.00	0.00	0.00	0.09	0.16
$\dot{x}_{PB}$	0.03	0.00	0.00	0.02	0.16

5) 由模糊规则库建立静态模糊模型

图 7 左边和右边曲线分别表示第 3 条规则的结论变量分别取  $NS$  或  $PS$  时的模糊模型. 第 3 条规则的结论变量若取  $NS$  和  $PS$  的平均将形成图 7 中间曲线. 由摩擦的对称性可知, 图 7 中间曲线是比较理想的模型. 在后面将用图 7 中间曲线做为摩擦的静态模糊模型, 然后自适应在线调节参数, 这时的参数初值为  $\theta = [-20, -20, 0, 20, 20]^T$ .

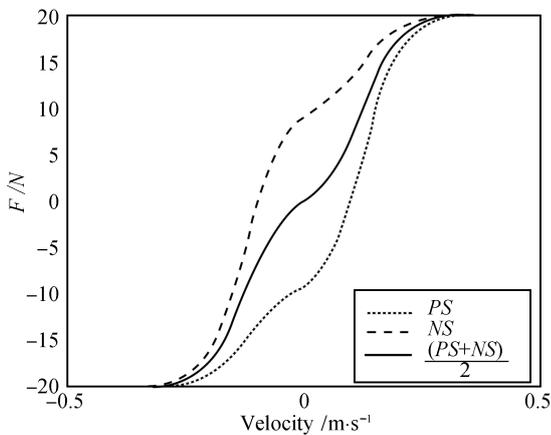


图 7 基于规则库建立的摩擦静态模糊模型  
Fig. 7 Static fuzzy models based on fuzzy rules base

6) 摩擦的动态模糊模型及控制器

由式 (27) ~ (29) 可得摩擦的动态模糊模型及控制器. 其中,  $\gamma = 10$ , 其他参数如前文所示.

7) 跟踪实验结果与分析

在进行跟踪控制仿真实验中, 假设式 (30) 中摩擦力模型为最大静摩擦力, 也就是当  $\dot{x} \neq 0$  时,  $F = F_m = |20|$ ; 当  $\dot{x} = 0$  时,  $F = 0$ . 通过 Matlab 的 ode45 模块可得到以下几种情况:

情况 1. 假设系统中无摩擦力存在, 设计控制器  $u = k_p e + k_d \dot{e}$ . 其中,  $k_p = 200$ ,  $k_d = 20$ , 仿真结果如图 8 所示, 可以看出稳态误差  $e_{ss} = \pm 0.01$  内.

情况 2. 假设系统模型中存在摩擦, 设计控制器  $u = k_p e + k_d \dot{e}$ . 其中,  $k_p = 200$ ,  $k_d = 20$ , 仿真结果如图 9 所示, 可以看出稳态误差在  $e_{ss} = 0.1$  内波动.

结论 1. 前两种仿真对比说明, 在控制器设计时应考虑系统摩擦的影响, 否则控制精度变低.

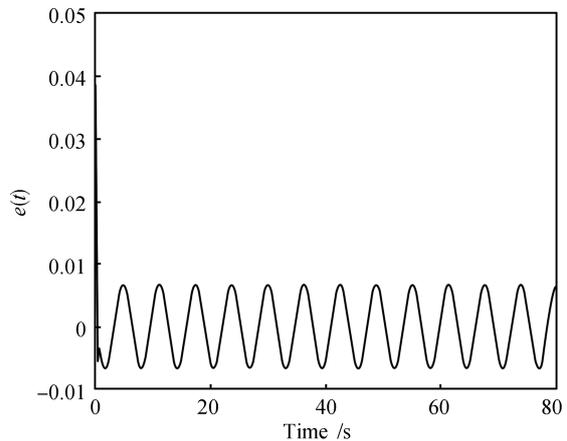


图 8 情况 1 误差的跟踪曲线  
Fig. 8 Trajectory curve of error in Case 1

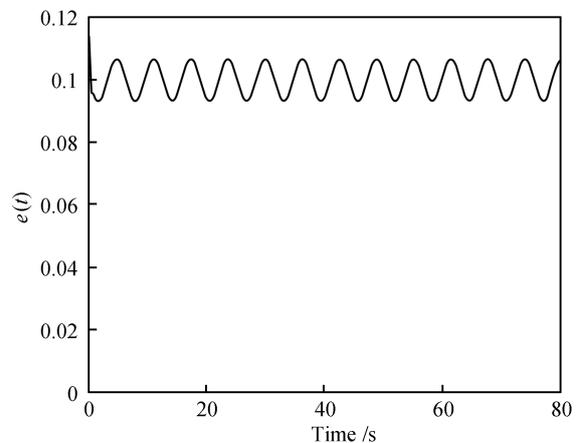


图 9 情况 2 误差的跟踪曲线  
Fig. 9 Trajectory curve of error in Case 2

情况 3. 假设系统模型中存在摩擦, 控制器设

计采用了摩擦的动态模糊模型, 也就是  $u = k_p e + k_d \dot{e} + \hat{F}$ . 其中,  $k_p = 200$ ,  $k_d = 20$ , 仿真结果如图 10 所示, 可以看出稳态误差  $e_{ss} = \pm 0.01$  内.

**情况 4.** 假设系统模型中存在摩擦, 控制器取高增益  $u = k_p e + k_d \dot{e}$ . 其中,  $k_p = 2000$ ,  $k_d = 200$ , 仿真结果如图 11 所示, 可以看出稳态误差从  $e_{ss} = 0.1$  改变到  $e_{ss} = 0.01$  内波动.

**结论 2.** 基于动态模糊模型补偿的控制器有良好的性能, 只是在短暂的动态过程不如高增益 PD.

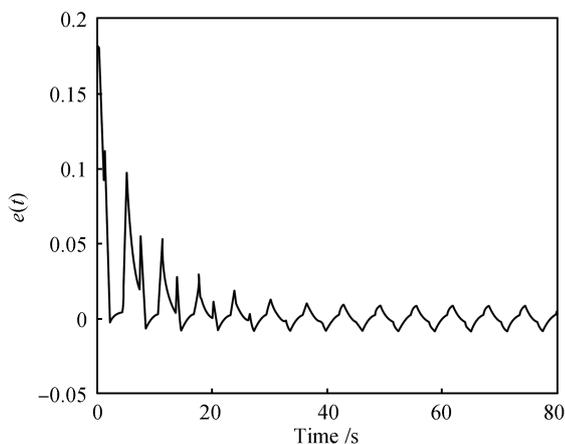


图 10 情况 3 误差的跟踪曲线

Fig. 10 Trajectory curve of error in Case 3

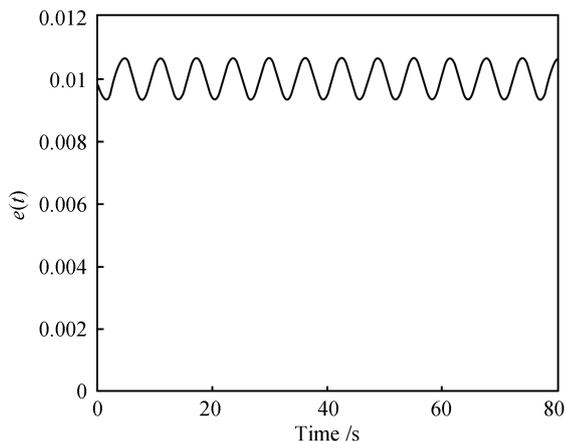


图 11 情况 4 误差的跟踪曲线

Fig. 11 Trajectory curve of error in Case 4

## 5 结论

本文对机械系统的不确定摩擦力采用了模糊系统进行在线逼近, 并形成了基于模糊系统前馈补偿摩擦的 PD 控制器. 其中该模糊系统的辨识分为两个步骤: 首先采用数据挖掘技术辨识出模糊系统的静态模型, 然后基于 Lyapunov 稳定性进一步辨识

出模糊系统的动态模型. 理论分析和仿真实验说明采用该控制系统不但可以获得较好的跟踪性能, 而且具有良好的稳定性.

## References

- 1 Armstrong-Helouvry B, Dupot P, de Wit C C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 1994, **30**(7): 1083–1138
- 2 de Wit C C, Olsson H, Astrom K J, Lischinsky P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(3): 419–425
- 3 Cong Shuang. Two advanced control strategies for dynamic friction compensation. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(2): 236–240  
(丛爽. 两种补偿动态摩擦力的先进控制策略. 自动化学报, 1998, **24**(2): 236–240)
- 4 Chen Y Y, Huang P Y, Yen J Y. Frequency domain identification algorithms for servo systems with friction. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(5): 654–665
- 5 Iwasaki M, Takei M, Matsui N. GMDH based modeling and feed-forward compensation for nonlinear friction in table drive systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2003, **50**(6): 1172–1178
- 6 Kim S J, Kim S Y, Ha I J. An efficient identification method for friction in single-DOF motion control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, **12**(4): 555–563
- 7 Dupont P, Hayward V, Armstrong B, Altpeter F. Single state elasto-plastic friction models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **47**(5): 787–792
- 8 Wang Y F, Chai T Y. Compensating modeling and control for friction using adaptive fuzzy system. In: Proceedings of the 43rd Conference on Decision and Control. Atlantis, Bahamas: IEEE, 2004. 5117–5121
- 9 Guo Y, Qu Z H. Control of frictional dynamics of a one-dimensional particle array. *Automatica*, 2008, **44**(10): 2560–2569
- 10 Garcia C. Comparison of friction models applied to a control valve. *Control Engineering Practice*, 2008, **16**(10): 1231–1243
- 11 Xiong Xiong, Wang De-Xin, Song Yi-Min. Effective data mining based fuzzy neural networks. *Journal of Systems Engineering*, 2000, **15**(1): 32–37  
(熊熊, 汪德馨, 宋轶民. 利用模糊神经网络进行数据挖掘的一种算法. 系统工程学报, 2000, **15**(1): 32–37)
- 12 Serge G. Designing fuzzy inference systems from data: an interpretability oriented review. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2001, **9**(3): 426–443
- 13 Wang L X, Mendel J M. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1992, **22**(6): 1414–1427

- 14 Wang Yong-Fu, Chai Tian-You. Mining fuzzy rules from data and its system implementation. *Journal of Systems Engineering*, 2005, **20**(5): 497–503  
(王永富, 柴天佑. 从数据中挖掘模糊规则及其系统实现. 系统工程学报, 2005, **20**(5): 497–503)
- 15 Wang Yong-Fu, Li Jia-Di, Zhao Hong, Liu Ji-Ren. Control software design and implement of PET based on real time Linux. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2008, **29**(4): 497–500  
(王永富, 李甲迪, 赵宏, 刘积仁. 基于实时 Linux 的 PET 控制软件设计与实现. 东北大学学报 (自然科学版), 2008, **29**(4): 497–500)
- 16 Wang L X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1994



**王永富** 东北大学机械工程与自动化学院副教授. 1998 年获得东北大学机械电子专业硕士学位, 2005 年获得东北大学控制理论与控制工程专业获博士学位. 主要研究方向为机电系统的模糊建模与控制、数据挖掘以及信号处理. 本文通信作者. E-mail: yfwang@mail.neu.edu.cn

(**WANG Yong-Fu** Associate professor at the School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University. He received his master degree in mechanical engineering and Ph. D. degree in control theory and control engineering from Northeastern University in 1998 and 2005, respectively. His research interest covers fuzzy modeling and intelligent control of mechanical engineering, data mining and signal processing. Corresponding author of this paper.)



**王殿辉** 澳大利亚拉筹伯大学副教授. 2001 年 7 月至今在澳大利亚拉筹伯大学计算机科学与工程系任教. 1995 年获得东北大学博士学位. 主要研究方向为数据挖掘技术在生物信息学领域, 多媒体信息处理及智能控制系统中的应用. E-mail: dh.wang@latrobe.edu.au

(**WANG Dian-Hui** Associate professor in the Department of Computer Science and Computer Engineering, La Trobe University, Australia. He received his Ph. D. degree from Northeastern University in 1995. His research interest covers data mining technique and its applications in bioinformatics, multimedia information processing and intelligent control systems.)



**柴天佑** 中国工程院院士, 东北大学教授, IEEE Fellow, IFAC Fellow, 欧亚科学院院士. 1985 年获得东北大学博士学位. 主要研究方向为自适应控制, 智能解耦控制, 流程工业综合自动化. E-mail: tychai@mail.neu.edu.cn

(**CHAI Tian-You** Academician of Chinese Academy of Engineering, professor at Northeastern University, IEEE Fellow, IFAC Fellow, and academician of the International Eurasian Academy of Sciences. He received his Ph. D. degree from Northeastern University in 1985. His research interest covers adaptive control, intelligent decoupling control, and integrated automation of industrial process.)