

基于混合基稀疏图像表示的压缩传感图像重构

练秋生¹ 陈书贞¹

摘要 单一基函数不能对同时包含边缘和纹理信息的自然图像进行最优压缩传感图像重构. 本文根据 Meyer 的卡通-纹理图像模型和生物视觉原理, 用拉普拉斯塔式分解和圆对称轮廓波分别表示图像的光滑成分和边缘成分, 并构造了窄带轮廓波变换实现纹理成分的稀疏表示. 三种稀疏变换的基函数分别与视觉皮层中的侧膝体、简单细胞及栅格细胞的感受野类似. 结合三种图像稀疏表示方法和凸集交替投影算法提出了基于混合基稀疏表示的压缩传感图像重构算法. 实验结果表明, 与基于块匹配三维变换迭代收缩的图像重构算法比较, 本文算法能获得更高的图像重构质量.

关键词 压缩传感, 稀疏图像表示, 混合基, 图像重构

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00385

Image Reconstruction for Compressed Sensing Based on the Combined Sparse Image Representation

LIAN Qiu-Sheng¹ CHEN Shu-Zhen¹

Abstract For a natural image which includes both edge and texture information, the single basis function cannot reconstruct the image for compressed sensing optimally. In this paper, according to the Meyer's cartoon-texture model and biological vision function, the smooth and edge components are represented by Laplacian pyramid and circular symmetric contourlet, respectively, and the narrow-band contourlet is constructed to represent texture component sparsely. The basis functions of the three sparse transforms are similar to the receptive fields of the lateral geniculate nucleus, simple cells and grating cells in primary visual cortex. On the basis of the three sparse image representations and convex alternative projection algorithm, the image reconstruction for compressed sensing based on the combined sparse representation is proposed. Compared to the image reconstruction algorithm of block matching 3D transform shrinkage, the proposed algorithm can achieve higher image reconstruction performance.

Key words Compressed sensing, sparse image representation, combined bases, image reconstruction

压缩传感(压缩抽样)理论是近几年来信息处理领域的重大突破^[1-3], 它彻底改变了人们对信息获取的传统观念. 压缩传感理论的核心思想是将信号表示的稀疏性先验知识结合到信号重构过程中, 从远小于奈奎斯特抽样率的抽样点中重构原始信号, 从而有效降低传感器和抽样系统的复杂性. 在传统的数据采集系统中, 奈奎斯特-香农抽样定理是必须遵循的基本原则, 即信号抽样频率必须大于等于信号带宽的两倍(奈奎斯特抽样率)才能够无失真地重构原始信号. 在宽带大容量数据采集系统(如高分辨率图像和视频采集系统)中, 为节省存储容量和传输带宽, 经常是先以高于或等于奈奎斯特抽样率的采样速率获取原始数据, 然后再对图像进行某种稀疏变换(如 DCT 和小波变换), 舍弃小的变换系数保留大的显著变换系数, 最后再对这些显著变换系数进行编码后存储或送到信道传输. 由于图像的

DCT 和小波表示是稀疏的, 编码之后的数据量远小于图像像素数. 既然大部分变换系数是非显著的, 在编码之前要被舍弃, 那么为减少设备的复杂性和降低系统的成本, 我们能否在抽样时就考虑减少采集的数据量? 这个问题是导致压缩传感理论提出的直接原动力. 压缩传感理论起源于 2004 年加州理工学院 Candes 等发表的一篇研究报告, 该报告后来正式发表在 2006 年第 2 期的 *IEEE Transactions on Information Theory*^[2]. 他们发现对于某类可用规范基(Dirac 基)表示的信号, 只要它们的支撑区足够小, 则以稀疏性最大作为约束条件即可从极少数的傅里叶变换系数中重构原始信号. 随后斯坦福大学的 Donoho 对 Candes 等的结果进行了推广, 正式提出了压缩传感理论(Compressed sensing)^[1]. 由于在对图像抽样时事先无法知道哪些系数是显著的, 因此不能直接抽取显著系数. 折中的方法是获取图像 f 的随机投影值(Random projection), 随机投影 Φf 中包含了图像 f 的几何结构信息, $\Phi f = \{\langle f, \Phi_i \rangle\}_{i=1}^N$, Φ_i 为随机基向量, 它与图像表示的基函数不相干. 如果 Φ_i 为 Dirac 函数, 则 Φf 简化为普通的奈奎斯特抽样, 因此在压缩传感文献中一个

收稿日期 2009-03-18 录用日期 2009-08-26
Manuscript received March 16, 2009; accepted August 26, 2009
国家自然科学基金(60772079)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60772079)

1. 燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004
1. Institute of Information Science and Technology, Yanshan University, Qinhuangdao 066004

随机投影也称为一个抽样点. 文献 [1] 的理论结果表明, 对于像素数为 M 的 K 稀疏图像 (K -sparse, 即图像在某种基或紧标架下具有稀疏表示, 则可以用 K 个幅值最大的显著系数来逼近原始图像), 利用 $O(K \log(M))$ 个抽样点和 l_1 范数极小化准则即可重构原始图像, 重构误差和 K 个显著系数的逼近误差相当. 需要指出的是压缩传感理论并不是否认传统的奈奎斯特-香农抽样定理, 前者是将信号的稀疏性作为信号重构的先验知识, 而后者是将信号带宽作为先验知识, 两者得出的结论自然也不一样.

在压缩传感系统中, 图像的稀疏表示是影响图像重构质量的关键因素. 目前在压缩传感图像重构中只利用单一的基函数表示图像^[1, 4-7]. 但是大多数自然图像同时包含光滑、边缘和纹理三种成分, 只是这三种成分所占的比重不同. 单一的基函数无法同时对三种成分提供最优表示^[8]. 本文从 Meyer 图像模型和生物视觉原理出发^[9], 用拉普拉斯塔式分解和圆对称轮廓波分别表示图像的光滑成分和边缘成分, 并构造了窄带轮廓波变换实现纹理成分的稀疏表示. 根据这种混合基图像稀疏表示方法提出了相应的压缩传感图像重构算法. 实验结果表明本文算法能获得更高的图像重构质量.

1 混合基稀疏图像表示

根据 Meyer 图像模型^[9], 自然图像可以分解为卡通成分和纹理成分, 而卡通成分又包括平滑成分和边缘结构, 即

$$I = I_{\text{cartoon}} + I_{\text{texture}} = I_{\text{smooth}} + I_{\text{edge}} + I_{\text{texture}} \quad (1)$$

Meyer 模型与生物视觉原理相符. 在哺乳动物的视觉系统中, 外界的光信息刺激视网膜, 经过侧膝体后送到大脑视觉皮层的 V1 区进行信息加工. 侧膝体细胞没有方向选择性, 它只对亮点和暗点有响应, 其感受野可用 DoG 函数 (即二维高斯函数的微分) 描述, 它实现图像光滑成分的稀疏表示. V1 区包括简单细胞、复杂细胞和栅格细胞. 单个简单细胞对特定方向特定频率的条状刺激有最优响应, 其感受野可用 Gabor 函数逼近. 简单细胞对图像的边缘成分实现稀疏表示. 复杂细胞接收两个感受野相位差为 90 度的简单细胞的输出, 进行非线性处理后送到 V2 区. 虽然简单细胞和复杂细胞在视觉皮层的 V1 区中的数量占多数, 但也有少量的栅格细胞 (Grating cells)^[10]. 和简单细胞类似, 栅格细胞也具有方向选择性, 但栅格细胞的感受野比简单细胞大, 它只对特定方向具有局部周期性的结构有最大响应, 但对同方向的单个条纹没有响应, 甚至有抑制作用. 栅格细胞对图像的纹理成分提供稀疏表示.

单一的基函数不可能同时对图像的三种不同成

分实现最优稀疏表示, 本文用三种不同的基函数分别表示图像三种不同成分:

$$I = \Psi_1 \alpha_1 + \Psi_2 \alpha_2 + \Psi_3 \alpha_3 \quad (2)$$

式中, $I_{\text{smooth}} = \Psi_1 \alpha_1$, $I_{\text{edge}} = \Psi_2 \alpha_2$, $I_{\text{texture}} = \Psi_3 \alpha_3$. 矩阵 Ψ_i 的每一列对应稀疏变换的一个基向量, α_i 表示对应的变换系数组成的向量. 在实际计算中, $\Psi_i \alpha_i$ 可通过相应的稀疏逆变换实现. 根据生物视觉原理, Ψ_1 和 Ψ_2 可用 DoG 和 Gabor 基描述^[11], 但由于这两种变换没有有效的数值重构算法, 只适用于不需要进行图像重构的场合, 不能直接用于压缩传感图像重构. 本文用拉普拉斯塔式分解^[12]和圆对称轮廓波^[13]分别表示图像的光滑成分和边缘成分. 从图 1(a) 可以看出拉普拉斯塔式分解的基函数与 DoG 函数类似, 可以描述侧膝体细胞的感受野. 从图 1(b) 可以看出圆对称轮廓波基函数与 Gabor 函数非常接近, 具有简单细胞感受野的多尺度和多方向特性. 圆对称轮廓波消除了轮廓波存在的频谱混淆现象, 其方向选择性和稀疏性比轮廓波更强, 能实现图像边缘成分的稀疏表示. 拉普拉斯塔式分解和圆对称轮廓波变换均存在对称的逆变换, 它们适用于压缩传感等需要图像重构的场合.

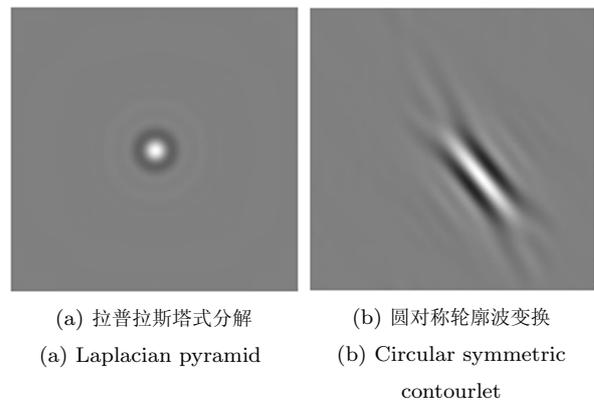


图 1 两种变换的基函数

Fig. 1 Basis functions of the two transforms

目前, 具有可逆变换的纹理图像稀疏表示方法主要有二维离散余弦变换 (2D Discrete cosine transform, 2D DCT) 和波原子 (Wave atoms). DCT 变换的缺陷是重构图像时容易产生块效应; 而波原子基函数有明显的拖尾现象, 空域局部性差, 用它进行压缩传感图像重构容易产生伪迹 (Artifact). 本文在圆对称轮廓波的基础上, 构造出窄带轮廓波变换实现纹理图像的稀疏表示. 轮廓波虽然能够实现边缘轮廓的最优表示, 但由于它的径向带宽大, 导致其振荡性不强, 缺乏周期特性, 不能实现纹理图像最优表示. 为了获得纹理稀疏表示, 本文将每个圆对称轮廓波变换的径向尺度分解为 4 个尺度,

从而减小每个尺度的径向带宽, 如图 2 (b) 所示. 为便于后文描述, 本文将这种变换称为窄带轮廓波变换. 图 2 (b) 是窄带轮廓波变换的频带分割示意图. 图 3 是实现窄带轮廓波变换的原理图, 逆变换与图 3 对称.

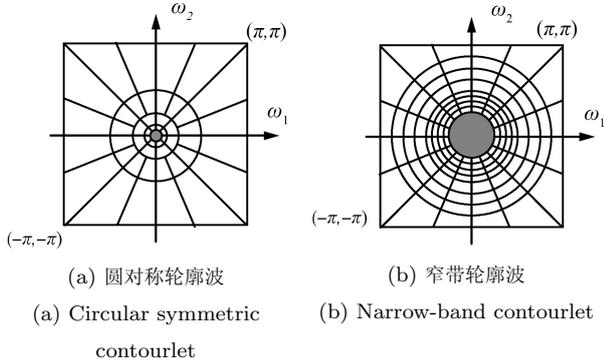


图 2 圆对称轮廓波和窄带轮廓波变换的频带分割

Fig. 2 The frequency partitions of the circular symmetric contourlet and narrow-band contourlet

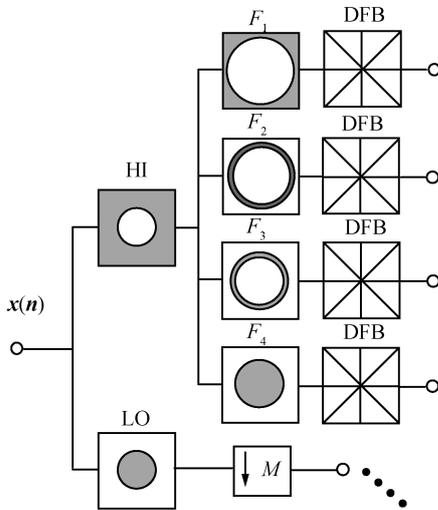


图 3 窄带轮廓波变换的原理图

Fig. 3 The schematic diagram of the narrow-band contourlet

在图 3 中, DFB (Directional filter bank) 表示方向滤波器组, HI, LO 分别表示高通和低通滤波器, 其构造方法与文献 [13] 相同. $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, $F_3(\omega)$ 和 $F_4(\omega)$ 为窄带圆周对称滤波器组中的四个带通滤波器, 它们在频域满足:

$$F_1(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) \quad (3)$$

$$F_2(\omega) = H_1(\omega)L_2(\omega) \quad (4)$$

$$F_3(\omega) = L_1(\omega)H_3(\omega) \quad (5)$$

$$F_4(\omega) = L_1(\omega)L_3(\omega) \quad (6)$$

以上四式中的 $H_i(\omega)$ 和 $L_i(\omega)$ ($i = 1, 2, 3$) 分别为不同截止频率的互补圆周对称高通和低通滤波器, 它们满足:

$$L_i^2(\omega) + H_i^2(\omega) = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

本文用二维升余弦函数设计圆周对称滤波器组:

$$L_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \|\omega\| < \lambda\theta_i \\ \cos(\frac{\pi}{2} \log_2(\alpha_i \|\omega\| + \beta_i)), & \lambda\theta_i \leq \|\omega\| \leq \theta_i \\ 0, & \|\omega\| > \theta_i \end{cases}$$

$$H_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \|\omega\| < \lambda\theta_i \\ \sin(\frac{\pi}{2} \log_2(\alpha_i \|\omega\| + \beta_i)), & \lambda\theta_i \leq \|\omega\| \leq \theta_i \\ 1, & \|\omega\| > \theta_i \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\|\omega\| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $\lambda = 0.75$, 它决定滤波器过渡带的陡峭程度. θ_i ($i = 1, 2, 3$) 为三个滤波器组的截止频率. 在本文中 $\theta_1 = 0.75\pi$, $\theta_2 = 0.875\pi$, $\theta_3 = 0.625\pi$. 根据滤波器的频率响应在过渡点连续约束条件, 得:

$$\alpha_i = \frac{1}{(1 - \lambda)\theta_i}, \quad \beta_i = \frac{1 - 2\lambda}{1 - \lambda} \quad (9)$$

将式 (8) 代入式 (3) ~ (6), 得到 $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, $F_3(\omega)$ 和 $F_4(\omega)$, 容易验证它们满足:

$$F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega) + F_3^2(\omega) + F_4^2(\omega) = 1 \quad (10)$$

即 $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, $F_3(\omega)$ 和 $F_4(\omega)$ 满足完全重构条件. 而图 3 中 HI, LO 和 DFB 也满足完全重构条件^[13], 因此窄带轮廓波变换是可逆的.

图 4 列出了窄带轮廓波变换中尺度为 3, 方向分别是 $\pi/8$ 和 $3\pi/8$ 的两个基函数. 从图 4 可以看出, 窄带轮廓波除了具有轮廓波所具有的多方向性外, 还具备局部周期性, 适合捕捉结构纹理信息. 窄带轮廓波可以看作是一种纹理基元, 它与视觉皮层中栅格细胞的作用类似.

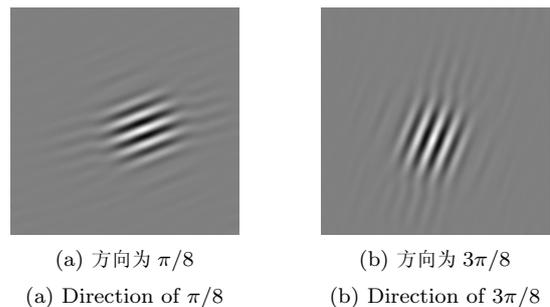


图 4 窄带轮廓波变换的基函数

Fig. 4 Basis functions of the narrow-band contourlet

2 基于混合基稀疏表示的压缩传感

在文献[1, 4-7]中是通过求解下列优化问题来从随机投影(抽样点)中重构图像:

$$\begin{aligned} \min \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \\ \text{s.t. } \boldsymbol{y} = \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}$ 为稀疏变换系数组成的向量, \boldsymbol{y} 为随机投影值组成的观测向量, Φ 为随机投影矩阵, Ψ 的每一列对应稀疏变换的一个基向量, Φ 与 Ψ 不相干. 在实际计算中, $\Psi\boldsymbol{\alpha}$ 可通过稀疏逆变换实现, 而随机投影 Φ 可通过 PDCT (Permuted discrete cosine transform) 算法或 Noiselet 变换实现^[14] (PDCT 的图像重构性能略优于 Noiselet, 本文用 PDCT 实现随机投影). 求出最优解 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 后, 对 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 进行稀疏逆变换: $\hat{\boldsymbol{I}} = \Psi\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 获得重构图像. 式 (11) 的物理意义非常明显: 即在符合观察值的前提下 ($\boldsymbol{y} = \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha}$), 最稀疏解就是最优解. 这里是用 l_1 范数度量系数的稀疏性. 当观测向量存在噪声时, 式 (11) 变为

$$\begin{aligned} \min \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \\ \text{s.t. } \|\boldsymbol{y} - \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (12)$$

如直接将 \boldsymbol{I} 作为优化目标, 即 $\boldsymbol{I} = \Psi\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} = \Psi^T\boldsymbol{I}$, 则上式可写为

$$\begin{aligned} \min \|\Psi^T\boldsymbol{I}\|_1 \\ \text{s.t. } \|\boldsymbol{y} - \Phi\boldsymbol{I}\|_2^2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $\|\cdot\|_2$ 表示 l_2 范数. 由拉普拉斯乘法可以将上面的优化问题转化为

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \arg \min \left\{ \|\Psi^T\boldsymbol{I}\|_1 + \lambda \|\boldsymbol{y} - \Phi\boldsymbol{I}\|_2^2 \right\} \quad (14)$$

当用混合基进行图像稀疏表示时, 图像的平滑成分、边缘成分和纹理成分分别用 Ψ_1 、 Ψ_2 和 Ψ_3 进行变换后, 各自的变换系数应该是稀疏的. 在这种情况下, 式 (13) 变为

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^3 \|\Psi_k^T\boldsymbol{I}_k\|_1 \\ \text{s.t. } \left\| \boldsymbol{y} - \Phi \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{I}_k \right\|_2^2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

式中, \boldsymbol{I}_1 , \boldsymbol{I}_2 和 \boldsymbol{I}_3 分别表示 $\boldsymbol{I}_{\text{smooth}}$, $\boldsymbol{I}_{\text{edge}}$ 和 $\boldsymbol{I}_{\text{texture}}$. 由拉普拉斯乘法可将其转化为无约束的优化问题

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{I}}_1, \hat{\boldsymbol{I}}_2, \hat{\boldsymbol{I}}_3) = \\ \arg \min \left\{ \sum_{k=1}^3 \|\Psi_k^T\boldsymbol{I}_k\|_1 + \lambda \left\| \boldsymbol{y} - \Phi \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{I}_k \right\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

在压缩传感系统中, 除利用变换系数的稀疏性先验知识外, 通常还将全变差 (对应图像边缘的稀疏性) 作为惩罚项加入到优化方程以提高重构质量^[5-6]. 由于图像的平滑成分和边缘成分满足全变差最小的约束条件, 将这两种成分的全变差加入到式 (16) 后, 得

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{I}}_1, \hat{\boldsymbol{I}}_2, \hat{\boldsymbol{I}}_3) = \arg \min \left\{ \sum_{k=1}^3 \|\Psi_k^T\boldsymbol{I}_k\|_1 + \right. \\ \left. \lambda \left\| \boldsymbol{y} - \Phi \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{I}_k \right\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 TV(\boldsymbol{I}_k) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $TV(\cdot)$ 表示全变差

$$TV(\boldsymbol{I}) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sqrt{[\boldsymbol{I}(i+1, j) - \boldsymbol{I}(i, j)]^2 + [\boldsymbol{I}(i, j+1) - \boldsymbol{I}(i, j)]^2}$$

其中, N_1 和 N_2 分别表示图像的行数和列数. 为避免边界问题, 在计算全变差时要先对图像进行对称边界延拓, 将图像尺寸扩展为 $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$.

3 压缩传感图像重构算法实现

本文用凸集交替投影算法^[15] 求解式 (17). 将式 (17) 中的优化问题重新写成下列形式:

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{I}}_1, \hat{\boldsymbol{I}}_2, \hat{\boldsymbol{I}}_3) = \\ \arg \min \left\{ f_a(\boldsymbol{I}) + \sum_{k=1}^3 f_b(\boldsymbol{I}_k) + \sum_{k=1}^2 f_c(\boldsymbol{I}_k) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

式中, $f_a(\boldsymbol{I}) = \lambda \left\| \boldsymbol{y} - \Phi \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{I}_k \right\|_2^2$, $f_b(\boldsymbol{I}_k) = \|\Psi_k^T\boldsymbol{I}_k\|_1$, $f_c(\boldsymbol{I}_k) = TV(\boldsymbol{I}_k)$. 由于 l_2 、 l_1 范数和全变差均为凸函数, 根据凸集投影定理可知式 (18) 有唯一解. 设唯一解为 $(\hat{\boldsymbol{I}}_1, \hat{\boldsymbol{I}}_2, \hat{\boldsymbol{I}}_3)$, 则 $\hat{\boldsymbol{I}} = (\hat{\boldsymbol{I}}_1, \hat{\boldsymbol{I}}_2, \hat{\boldsymbol{I}}_3)$. 根据上面三个凸函数可定义下面六个凸集:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\boldsymbol{I} : f_a(\boldsymbol{I}) \leq f_a(\hat{\boldsymbol{I}})\} \\ B_k &= \{\boldsymbol{I}_k : f_b(\boldsymbol{I}_k) \leq f_b(\hat{\boldsymbol{I}}_k)\}, \quad k = 1, 2, 3 \\ C_k &= \{\boldsymbol{I}_k : f_c(\boldsymbol{I}_k) \leq f_c(\hat{\boldsymbol{I}}_k)\}, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

将 \boldsymbol{I}_k 第 j 次迭代值 $\boldsymbol{I}_k^{(j)}$ 向 A_1 投影, 得

$$\boldsymbol{I}_k^{(j+1)} = \boldsymbol{I}_k^{(j)} + \Phi^T \left(\boldsymbol{y} - \Phi \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{I}_k^{(j)} \right) \quad (19)$$

向 B_k 投影, 得

$$\boldsymbol{I}_k^{(j+1)} = \Psi_k S_\tau (\Psi_k^T \boldsymbol{I}_k^{(j)}) \quad (20)$$

式中, S_τ 为阈值函数

$$S_\tau(x) = x \cdot \max(0, \operatorname{sgn}(|x| - \tau))$$

其中, sgn 为符号函数, τ 表示阈值. 随着迭代次数增加, $\mathbf{I}_k^{(j)}$ 逐渐逼近 $\hat{\mathbf{I}}_k$, 因此 $\mathbf{I}_k^{(j)} = \hat{\mathbf{I}}_k + \sigma_k^{(j)} \mathbf{n}$. 式中 \mathbf{n} 表示均方差为 1 的噪声, $\sigma_k^{(j)}$ 为 $\mathbf{I}_k^{(j)}$ 的噪声强度. 利用稳健中值估计算子可以得到 $\mathbf{I}_k^{(j)}$ 的噪声强度 $\sigma_k^{(j)}$. 当迭代次数 j 越大时, $\sigma_k^{(j)}$ 越小, 阈值 τ 也应减小, 在本文中, 阈值 $\tau = 3\sigma_k^{(j)}$. 用梯度下降法向 C_k 投影, 得

$$\mathbf{I}_k^{(j+1)} = \mathbf{I}_k^{(j)} - \mu \frac{\partial TV(\mathbf{I}_k^{(j)})}{\partial \mathbf{I}_k^{(j)}} \quad (21)$$

根据以上推导, 求解式 (17) 的具体算法包括以下步骤:

步骤 1. 初始化: 设 $j = 1$, $\mathbf{I}_1^{(j)}$, $\mathbf{I}_2^{(j)}$ 和 $\mathbf{I}_3^{(j)}$ 的像素值置零. 设最小误差为 E_{\min} , 最大迭代次数为 j_{\max} .

步骤 2. 计算 \mathbf{I}_1 的第 j 次迭代值

$$\mathbf{I}_1^{(j)} = \mathbf{I}^{(j)} - \mathbf{I}_2^{(j)} - \mathbf{I}_3^{(j)}$$

再利用式 (19) 将 $\mathbf{I}_1^{(j)}$ 投影到 A_1 , 投影结果记为 \mathbf{T}_{a1} .

步骤 3. 利用式 (21) 将 \mathbf{T}_{a1} 投影到 C_1 , 投影结果记为 \mathbf{T}_{c1} :

$$\mathbf{T}_{c1} = \mathbf{T}_{a1} - \mu \frac{\partial TV(\mathbf{T}_{a1})}{\partial \mathbf{T}_{a1}}$$

步骤 4. 利用式 (20) 将 \mathbf{T}_{c1} 投影到 B_1 . 即先对 \mathbf{T}_{c1} 进行拉普拉斯塔式分解后进行硬阈值处理, 再进行拉普拉斯塔式重建获得 $\mathbf{I}_1^{(j+1)}$.

步骤 5. 计算 \mathbf{I}_2 的第 j 次迭代值

$$\mathbf{I}_2^{(j)} = \mathbf{I}^{(j)} - \mathbf{I}_1^{(j+1)} - \mathbf{I}_3^{(j)}$$

再利用式 (19) 将 $\mathbf{I}_2^{(j)}$ 投影到 A_1 , 投影结果记为 \mathbf{T}_{a2} .

步骤 6. 利用式 (21) 将 \mathbf{T}_{a2} 投影到 C_2 , 投影结果记为 \mathbf{T}_{c2} .

步骤 7. 利用式 (20) 将 \mathbf{T}_{c2} 投影到 B_2 . 即先对 \mathbf{T}_{c2} 进行圆对称轮廓波变换后进行硬阈值处理, 再进行圆对称轮廓波逆变换得 $\mathbf{I}_2^{(j+1)}$.

步骤 8. 计算 \mathbf{I}_3 的第 j 次迭代值

$$\mathbf{I}_3^{(j)} = \mathbf{I}^{(j)} - \mathbf{I}_1^{(j+1)} - \mathbf{I}_2^{(j+1)}$$

再利用式 (19) 将 $\mathbf{I}_3^{(j)}$ 投影到 A_1 , 投影结果记为 \mathbf{T}_{a3} .

步骤 9. 利用式 (20) 将 \mathbf{T}_{a3} 投影到 B_3 . 即先对 \mathbf{T}_{a3} 进行窄带轮廓波变换后进行硬阈值处理, 再进行窄带轮廓波逆变换得 $\mathbf{I}_3^{(j+1)}$.

步骤 10. 计算 \mathbf{I} 的第 $j + 1$ 次迭代值

$$\mathbf{I}^{(j+1)} = \mathbf{I}_1^{(j+1)} + \mathbf{I}_2^{(j+1)} + \mathbf{I}_3^{(j+1)}$$

步骤 11. 若 $j > j_{\max}$ 或 $\|\mathbf{I}^{(j+1)} - \mathbf{I}^{(j)}\| \leq E_{\min}$, 则算法结束; 否则, $j \leftarrow j + 1$, 转到步骤 2.

4 实验结果

目前压缩传感正处于发展初期, 大部分文献侧重论述压缩传感理论并且用一维信号验证算法的正确性, 应用正交或双正交小波进行信号稀疏表示, 只有少量的文献利用非正交冗余变换作为图像重构的稀疏表示方法^[7, 16]. 从文献 [7, 16] 的实验结果可以看出, 在压缩传感中用非正交冗余变换进行图像重构的质量明显优于正交变换. 文献 [16] 提出的基于块匹配三维变换 (Block matching 3D transform shrinkage, BM3D) 迭代收缩的图像重构算法是目前已公开发表文献中性能最优秀的算法之一. BM3D 本质上是一种三维处理算法^[17], 它首先在图像中寻找与当前正在处理像素邻域相似的图像块, 并将这些图像块重新排列为 3D 数据后进行稀疏变换, 对变换系数进行 3D 硬阈值处理后再进行 3D 维纳滤波, 最后进行 3D 逆变换获得处理结果. 表 1 给出了利用 9/7 Wavelet、BM3D 和本文算法的压缩传感图像重构质量的比较. 为了使这三种方法有可比性, 三种方法在重构图像时均加入梯度稀疏性约束条件, 用梯度下降法调整全变差. 在实验中试验了 10%、20%、30% 三种不同的抽样率 (抽样点数/像素数), 选用 Lena, Barbara, Zelda 和 Fingerprint 四幅标准图像作为测试图像, 图像大小为 512×512 . 表 1 给出了不同抽样率下重构图像的峰值信噪比 (Peak signal to noise ratio, PSNR), 表中最后一列是三种抽样率重构图像的 PSNR 平均值. 从表 1 中可以看出, 本文算法重构图像的 PSNR 值最高. 对于纹理信息较少的 Lena 和 Zelda 图像, 本文算法重构图像的 PSNR 平均值比 BM3D 算法分别高 0.21 dB 和 0.49 dB. 而对于既有边缘又有丰富纹理信息的 Barbara 和 Fingerprint 图像, 本文算法的优势更为明显, 其重构图像的 PSNR 平均值比 BM3D 分别高 3.04 dB 和 1.18 dB. 图 5 给出了三种方法在抽样率为 20% 时对 Barbara 图像重构结果 (为便于观察细节, 图 5 中只显示 Barbara 的局部图像). 从图 5 中可以看出, 基于 BM3D 和本文算法的图像重构质量均明显高于基于 Wavelet 的重构算法. 和 BM3D 相比, 本文算法的图像重构结果视觉效果更佳, 纹理细节更清楚. 图 6 给出了三种方法在抽样率为 20% 时对 Lena 图像重构结果. 虽然此时本文算法 Lena 重构图像的 PSNR 值仅比 BM3D 高 0.53 dB, 但对比图 6(c) 和图 6(d) 可以看出, 当抽样率为 20% 时 BM3D 不能有效重构 Lena 帽子上的精细纹理信息, 而本文算法则保留了 Lena 帽子

上的大部分纹理信息 (重点观察图 6 (c) 和图 6 (d) 的左上角).

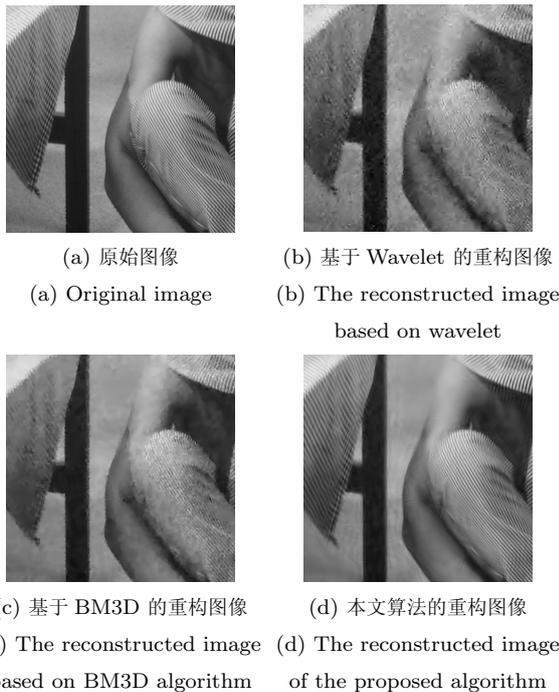


图 5 20% 抽样率时 Barbara 图像的重构结果
Fig. 5 The reconstruction results of the Barbara image (Sample ratio is 20%.)



图 6 20% 抽样率时 Lena 图像的重构结果
Fig. 6 The reconstruction results of the Lena image (Sample ratio is 20%.)

表 1 压缩传感图像重构质量的比较 (表中最后一列 Avg 是三种抽样率重构图像的 PSNR 平均值.)

Table 1 Reconstructed image quality comparison for the three compressed sensing algorithms (The last column Avg is the average PSNR values in decibels of the reconstructed images at three sample ratios.)

Image	抽样率	10 %	20 %	30 %	Avg (dB)
Lena	Wavelet	29.61	32.88	34.80	32.43
	BM3D	30.90	34.16	36.11	33.72
	本文算法	30.98	34.69	36.12	33.93
Barbara	Wavelet	22.67	24.65	27.02	24.78
	BM3D	23.37	25.91	28.59	25.96
	本文算法	24.75	29.93	32.31	29.00
Zelda	Wavelet	32.81	35.55	37.07	35.14
	BM3D	33.53	36.36	37.92	35.94
	本文算法	34.42	36.90	37.98	36.43
Fingerprint	Wavelet	19.88	23.74	26.39	23.34
	BM3D	20.27	24.26	27.37	23.97
	本文算法	22.11	25.53	27.80	25.15

5 结论

本文从 Meyer 图像模型和生物视觉原理出发, 用拉普拉斯塔式分解和圆对称轮廓波分别表示图像的光滑成分和边缘成分, 并构造了窄带轮廓波变换实现纹理成分的稀疏表示. 根据三种图像稀疏表示方法和凸集交替投影算法, 提出了基于混合基稀疏图像表示的压缩传感图像重构算法. 对四幅标准测试图像进行重构的实验结果表明, 本文算法在客观指标 PSNR 和主观视觉效果两方面比 BM3D 算法均有明显提高, 本文算法比 BM3D 能更有效地重构纹理信息. 混合基稀疏图像表示不仅能提高压缩传感图像重构性能, 也能应用于图像超分辨率、图像复原和图像修复等需要稀疏先验知识的反问题中, 这是下一步需要深入研究的方向.

References

- 1 Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306
- 2 Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- 3 Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 21–30
- 4 Baraniuk R G. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118–121

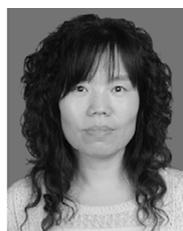
- 5 Candes E J, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 2007, **23**(3): 969–985
- 6 Tsaig Y, Donoho D L. Extensions of compressed sensing. *Signal Processing*, 2006, **86**(3): 549–571
- 7 Ma J W. Compressed sensing by inverse scale space and curvelet thresholding. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **206**(2): 980–988
- 8 Starck J L, Elad M, Donoho D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(10): 1570–1582
- 9 Meyer Y. *Oscillating Patterns in Image Processing and Non-linear Evolution Equation*. Boston: American Mathematical Society, 2002
- 10 von der Heydt R, Peterhans E, Dursteler M R. Periodic pattern selective cells in monkey visual cortex. *Journal of Neuroscience*, 1992, **12**(4): 1416–1434
- 11 Daugman J G. Two-dimensional spectral analysis of cortical receptive field profile. *Vision Research*, 1980, **20**(10): 847–856
- 12 Burt P J, Adelson E H. The Laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Transactions on Communications*, 1983, **31**(4): 532–540
- 13 Lian Qiu-Sheng, Kong Ling-Fu. Construction of the circular symmetric contourlet transform. *Chinese Journal of Computer*, 2006, **29**(4): 652–657
(练秋生, 孔令富. 圆对称轮廓波变换的构造. 计算机学报, 2006, **29**(4): 652–657)
- 14 Coifman R, Geshwind F, Meyer Y. Noiselets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2001, **10**(1): 27–44
- 15 Bregman L M. The method of successive projection for finding a common point of convex sets. *Soviet Math*, 1965, **6**(3): 688–692
- 16 Egiazarian K, Foi A, Katkovnik V. Compressed sensing image reconstruction via recursive spatially adaptive filtering. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*. Washington D. C., USA: IEEE, 2007. 549–552
- 17 Dabov K, Foi A, Katkovnik V, Egiazarian K. Image denoising by sparse 3D transform—domain collaborative filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(8): 2080–2095



练秋生 燕山大学信息科学与工程学院教授, 2006 年获燕山大学博士学位. 主要研究方向为图像处理、压缩传感和多尺度几何分析. 本文通信作者.

E-mail: lianqs@ysu.edu.cn

(**LIAN Qiu-Sheng** Professor at the Institute of Information Science and Technology, Yanshan University. He received his Ph. D. degree from Yanshan University in 2006. His research interest covers image processing, compressed sensing, and multiscale geometrical analysis. Corresponding author of this paper.)



陈书贞 燕山大学信息科学与工程学院副教授. 主要研究方向为图像处理、压缩传感和生物识别.

E-mail: chen.sz818@163.com

(**CHEN Shu-Zhen** Associate professor at the Institute of Information Science and Technology, Yanshan University. Her research interest covers image processing, compressed sensing, and biometrics recognition.)