

基于自适应 UKF 算法的小型水下机器人导航系统

孙尧¹ 张强¹ 万磊²

摘要 针对海流扰动及姿态、航向误差角引起的无法确知的导航系统模型误差,设计了一种带模型误差的自适应无迹卡尔曼滤波器 (Adaptive unscented Kalman filter, AUKF) 用于小型水下机器人 (Small autonomous underwater vehicle, SAUV) 推位导航系统. 首先提出了小型水下机器人三维运动连续时间模型; 然后针对该模型特点, 基于极大后验估值原理推导了 AUKF 算法. 仿真结果说明该算法能够克服海流扰动及姿态和航向误差引起的模型误差. 对比经典无迹卡尔曼滤波器算法, 采用该算法的小型水下机器人推位导航系统在复杂海况下的滤波精度显著提高.

关键词 自适应无迹卡尔曼滤波器, 小型水下机器人, 推位导航系统, 非线性, 极大后验估计

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00342

Small Autonomous Underwater Vehicle Navigation System Based on Adaptive UKF Algorithm

SUN Yao¹ ZHANG Qiang¹ WAN Lei²

Abstract Ocean current disturbance and attitude, heading errors can cause uncertain navigation system model error. To solve the above problem, an adaptive unscented Kalman filter (AUKF) with model error is designed for a small autonomous underwater vehicle's (SAUV) dead reckoning (DR) navigation system. Firstly, three-dimensional motion of SAUV continuous time model is designed. Then, the proposed AUKF algorithm is deduced according to maximum a posteriori (MAP) theory. Finally, simulation results show that the algorithm can overcome the model error caused by disturbance currents and attitude, and heading errors. Compared with the conventional UKF algorithm, the filter precision of the SAUV's DR navigation system in complex sea state is improved a lot by adopting the proposed algorithm.

Key words Adaptive unscented Kalman filter (AUKF), small autonomous underwater vehicle (SAUV), dead reckoning navigation system, nonlinear, maximum a posteriori (MAP) estimation

根据美国海军和水下机器人行业的通行标准, 主尺度在 2~3 米之间的水下机器人称为小型水下机器人 (Small autonomous underwater vehicle, SAUV). 由于具有体积小、机动灵活、成本低、搭载方便等特点, SAUV 在未爆炸武器搜寻、海洋勘查、电缆跟踪与检查、能源矿产资源探测、船体检查等领域得到广泛应用^[1-5]. 在 SAUV 执行任务的过程中, 导航系统的精度十分重要, 如果导航系统提供了错误的位置或姿态信息将会导致规划系统对收集到的数据解释错误, 影响控制系统的精度甚至会导致 SAUV 系统在执行任务的过程中突然失效. 然而实际应用中, SAUV 推位导航系统的精度却极易受到海流扰动等海洋环境干扰因素的影响, 针对这个问题, 文献 [6] 提出一种能够对海流进行估计

的二维导航定位算法, 在 SAUV 执行水面任务的情况下, 取得了令人满意的结果. 然而该算法由于受到系统能观性条件的制约而无法应用于 SAUV 的三维导航定位. 文献 [7] 提出的模糊扩展卡尔曼滤波器 (Fuzzy extended Kalman filter, FEKF) 虽然可以实现 SAUV 的三维导航定位, 但是却在克服海流扰动方面无能为力, 而且就扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman filter, EKF) 而言, 也存在非线性一阶线性化近似精度偏低和需要计算非线性雅可比矩阵的局限性. 无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 基于 Julier 等^[8-9] 提出的 UT (Unscented transformation) 变换, 采用一组精选的 Sigma 点经过非线性系统的映射传递随机量的统计特性, 而后利用加权统计线性回归 (Weighted statistical linear regression, WSLR)^[10-12] 估计随机状态变量的均值和协方差, 计算量与 EKF 同阶, 非线性函数统计量 (均值和方差) 的精度至少可以达到 2 阶, 如果采用特殊的采样策略可以达到更高的精度^[13]. 但经典 UKF 算法的设计往往基于精确的非线性系统模型, 在 SAUV 的导航定位中, 因受海流扰动和传感器精度低等多方面因素的影响, 满足这个要求无疑是困难的, 由此引起的模型误差会使

收稿日期 2010-05-15 录用日期 2010-08-23
Manuscript received May 15; 2010 accepted August 23, 2010
国家自然科学基金 (50909025/E091002) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (50909025/E091002)
1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001 2. 哈尔滨工程大学水下机器人技术国防科技重点实验室 哈尔滨 150001
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001 2. National Key Laboratory of Science and Technology on Autonomous Underwater Vehicle (AUV), Harbin Engineering University, Harbin 150001

UKF 的滤波精度下降, 甚至发散, 导致整个 SAUV 系统瘫痪.

解决上述问题的一个办法是设计一种能够克服模型误差的自适应无迹卡尔曼滤波器 (Adaptive unscented Kalman filter, AUKF), 使得 SAUV 导航系统在滤波计算的同时, 能够利用先验统计特性和观测量对模型误差进行实时修正. 文中设计的带模型误差的 AUKF 算法可以在系统模型不准确的情况下依然保持极高的稳定性和收敛性, 且算法简单易于实现. 仿真结果表明, 尽管存在模型误差, 基于该算法的 SAUV 导航系统不但滤波收敛性极好, 而且三维定位精度较高.

1 SAUV 三维推位导航系统动态模型

SAUV 三维推位导航系统传感器包括 1 个深度计, 1 个三维 Doppler 测速声纳, 3 个 MEMS (Micro electro mechanical system, MEMS) 陀螺仪, 3 个 MEMS 加速度计和 3 个磁强计. 其中, 深度计可以提供 SAUV 的深度信息, Doppler 测速声纳提供艇体系下三维速度信息; 而陀螺仪、加速度和磁强计各自相互垂直安装, 构成姿态航向参考系统 (Attitude and heading reference system, AHRS), 提供 SAUV 的姿态和沿艇体系 b 的三维加速度信息. 根据惯性导航相关理论, 采用北东地导航坐标系描述 SAUV 三维推位导航系统动态模型. 与之对应的笛卡尔坐标系各轴定义为 x 轴指北, y 轴指东, z 轴指向地心. 同时定义 SAUV 的横滚轴为 x_b , 纵摇轴为 y_b , 偏航轴为 z_b , 构成右手笛卡尔艇体坐标系 b . SAUV 在导航系下的位置矢量为 $\mathbf{P} = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$; 在艇体系 b 下的速度矢量为 $\mathbf{V} = [v_{xb}(t) \ v_{yb}(t) \ v_{zb}(t)]^T$, 加速度矢量为 $\mathbf{A} = [a_{xb}(t) \ a_{yb}(t) \ a_{zb}(t)]^T$. 定义 SAUV 的横滚角为 γ , 纵摇角为 θ , 航向角为 ψ , 经欧拉角计算得到艇体系 b 到水平面坐标系 h 的姿态矩阵

$$C_b^h = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \gamma & \sin \theta \cos \gamma \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \gamma & \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1)$$

选取位置矢量 \mathbf{P} , 速度矢量 \mathbf{V} , 加速度矢量 \mathbf{A} 和航向角 ψ 作为 SAUV 运动连续时间模型的状态矢量, 该模型由式 (2) 和式 (3) 确定.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = F(\mathbf{X}(t)) + G\bar{\mathbf{\Lambda}}(t) + \mathbf{W}(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}(t) = H\mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{X}(t) = [p_x(t), \ p_y(t), \ p_z(t), \ v_{xb}(t), \ v_{yb}(t), \ v_{zb}(t), \ a_{xb}(t), \ a_{yb}(t), \ a_{zb}(t), \ \psi(t)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 4} \\ A_{3 \times 4} \\ \Psi_{1 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} \alpha_{xb} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zb} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{1 \times 4} = [0 \ 0 \ 0 \ \alpha_\psi]$$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} p_z(t), \ v_{xb}(t), \ v_{yb}(t), \ v_{zb}(t), \\ a_{xb}(t), \ a_{yb}(t), \ a_{zb}(t), \ \psi(t) \end{bmatrix}^T$$

$$H = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 2} & I_{8 \times 8} \end{bmatrix}$$

其中, α_{xb} , α_{yb} , α_{zb} 为加速度相关时间常数; α_ψ 为航向角相关时间常数; $\bar{\mathbf{\Lambda}}(t)$ 为机动加速度和航向角均值; $\mathbf{W}(t)$ 和 $\mathbf{V}(t)$ 是互不相关的过程噪声和观测噪声, 均为高斯白噪声.

函数 $F(\mathbf{X}(t))$ 由如下所示的运动学函数集确定.

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= (\cos \psi \cdot C_{b11}^h + \sin \psi \cdot C_{b21}^h)v_{xb} + \\ &(\cos \psi \cdot C_{b12}^h + \sin \psi \cdot C_{b22}^h)v_{yb} + \\ &(\cos \psi \cdot C_{b13}^h + \sin \psi \cdot C_{b23}^h)v_{zb} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_y(t) &= (-\sin \psi \cdot C_{b11}^h + \cos \psi \cdot C_{b21}^h)v_{xb} + \\ &(-\sin \psi \cdot C_{b12}^h + \cos \psi \cdot C_{b22}^h)v_{yb} + \\ &(-\sin \psi \cdot C_{b13}^h + \cos \psi \cdot C_{b23}^h)v_{zb} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{p}_z(t) = C_{b31}^h v_{xb} + C_{b32}^h v_{yb} + C_{b33}^h v_{zb} \quad (6)$$

$$\dot{v}_{xb}(t) = a_{xb}(t) \quad (7)$$

$$\dot{v}_{yb}(t) = a_{yb}(t) \quad (8)$$

$$\dot{v}_{zb}(t) = a_{zb}(t) \quad (9)$$

$$\dot{a}_{xb}(t) = -\alpha_{xb} a_{xb} \quad (10)$$

$$\dot{a}_{yb}(t) = -\alpha_{yb} a_{yb} \quad (11)$$

$$\dot{a}_{zb}(t) = -\alpha_{zb} a_{zb} \quad (12)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\alpha_\psi \psi \quad (13)$$

注 1. 较目前文献中常用的 SAUV 三维运动连续时间模型^[14] 而言, 该模型具有以下特点:

1) 在计算位置矢量时将 SAUV 的横滚角考虑进去, 避免了因 SAUV 的微小横滚而引起的模型误差;

2) 将纵摇角 θ 及其角速率从模型中分离出来, 交由导航系统的姿态解算模块单独处理, 从而可以

专门针对 SAUV 的姿态角设计滤波程序^[15], 减少了推位导航算法的负担;

3) 在系统模型中引入艇体系 b 下的加速度信息, 使得推位导航系统能够为 SAUV 的控制模块提供除姿态相关信息以外的 SAUV 的全部动态信息;

4) 动态方程中直接采用艇体系 b 下的速度矢量和加速度矢量, 使得导航系统提供的速度和加速度信息可以被 SAUV 的控制模块直接利用, 而不必进行姿态转换. 同时由于不必进行姿态变换, 满足了观测方程式 (3) 中的观测噪声不相关的假设, 给套用加性白噪声 UKF 滤波公式带来了方便, 有助于减小计算量, 提高滤波系统稳定性^[16].

2 SAUV 三维导航系统模型误差分析

一般而言, 很难掌握准确的海流扰动统计模型, 并且 SAUV 采用的 AHRS 系统的动态精度较低, 一般为 2° (1σ). 上述因素均会导致 SAUV 导航系统模型式 (2) 和 (3) 存在大量的不确定性, 产生模型失配问题. 为解决这一问题, 在设计 SAUV 导航系统 UKF 算法时应当考虑由上述因素引起的模型误差.

2.1 系统模型误差问题的转化

基于上述分析, 不失一般性, 考虑如下带模型误差的非线性离散系统数学模型:

$$\mathbf{X}(k+1) = f[\mathbf{X}(k)] + \Delta f[\mathbf{X}(k)] + \mathbf{W}(k) \quad (14)$$

$$\mathbf{Z}(k) = h[\mathbf{X}(k)] + \Delta h[\mathbf{X}(k)] + \mathbf{V}(k) \quad (15)$$

式中, $\mathbf{X}(k)$ 和 $\mathbf{Z}(k)$ 分别是 k 时刻系统的 n 维状态向量和 m 维量测向量; $\mathbf{W}(k)$ 和 $\mathbf{V}(k)$ 分别是 n 维过程演化噪声和 m 维量测噪声; $f[\cdot]$ 和 $h[\cdot]$ 分别为非线性系统函数和量测函数; $\Delta f[\mathbf{X}(k)]$ 和 $\Delta h[\mathbf{X}(k)]$ 为模型误差.

假设 1. 过程噪声 $\mathbf{W}(k)$ 和量测噪声 $\mathbf{V}(k)$ 是相互独立的零均值高斯白噪声, 具有协方差矩阵:

$$\text{cov}(\mathbf{W}(k)) = \mathbf{Q}(k)$$

$$\text{cov}(\mathbf{V}(k)) = \mathbf{R}(k)$$

假设 2.

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \Delta f[\mathbf{X}(k)] + \mathbf{W}(k) \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \Delta h[\mathbf{X}(k)] + \mathbf{V}(k) \quad (17)$$

称 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 为虚拟过程噪声, $\boldsymbol{\xi}(k)$ 为虚拟量测噪声^[17]. 则式 (14) 和 (15) 可写为

$$\mathbf{X}(k+1) = f[\mathbf{X}(k)] + \boldsymbol{\eta}(k) \quad (18)$$

$$\mathbf{Z}(k) = h[\mathbf{X}(k)] + \boldsymbol{\xi}(k) \quad (19)$$

这样, 对带未知模型误差的非线性系统式 (14) 和 (15) 的滤波问题便转化为对带虚拟噪声的非线性系统式 (18) 和 (19) 的自适应滤波问题, 进而又可以归结为对虚拟噪声 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 和 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 统计值的估计问题.

注 2. 对假设 1 的说明:

根据卡尔曼滤波器理论, 准确的滤波模型与真实系统之间的误差可以为相互独立的零均值高斯白噪声. 式 (14) 和 (15) 已经单独考虑了模型误差 $\Delta f[\mathbf{X}(k)]$ 和 $\Delta h[\mathbf{X}(k)]$, 并且对于本文提出的 SAUV 滤波模型式 (2) 和 (3) 而言, 前者对应 SAUV 运动方程, 而后者对应 SAUV 的导航传感器方程, 因此它们对应的离散方程的过程噪声 $\mathbf{W}(k)$ 与量测噪声 $\mathbf{V}(k)$ 之间满足相互独立的条件, 假设 1 成立.

2.2 虚拟噪声的统计特性分析

考虑式 (16) 和 (17), 显然, 由于同时含有状态向量 $\mathbf{X}(k)$, 虚拟噪声 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 和 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 是相关的. 以下对它们的数字特征进行分析.

定理 1. 给定 $\mathbf{X}(k)$ 时, $\boldsymbol{\eta}(k)$ 的条件概率密度函数 $p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k))$ 是以 $\Delta f[\mathbf{X}(k)]$ 为均值, 形状与过程噪声 $\mathbf{W}(k)$ 相同的一个概率密度函数.

证明.

$$p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^n} p(\boldsymbol{\eta}(k), \mathbf{W}(k)|\mathbf{X}(k))d\mathbf{W}(k) \quad (20)$$

又

$$p(\boldsymbol{\eta}(k), \mathbf{W}(k)|\mathbf{X}(k)) = p(\mathbf{W}(k))p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{W}(k), \mathbf{X}(k)) \quad (21)$$

定义 $p(\mathbf{W}(k)) = p_w(\cdot)$, 又由式 (16) 可知, 在 $\mathbf{X}(k)$ 已知的条件下, $\boldsymbol{\eta}(k)$ 与 $\mathbf{W}(k)$ 正相关, 所以

$$p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^n} p_w(\mathbf{W}(k))d\mathbf{W}(k) \quad (22)$$

对状态方程式 (16) 两边求导, 根据 $\mathbf{W}(k)$ 的独立性和在 $\mathbf{X}(k)$ 已知的条件下, $\boldsymbol{\eta}(k)$ 与 $\mathbf{W}(k)$ 正相关性, 得到给定 $\mathbf{X}(k)$ 时, $\boldsymbol{\eta}(k)$ 的条件概率密度函数 $p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k))$ 的表达式为

$$p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(\boldsymbol{\eta}(k) - \Delta f[\mathbf{X}(k)])p_w(\boldsymbol{\eta}(k))d\boldsymbol{\eta}(k) \quad (23)$$

由 Dirac delta 函数的抽样性质有

$$p(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k)) = p_w(\boldsymbol{\eta}(k) - \Delta f[\mathbf{X}(k)]) \quad (24)$$

□

根据定理 1 计算得到已知 $\mathbf{X}(k)$ 时, 虚拟状态噪声 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 的均值 $\hat{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}$ 为

$$\hat{\mathbf{E}}_{\eta} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^n} \boldsymbol{\eta}(k) p_w(\boldsymbol{\eta}(k) - \Delta f[\mathbf{X}(k)]) d\boldsymbol{\eta}(k), \quad k \in \mathbf{N} \quad (25)$$

协方差为

$$P(\boldsymbol{\eta}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^n} (\boldsymbol{\eta}(k) - \hat{\mathbf{E}}_{\eta})(\boldsymbol{\eta}(k) - \hat{\mathbf{E}}_{\eta})^T \times p_w(\boldsymbol{\eta}(k) - \Delta f[\mathbf{X}(k)]) d\boldsymbol{\eta}(k), \quad k \in \mathbf{N} \quad (26)$$

同理可证明定理 2. \square

定理 2. 给定 $\mathbf{X}(k)$ 时, $\boldsymbol{\xi}(k)$ 的条件概率密度函数 $p(\boldsymbol{\xi}(k)|\mathbf{X}(k))$ 是以 $\Delta h[\mathbf{X}(k)]$ 为均值, 形状与测量噪声 $\mathbf{V}(k)$ 相同的一个概率密度函数.

根据定理 2 计算得到已知 $\mathbf{X}(k)$ 时, 虚拟观测噪声 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 的均值 $\hat{\mathbf{E}}_{\xi}$ 为

$$\hat{\mathbf{E}}_{\xi} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^m} \boldsymbol{\xi}(k) p_v(\boldsymbol{\xi}(k) - \Delta h[\mathbf{X}(k)]) d\boldsymbol{\xi}(k), \quad k \in \mathbf{N} \quad (27)$$

协方差为

$$P(\boldsymbol{\xi}(k)|\mathbf{X}(k)) = \int_{\mathbf{R}^m} (\boldsymbol{\xi}(k) - \hat{\mathbf{E}}_{\xi})(\boldsymbol{\xi}(k) - \hat{\mathbf{E}}_{\xi})^T \times p_v(\boldsymbol{\xi}(k) - \Delta h[\mathbf{X}(k)]) d\boldsymbol{\xi}(k), \quad k \in \mathbf{N} \quad (28)$$

然而, 一般情况下仅能得到状态向量 $\mathbf{X}(k)$ 的估计值, 因此虚拟噪声 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 和 $\boldsymbol{\mu}(k)$ 的均值和协方差均是时变的. 显然在实际应用中, 模型误差的不可知性导致无法建立虚拟噪声的模型, 因此在假设所建模型较为准确的前提下, 认为模型误差 $\Delta f[\mathbf{X}(k)]$ 和 $\Delta h[\mathbf{X}(k)]$ 均相对较小, 虚拟噪声 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 和 $\boldsymbol{\mu}(k)$ 都被近似为均值和方差未知的相互独立的白噪声.

3 带有输入项和非零均值噪声的 UKF 算法实现

观察 SAUV 三维水下运动连续时间模型, 其与经典的 UKF 滤波模型相比, 有以下两点不同:

1) 该非线性动态方程的输入项为状态向量 $\mathbf{X}(t)$ 中的部分变量 (这里为艇体系 b 下的加速度信息和航向信息);

2) 由 SAUV 三维导航系统模型误差分析可知, 在考虑模型误差的前提下, 过程噪声和量测噪声的均值非零.

综上, 应对 UKF 递推公式做出相应变动.

结合 SAUV 三维水下运动连续时间模型, 不失一般性, 考虑如下非线性离散系统:

$$\mathbf{X}(k+1) = f[\mathbf{X}(k)] + B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k) + \boldsymbol{\mu}(k) \quad (29)$$

$$\mathbf{Z}(k+1) = h[\mathbf{X}(k+1)] + \boldsymbol{\eta}(k+1) \quad (30)$$

式中, $\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k)$ 是由从状态向量 $\mathbf{X}(k)$ 中抽取的部分状态变量构成的 r 维输入向量; B 为 $n \times r$ 维控制矩阵; $\boldsymbol{\mu}(k)$, $\boldsymbol{\eta}(k)$ 分别是均值为 \mathbf{q} 和 \mathbf{p} , 方差分别与 $\mathbf{W}(k)$, $\mathbf{V}(k)$ 相同的白噪声, 可表示为

$$\boldsymbol{\mu}(k) = \mathbf{q} + \mathbf{W}(k) \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\eta}(k) = \mathbf{p} + \mathbf{V}(k) \quad (32)$$

其他符号的定义与式 (14) 和 (15) 完全相同.

将式 (31) 和 (32) 带入式 (29) 和 (30) 中, 有

$$\mathbf{X}(k+1) = f[\mathbf{X}(k)] + B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k) + \mathbf{q} + \mathbf{W}(k) \quad (33)$$

$$\mathbf{Z}(k+1) = h[\mathbf{X}(k+1)] + \mathbf{p} + \mathbf{V}(k+1) \quad (34)$$

基于式 (33) 和 (34) 的非线性系统 UKF 滤波算法如下:

步骤 1. Sigma 点采样

采取某种采样策略得到时刻 k 状态 $\mathbf{X}(k)$ 估计的 Sigma 点集 $\{\boldsymbol{\chi}_i\}$, $i = 0, 1, \dots, L$.

步骤 2. 预测方程

Sigma 点集 $\{\boldsymbol{\chi}_i\}$ 经过非线性状态方程传播后, 得到 $\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k)$, 由 $\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k)$ 计算可得状态向量 $\mathbf{X}(k)$ 的一步预测估计 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k)$ 和一步误差协方差阵预测估计 $P(k+1|k)$.

$$\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k) = f(\boldsymbol{\chi}_i(k|k)) + B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k) + \mathbf{q} \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \sum_{i=0}^L \omega_i^m \boldsymbol{\chi}_i(k+1|k) \quad (36)$$

$$P(k+1|k) = \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) \right] \times \left[\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) \right]^T + Q \quad (37)$$

式中, ω_i^m ($i = 0, 1, \dots, L$) 为求一阶统计特性时的权系数; ω_i^c ($i = 0, 1, \dots, L$) 为求二阶统计特性时的权系数.

$\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k)$ 通过非线性量测方程 $h[\cdot] + \mathbf{p}$ 传播为 $\mathbf{Z}_i(k+1|k)$, 由 $\mathbf{Z}_i(k+1|k)$ 可得观测向量 $\mathbf{Z}(k)$ 的预测值 $\hat{\mathbf{Z}}(k+1|k)$, 观测向量误差 $\tilde{\mathbf{Z}}(k+1|k)$ 的协方差阵 $P_{\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Z}}}$ 的一步预测值, 和其与状态变量预测误差 $\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k)$ 的协方差阵 $P_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Z}}}$ 的一步预测值.

$$\mathbf{Z}_i(k+1|k) = h(\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k)) + \mathbf{p} \quad (38)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) = \sum_{i=0}^L \omega_i^m \mathbf{Z}_i(k+1|k) \quad (39)$$

$$P_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} = \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\mathbf{Z}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \right] \times \left[\mathbf{Z}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \right]^T + R \quad (40)$$

$$P_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{z}}} = \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\boldsymbol{\chi}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) \right] \times \left[\mathbf{Z}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \right]^T \quad (41)$$

步骤 3. 获得新的量测值 $\mathbf{Z}(k+1)$, 进行滤波更新

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k+1) = \mathbf{Z}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) + K_k \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) \quad (43)$$

$$K_k = P_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{z}}} P_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}}^{-1} \quad (44)$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - K_k P_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} K_k^T \quad (45)$$

步骤 4. 从状态向量 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1)$ 提取与 $\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k+1)$ 对应的状态变量.

4 带模型误差的自适应 UKF 算法

通过对 SAUV 导航系统模型误差的分析, 得到如下结论: 在假设所建模型较为准确的前提下, 系统的模型误差可以转化为均值和方差都服从均匀分布的相互独立的高斯白噪声. 因此可以通过设计时变噪声统计值估计器, 得到如式 (33) 和式 (34) 所示系统的带有模型误差的 AUKF 算法.

4.1 算法设计

定理 3. 均值和方差相互独立且服从均匀分布的高斯白噪声的次优 MAP 估值器公式为

$$\hat{\mathbf{q}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \hat{\mathbf{X}}(j|j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m \left[f[\boldsymbol{\chi}_i(j-1|j-1)] + B \bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(j-1) \right] \right\} \quad (46)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\mathbf{Z}(j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m h(\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1)) \right] \quad (47)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[K_j \boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}^T(j) K_j^T + P(j|j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right] \times \left[\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right]^T \right] \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}^T(j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\mathbf{Z}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right] \times \left[\mathbf{Z}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right]^T \right] \quad (49)$$

证明.

设 0 到 k 时刻状态向量序列为 $X^*(k)$:

$$X^*(k) = [\mathbf{X}(0) \quad \mathbf{X}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{X}(k)]$$

1 到 k 时刻观测向量序列为 $Z^*(k)$:

$$Z^*(k) = [\mathbf{Z}(1) \quad \mathbf{Z}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{Z}(k)]$$

根据概率密度函数的贝叶斯公式有

$$p(X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R | Z^*(k)) = \frac{p(Z^*(k) | X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) p(X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R)}{p(Z^*(k))} \quad (50)$$

显然, 概率密度函数 $p(Z^*(k))$ 与最优化无关, 因此, 设指标函数

$$J = p(Z^*(k) | X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) \times p(X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) = p(Z^*(k) | X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) \times p(X^*(k) | \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) p(\mathbf{q}) p(Q) p(\mathbf{p}) p(R) \quad (51)$$

又, 概率密度函数 $p(\mathbf{q})$, $p(Q)$, $p(\mathbf{p})$ 和 $p(R)$ 均为常值也与最优化无关, 因此指标函数可以简化为

$$J = p(Z^*(k) | X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) \times p(X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) = p(Z^*(k) | X^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) \times p(X^*(k) | \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) \quad (52)$$

无论线性或非线性系统, 当精确已知高斯系统状态后验均值和协方差时, 滤波输出残差序列是高斯白噪声序列^[18], 所以

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{X}^*(k)|\mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) = \\
p(\mathbf{X}(0)) \prod_{j=1}^k p(\mathbf{X}(j)|\mathbf{X}(j-1), \mathbf{q}, Q) = \\
C_1 |P(0)|^{-\frac{1}{2}} |Q|^{-\frac{k}{2}} \times \\
\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left\| \mathbf{X}(0) - \hat{\mathbf{X}}(0) \right\|_{P(0)^{-1}}^2 + \right. \right. \\
\left. \left. \sum_{i=1}^k \left\| \mathbf{X}(i) - \hat{\mathbf{X}}(i) \right\|_{Q^{-1}}^2 \right] \right\} \quad (53)
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{Z}^*(k)|\mathbf{X}^*(k), \mathbf{q}, Q, \mathbf{p}, R) = \\
\prod_{j=1}^k p(\mathbf{Z}(j)|\mathbf{X}(j), \mathbf{p}, R) = \\
C_2 |R|^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\| \mathbf{Z}(i) - \hat{\mathbf{Z}}(i) \right\|_{R^{-1}}^2 \right\} \quad (54)
\end{aligned}$$

其中, $C_1 = (2\pi)^{\frac{n(k+1)}{2}}$, n 为状态向量维数; $C_2 = (2\pi)^{\frac{mk}{2}}$, m 为观测向量维数; $\|U\|_{\mathbf{V}}^2 = U^T \mathbf{V} U$ 为二次型; $|A|$ 为矩阵 A 的行列式. 将式 (53) 和式 (54) 代入式 (52), 得

$$\begin{aligned}
J = C |Q|^{-\frac{k}{2}} |R|^{-\frac{k}{2}} \times \\
\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \left\| \mathbf{X}(i) - \hat{\mathbf{X}}(i) \right\|_{Q^{-1}}^2 - \right. \right. \\
\left. \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\| \mathbf{Z}(i) - \hat{\mathbf{Z}}(i) \right\|_{R^{-1}}^2 \right] \right\} \quad (55)
\end{aligned}$$

其中

$$C = C_1 C_2 |P(0)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\| \mathbf{X}(0) - \hat{\mathbf{X}}(0) \right\|_{P(0)^{-1}}^2 \right)$$

为常数. 两边取对数有:

$$\begin{aligned}
\ln J = -\frac{k}{2} \ln |Q| - \frac{k}{2} \ln |R| - \\
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\| \mathbf{X}(i) - \hat{\mathbf{X}}(i) \right\|_{Q^{-1}}^2 - \\
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\| \mathbf{Z}(i) - \hat{\mathbf{Z}}(i) \right\|_{R^{-1}}^2 + \ln C \quad (56)
\end{aligned}$$

由于 J 与 $\ln J$ 的凹凸性相同, 因此

$$\max(J) = \max(\ln J) \quad (57)$$

设各时刻均值 $\hat{\mathbf{X}}(i)$ 和 $\hat{\mathbf{Z}}(i)$ 均由平滑估计值计算得到, 并结合式 (35), (36) 以及式 (38), (39), 利用矩阵求导运算法则, 式 (56) 两边分别对 \mathbf{q} , \mathbf{p} , Q 和 R 求导. 则根据极大后验估计 (Maximum a posterior, MAP) 理论, 令

$$\frac{\partial \ln J}{\partial Q} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial \ln J}{\partial R} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial \ln J}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial \ln J}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (61)$$

得噪声统计值极大后验估计器为

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \hat{\mathbf{X}}(j|k) - \right. \\
\left. \sum_{i=0}^L \omega_i^m [f[\boldsymbol{\chi}_i(j-1|k)] + B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(j|k)] \right\} \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\mathbf{Z}(j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m h(\boldsymbol{\chi}_i(j|k)) \right] \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\hat{\mathbf{X}}(j|k) - \hat{\mathbf{X}}(j-1|k) \right] \times \\
\left[\hat{\mathbf{X}}(j|k) - \hat{\mathbf{X}}(j-1|k) \right]^T \quad (64)
\end{aligned}$$

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\mathbf{Z}(j) - \hat{\mathbf{Z}}(j|k) \right] \left[\mathbf{Z}(j) - \hat{\mathbf{Z}}(j|k) \right]^T \quad (65)$$

以滤波估计值代替平滑估计值, 得

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \hat{\mathbf{X}}(j|j) - \right. \\
\left. \sum_{i=0}^L \omega_i^m [f[\boldsymbol{\chi}_i(j-1|j-1)] + B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(j-1)] \right\} \quad (66)
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\mathbf{Z}(j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m h(\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1)) \right] \quad (67)$$

$$\hat{Q}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\hat{\mathbf{X}}(j|j) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right] \times \left[\hat{\mathbf{X}}(j|j) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right]^T \quad (68)$$

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\mathbf{Z}(j) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right] \times \left[\mathbf{Z}(j) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right]^T \quad (69)$$

对式 (68), 应用式 (43), 有

$$\hat{Q}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_j \boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T K_j^T \quad (70)$$

注意到

$$\mathbf{E} [\boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T] = P_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}} \quad (71)$$

并考虑式 (45) 和式 (37), 得到过程噪声方差的 MAP 估值器为

$$\hat{Q}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ K_j \boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T K_j^T + P(j|j) - \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right] \times \left[\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right]^T \right\} \quad (72)$$

同理, 对式 (69), 应用式 (42), 有

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T \quad (73)$$

根据式 (40) 并注意到式 (71), 得到观测噪声方差的 MAP 估值器为

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T - \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\mathbf{Z}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right] \times \left[\mathbf{Z}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right]^T \right\} \quad (74)$$

□

注 3. 对于次优 MAP 估值器估计精度的说明. 由式 (35)~(45), 根据 Sigma 点的选择条件函数,

有

$$\mathbf{E}[\hat{\mathbf{q}}(k)] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_k \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(j)] + \mathbf{q} \quad (75)$$

$$\mathbf{E}[\hat{\mathbf{p}}(k)] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(j)] + \mathbf{p} \quad (76)$$

由于经 UT 变换后, 非线性量测函数 $h[\cdot]$ 统计量的估计精度至少达到二阶, 因此 $h[\cdot]$ 的均值估计误差 (新息序列 $\boldsymbol{\varepsilon}(j)$, $j \in [1, k]$ 的期望值) 精度至少为二阶, 因此次优 MAP 估值器对于虚拟噪声均值的估计精度高于二阶.

对式 (68) 和式 (69) 左右两边分别求期望:

$$\mathbf{E}[\hat{Q}(k)] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{E} \left\{ \left[\hat{\mathbf{X}}(j|j) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right] \times \left[\hat{\mathbf{X}}(j|j) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right]^T \right\} \quad (77)$$

$$\mathbf{E}[\hat{R}(k)] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{E} \left\{ \left[\mathbf{Z}(j) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right] \times \left[\mathbf{Z}(j) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1) \right]^T \right\} \quad (78)$$

对式 (77) 应用式 (43), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{Q}(k)] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{E} [K_j \boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T K_j^T] = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [K_j \mathbf{E} [\boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T] K_j^T] = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [K_j P_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}} K_j^T] \end{aligned} \quad (79)$$

考虑式 (45) 和式 (37), 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{Q}(k)] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [P(j|j-1) - P(j|j)] = \\ &= Q + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right] \times \left[\boldsymbol{\chi}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{X}}(j|j-1) \right]^T - P(j|j) \right\} \end{aligned} \quad (80)$$

同理, 对式 (78) 应用式 (42), 有

$$\mathbf{E}[\hat{R}(k)] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{E} [\boldsymbol{\varepsilon}(j) \boldsymbol{\varepsilon}(j)^T] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}} \quad (81)$$

根据式 (40), 有

$$\begin{aligned} E[\hat{R}(k)] &= R + \\ &\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^L \omega_i^c [\mathbf{Z}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1)] \times \right. \\ &\left. [\mathbf{Z}_i(j|j-1) - \hat{\mathbf{Z}}(j|j-1)]^T \right\} \end{aligned} \quad (82)$$

综上, 由于 UT 变换可使非线性系统函数 $f[\cdot]$ 和量测函数 $h[\cdot]$ 统计量的估计精度均至少达到二阶, 由式 (80) 和式 (82), 过程噪声方差 $\hat{Q}(k)$ 和观测噪声方差 $\hat{R}(k)$ 的估计精度也均可达到二阶以上。

4.2 算法改进

由式 (46)~(49) 可见, 对虚拟噪声均值和方差的估计是对全部时间点上值的算数平均, 这不但增加了计算时间, 而且耗费存储空间. 又由于虚拟噪声本身为时变噪声, 根据统计学原理, 对于其统计量的估计应该强调新近值的作用, 因此采用渐消指数加权对次优 MAP 估值器进行改进.

假设加权系数 $\{\beta_i\}$ 满足: $\beta_i = \beta_{i-1}b$ 且 $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$, 其中 $0 < b < 1$ 为遗忘因子.

根据等比数列求和公式并注意到权系数的约束条件, 得到权系数与时间 $\{\beta_i\}$ 相关的一般表达式为

$$\begin{cases} \beta_i = d(k)b^{i-1}, & i = 1, \dots, k \\ d(k) = \frac{1-b}{1-b^k} \end{cases} \quad (83)$$

以虚拟状态噪声均值 MAP 估值器为例, 设

$$\begin{aligned} \Delta(j|j) &= \hat{\mathbf{X}}(j|j) - \\ &\sum_{i=0}^L \omega_i^m \{f[\boldsymbol{\chi}_i(j-1|j-1)] + B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(j-1)\} \end{aligned} \quad (84)$$

即

$$\hat{\mathbf{q}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Delta(j|j) \quad (85)$$

式 (83) 与式 (85) 相乘, 有

$$\hat{\mathbf{q}}(k) = \sum_{j=1}^k d(k)b^{k-j} \Delta(j|j) = d(k) \sum_{j=1}^k b^{k-j} \Delta(j|j) \quad (86)$$

得到递推公式:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(k+1) &= d(k+1) \sum_{j=1}^{k+1} b^{k+1-j} \Delta(j|j) = \\ &d(k+1)\Delta(k+1|k+1) + [1-d(k+1)]\hat{\mathbf{q}}(k) \end{aligned} \quad (87)$$

将式 (84) 代入式 (87), 得:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(k) &= [1-d(k)]\hat{\mathbf{q}}(k-1) + \\ &d(k) \left\{ \hat{\mathbf{X}}(k|k) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m [f[\boldsymbol{\chi}_i(k-1|k-1)] + \right. \\ &\left. B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k-1)] \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

同理, 得到其他统计量的渐消指数次优 MAP 估值器为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}(k) &= [1-d(k)]\hat{\mathbf{p}}(k-1) + \\ &d(k)[\mathbf{Z}(k) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m h(\boldsymbol{\chi}_i(k|k-1))] \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k) &= [1-d(k)]\hat{Q}(k-1) + \\ &d(k) \left\{ K_k \boldsymbol{\varepsilon}(k) \boldsymbol{\varepsilon}^T(k) K_k^T + P(k|k) - \right. \\ &\sum_{i=0}^L [\omega_i^c \boldsymbol{\chi}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{X}}(k|k-1)] \times \\ &\left. [\boldsymbol{\chi}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{X}}(k|k-1)]^T \right\} \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}(k) &= [1-d(k)]\hat{R}(k-1) + \\ &d(k) \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \boldsymbol{\varepsilon}^T(k) - \right. \\ &\sum_{i=0}^L \omega_i^c [\mathbf{Z}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{Z}}(k|k-1)] \times \\ &\left. [\mathbf{Z}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{Z}}(k|k-1)]^T \right\} \end{aligned} \quad (91)$$

综上, 采用与第 3 节和第 4 节相同的符号定义, 得到带模型误差的自适应 UKF 滤波算法如下:

步骤 1. 各矢量初始化

步骤 2. Sigma 点采样

采取某种采样策略得到 k 时刻状态估计的 Sigma 点集 $\{\boldsymbol{\chi}_i\}$, $i = 0, \dots, L$.

步骤 3. 预测方程

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_i(k|k-1) &= f(\boldsymbol{\chi}_i(k-1|k-1)) + \\ &B\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k-1) \end{aligned} \quad (92)$$

$$\boldsymbol{\chi}_i(k|k-1) = \boldsymbol{\gamma}_i(k|k-1) + \hat{\mathbf{q}}(k-1) \quad (93)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(k|k-1) = \sum_{i=0}^L \omega_i^m \boldsymbol{\chi}_i(k|k-1) \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \Theta(k|k-1) &= \sum_{i=0}^L \omega_i^c [\boldsymbol{\chi}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{X}}(k|k-1)] \times \\ &[\boldsymbol{\chi}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{X}}(k|k-1)]^T \end{aligned} \quad (95)$$

$$P(k|k-1) = \Theta(k|k-1) + \hat{Q}(k-1) \quad (96)$$

$$\zeta_i(k|k-1) = h(\chi_i(k|k-1)) \quad (97)$$

$$\mathbf{Z}_i(k|k-1) = \zeta_i(k|k-1) + \hat{\mathbf{p}}(k-1) \quad (98)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(k|k-1) = \sum_{i=0}^L \omega_i^m \mathbf{Z}_i(k|k-1) \quad (99)$$

$$\Gamma_{\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}} = \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\mathbf{Z}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{Z}}(k|k-1) \right] \times \left[\mathbf{Z}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{Z}}(k|k-1) \right]^T \quad (100)$$

$$P_{\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}} = \Gamma_{\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}} + \hat{R}(k-1) \quad (101)$$

$$P_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Z}}} = \sum_{i=0}^L \omega_i^c \left[\chi_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{X}}(k|k-1) \right] \times \left[\mathbf{Z}_i(k|k-1) - \hat{\mathbf{Z}}(k|k-1) \right]^T \quad (102)$$

步骤 4. 滤波更新

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{Z}(k) - \hat{\mathbf{Z}}(k|k-1) \quad (103)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(k|k) = \hat{\mathbf{X}}(k|k-1) + K_k \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (104)$$

$$\hat{\mathbf{q}}(k) = [1 - d(k)] \hat{\mathbf{q}}(k-1) + d(k) \left[\hat{\mathbf{X}}(k|k) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m \boldsymbol{\gamma}_i(k|k-1) \right] \quad (105)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = [1 - d(k)] \hat{\mathbf{p}}(k-1) + d(k) \left[\mathbf{Z}(k) - \sum_{i=0}^L \omega_i^m \zeta_i(k|k-1) \right] \quad (106)$$

$$\hat{R}(k) = [1 - d(k)] \hat{R}(k-1) + d(k) [\boldsymbol{\varepsilon}(k) \boldsymbol{\varepsilon}^T(k) - \Gamma_{\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}}] \quad (107)$$

$$K_k = P_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Z}}} P_{\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}}^{-1} \quad (108)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K_k P_{\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}} K_k^T \quad (109)$$

$$\hat{Q}(k) = [1 - d(k)] \hat{Q}(k-1) + d(k) [K_k \boldsymbol{\varepsilon}(k) \boldsymbol{\varepsilon}^T(k) K_k^T + P(k|k) - \Theta(k|k-1)] \quad (110)$$

步骤 5. 从状态向量 $\hat{\mathbf{X}}(k|k)$ 提取与 $\bar{\mathbf{X}}_{\text{SUB}}(k)$ 对应的状态变量。

5 算法性能检验

如前所述, 仿真实验中 SAUV 采用的导航设备包括 1 个 AHRS 系统, 1 个深度计和 1 个三维 Doppler 测速声纳. AHRS 系统的动态精度为 2° (1σ), AHRS 中传感器的性能参数如表 1 所示, 深度

计精度为满量程的 3%, 三维 Doppler 测速声纳测速精度为 1%.

表 1 AHRS 器件性能参数

Table 1 AHRS device performance parameters

| | 陀螺仪 | 加速度计 | 磁强计 |
|---------------------|----------------------------------|--|--------------------------|
| 零偏稳定性 (1σ) | 1 deg/s | 0.02 m/s ² | 0.5 mGauss |
| 随机游走 | 0.1 deg/(s · Hz ^{1/2}) | 0.02 m/(s ² · Hz ^{1/2}) | 0.5 mGauss (1σ) |

虽然在真实海况下 SAUV 受到的海洋环境干扰较为复杂, 包括诸如海流、壁面效应、海水浓度、温度的影响等, 但是 SAUV 在水下做三维空间运动受到的环境干扰力主要是海流, 因此仿真实验中仅考虑海流的影响. 设 SAUV 的工作环境为三维笛卡尔坐标系下的离散栅格空间. 采用北东地导航坐标系, z 轴指向海底, 表示深度, $z = 0$ 表示海平面. 由于海流主要是水平运动, z 轴方向的流速可以忽略不计, 并假定其水平速度沿深度均匀分布. 因此首先 SAUV 的工作环境按深度分层, 每层为一个二维平面, 再将二维平面空间进行栅格化处理, 每个栅格的大小为边长 8 m 的正方形, 每个栅格内海流扰动可以近似看作是相同的. 海流扰动场用南北流向、东西蜿蜒的流函数生成. 并且通过增强扰动强度, 实现对真实海况的模拟, 检验算法性能. 式 (111) 为流函数的数学表达式. 显然海流的流速场是一个向量场, 其在时间 t 沿北向和东向的速度分量 $U_N(x, y, t)$, $U_E(x, y, t)$ 和加速度分量 $A_N(x, y, t)$, $A_E(x, y, t)$ 分别如式 (112) ~ (115) 所示, 生成的某一深度的模拟海流扰动场如图 1 所示.

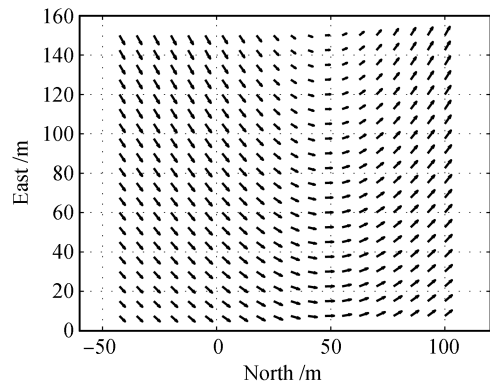


图 1 模拟海流扰动场二维剖面图

Fig. 1 Simulation of ocean current disturbance field (2D profile)

$$\Psi_c(x, y, t) = 1 - \tanh \left[\frac{y - B_c(t) \cos(\lambda(x - ct))}{(1 + \lambda^2 B_c(t)^2 \sin^2(\lambda(x - ct)))^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (111)$$

式中, $B_c(t) = 1.2 + 0.3 \cos(0.4t + \pi/2)$; $c = 0.12$; $\lambda = 0.84$.

$$U_N(x, y, t) = \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \quad (112)$$

$$U_E(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi_c}{\partial y} \quad (113)$$

$$A_N(x, y, t) = \frac{\delta U_N(x, y, t)}{\delta t} \quad (114)$$

$$A_E(x, y, t) = \frac{\delta U_E(x, y, t)}{\delta t} \quad (115)$$

图2所示为SAUV以A点为起点,G点为终点的模拟运动轨迹. 其中SAUV在AB段做 0.2 m/s^2 的匀加速运动,在BC段以4节的速度匀速下潜至30m深度,在CD段以 -0.2 m/s^2 的加速度匀减速至2节后在DE段匀速巡航后匀速上浮至水面,并在FG段以 -0.1 m/s^2 的加速度达到静止状态. 需要说明的是,根据SAUV水动力特性,其运动过程中横摇很小,一般只有纵倾和转向两种姿态变化,因此仿真实验只设计了SAUV的纵倾和转向仿真. 结合上述SAUV各段运动方式、海流的速度及加速度方程,代入SAUV的运动学方程,可求解出叠加入海流扰动的SAUV的运动加速度和速度值,详细方法参见文献[19].

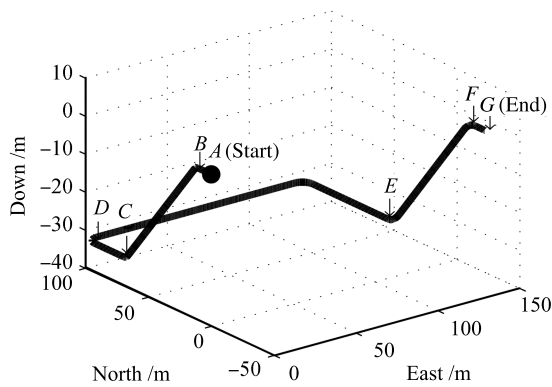
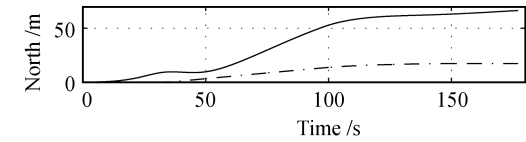


图2 SAUV 模拟运动轨迹

Fig.2 SAUV trajectory simulation

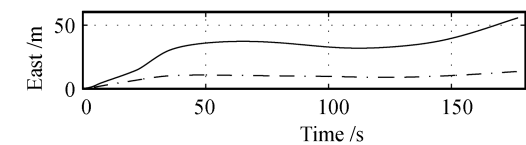
仿真环境下,SAUV水平运动阶段沿艇体系 b 的横滚轴 x_b 和纵摇轴 y_b 方向的导航传感器将受到海流干扰.在SAUV下潜和上浮阶段,由于纵倾角的变化,海流干扰将同时投影到艇体系 x_b , y_b 和 z_b 三个轴向上,导致三个方向上的导航传感器都会受到海流的影响.同时每个阶段AHRS都存在测姿误差,以上因素都会使SAUV滤波模型产生误差,引起SAUV导航系统的模型失配.

根据仿真海况,设式(10)~(13)中的反相关时间分别为: $\alpha_{xb} = 1$, $\alpha_{yb} = 1$, $\alpha_{zb} = 1$, $\alpha_{\psi} = 0.1$.图3~5所示为分别采用经典UKF滤波算法和带模型误差的AUKF滤波算法对深度计、三维Doppler测速声纳和AHRS输出的SAUV水平姿态角和航向角数据融合后的位置、速度、加速度均方根误差.



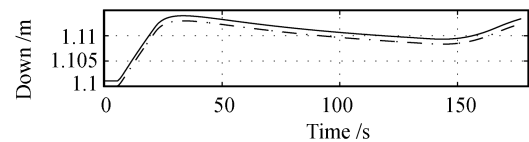
(a) 北向定位均方根误差

(a) Root mean square error of north position



(b) 东向定位均方根误差

(b) Root mean square error of east position



(c) 深度均方根误差

(c) Root mean square error of depth

图3 三维定位均方根误差

Fig.3 Root mean square errors of 3D positioning

由图3可见,由于深度计的校正作用,SAUV导航系统采用经典UKF滤波算法(实线所示)与带模型误差的AUKF滤波算法(点划线所示),在深度误差方面能够保持基本相同水平,即深度定位受海流扰动和航向、姿态误差角的影响很小,其误差大小主要受深度传感器的精度制约.然而在东向和北向定位精度方面,由于带模型误差的AUKF滤波算法(点划线所示)能够有效克服由海流扰动和航向、姿态误差角引起的模型误差,其定位精度优于经典UKF滤波算法(实线所示).

图4和图5说明采用带模型误差的AUKF滤波算法(点划线所示)的SAUV导航系统能够为控制系统提供更为准确的速度和加速度信息,使得SAUV控制系统的控制精度更高.图5中加速度误差的跳变是在SAUV艇体对阶跃加速度信号响应的过渡阶段出现的信号跳变现象.

综上所述,仿真实验结果说明了文中设计的AUKF滤波算法能够有效解决SAUV导航系统存在的模型误差问题.

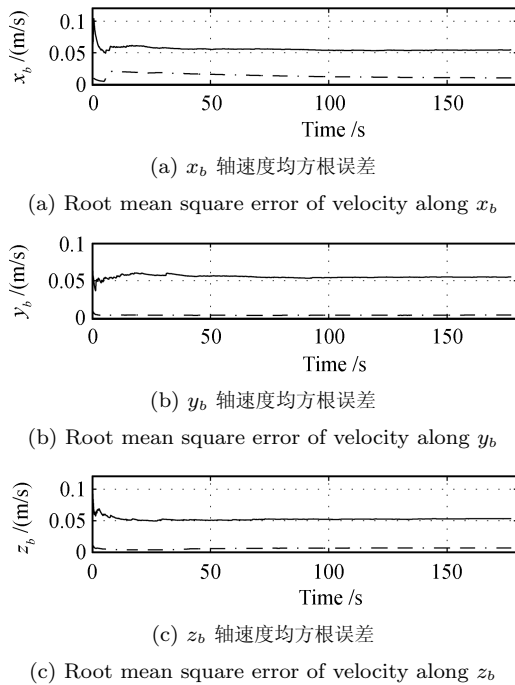


图 4 艇体系下速度均方根误差

Fig. 4 Root mean square errors of velocity in body frame

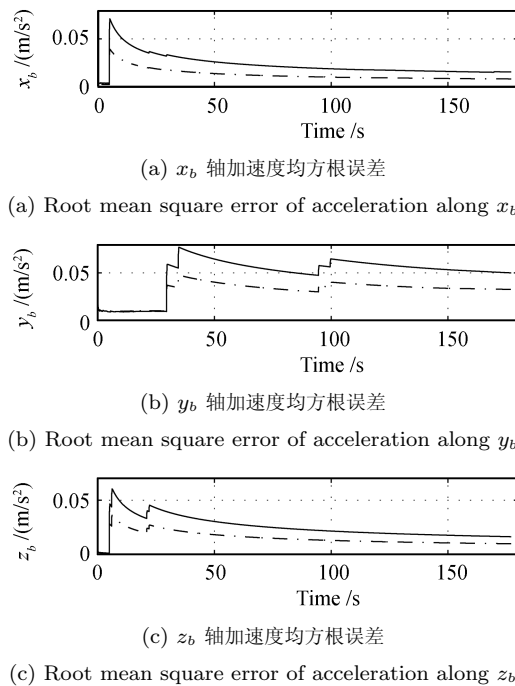


图 5 艇体系下加速度均方根误差

Fig. 5 Root mean square errors of acceleration in body frame

6 结论

虽然经典 UKF 滤波算法精度高于 EKF, 但经典 UKF 算法的设计往往基于精确的非线性系统模型. 在 SAUV 的导航定位中, 由于传感器精度低和

工作环境受海流扰动等海洋环境干扰因素的制约, 满足这个要求无疑是困难的, 而模型误差往往会使经典 UKF 的滤波精度下降, 甚至发散, 导致整个 SAUV 系统瘫痪. 针对上述问题, 基于极大后验估计原理和指数加权, 设计了一种带模型误差的自适应 UKF 滤波算法, 该算法基于虚拟噪声的思想, 在进行滤波计算的同时, 利用次优 MAP 估值器对虚拟噪声的统计量进行实时估计, 解决了 SAUV 导航系统的模型失配问题. 文中设计的 SAUV 导航系统算法具有以下特点: 采用加性白噪声非线性系统滤波模型, 简化了 UKF 滤波算法; 使用虚拟噪声次优 MAP 估值器克服模型误差, 算法复杂度适中; 相比现有算法, 其提供的速度和加速度信息可以被 SAUV 的控制模块直接使用.

References

- 1 Goodman L, Wang Z K. Turbulence observations in the northern bight of Monterey Bay from a small AUV. *Journal of Marine Systems*, 2009, **77**(4): 441–458
- 2 Williams S B, Pizarro O, How M, Mercer D, Powell G, Marshall J, Hanlon R. Surveying nocturnal cuttlefish camouflage behavior using an AUV. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Kobe, Japan: IEEE, 2009. 214–219
- 3 Camilli R, Bingham B S, Jakuba M V, Duryea A N, Leboviev R, Dock M. AUV sensors for real-time detection, localization, characterization, and monitoring of underwater munitions. *Marine Technology Society Journal*, 2009, **43**(4): 76–84
- 4 Vaganay J, Elkins M, Esposito D, O'Halloran W, Hover F, Kokko M. Ship hull inspection with the HAUV: US navy and NATO demonstrations results. In: *Proceedings of OCEANS*. Boston, USA: IEEE, 2006. 1–6
- 5 Desa E, Madhan R, Maurya P, Navelkar G, Mascarenhas A, Prabhudesai S, Afzulpurkar S, Desa E, Pascoal A, Nambiar M. The detection of annual hypoxia in a low latitude freshwater reservoir in Kerala, India, using the small AUV Maya. *Marine Technology Society Journal*, 2009, **43**(3): 60–70
- 6 Gadre A S, Stilwell D J. Toward underwater navigation based on range measurements from a single location. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Washington D. C., USA: IEEE, 2004. 4472–4477
- 7 Loebis D, Sutton R, Chudley J, Naeem W. Adaptive tuning of a Kalman filter via fuzzy logic for an intelligent AUV navigation system. *Control Engineering Practice*, 2004, **12**(12): 1531–1539
- 8 Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(3): 477–482
- 9 Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2004, **92**(3): 401–422
- 10 Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(5): 953–977

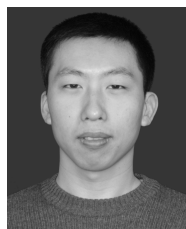
- 11 Lefebvre T, Bruyninckx H, De Schutter J. Comment on “a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1406–1409
- 12 Rudolph V D M. Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models [Ph. D. dissertation], Oregon Health and Science University, USA, 2004
- 13 Tenn D, Singh T. The higher order unscented filter. In: Proceedings of the American Control Conference. Washington D. C., USA: IEEE, 2003. 2441–2446
- 14 Roberts G N, Sutton R. *Advances in Unmanned Marine Vehicles*. London: The Institution of Engineering and Technology, 2006. 127–160
- 15 Gebre-Egziabher D, Hayward R C, Powell J D. Design of multi-sensor attitude determination systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, **40**(2): 627–649
- 16 Gao Z Y, Niu X J, Guo M F. Quaternion-based Kalman filter for micro-machined strapdown attitude heading reference system. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2002, **15**(3): 171–175
- 17 Deng Zi-Li, Wang Jian-Guo. Adaptive extended Kalman filtering for nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 1987, **13**(5): 375–379
(邓自立, 王建国. 非线性系统的自适应推广的 Kalman 滤波. 自动化学报, 1987, **13**(5): 375–379)
- 18 Wang Xiao-Xu, Zhao Lin, Xia Quan-Xi, Hao Yong. Strong tracking filter based on unscented transformation. *Control and Decision*, 2010, **25**(7): 1063–1068
(王小旭, 赵琳, 夏全喜, 郝勇. 基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器. 控制与决策, 2010, **25**(7): 1063–1068)
- 19 Li Ye. Research on Motion Control Technology for Mini Underwater Vehicle [Ph. D. dissertation], Harbin Engineering University, China, 2007
(李晔. 微小型水下机器人运动控制技术研究 [博士学位论文], 哈尔滨工程大学, 中国, 2007)



孙尧 哈尔滨工程大学自动化学院教授. 主要研究方向为信息融合技术、导航自动化、突变控制、精密仪器及机械、智能仪器与系统.

E-mail: suny@ems.dragon.net.cn

(**SUN Yao** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers information fusion, auto navigation, catastrophe control, precision instrument and mechanism, and intelligent instrument and system.)



张强 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为惯性导航和组合导航技术. 本文通信作者.

E-mail: changqiang@126.com

(**ZHANG Qiang** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation and integrated navigation. Corresponding author of this paper.)



万磊 哈尔滨工程大学水下机器人技术国防科技重点实验室研究员. 主要研究方向为水下机器人系统集成、运动控制、导航及动力定位、系统仿真、图像处理和多传感信息融合技术.

E-mail: wanlei@hrbeu.edu.cn

(**WAN Lei** Research fellow at the National Key Laboratory of Science and Technology on Autonomous Underwater Vehicle (AUV), Harbin Engineering University. His research interest covers system integration of autonomous underwater vehicle, motion control, navigation and dynamic positioning, system simulation, image processing, and multi-sensor information fusion technology.)