

# 一类随机混杂系统的鲁棒方差控制

伍友利<sup>1</sup> 方洋旺<sup>1</sup> 王洪强<sup>1</sup> 刘文杰<sup>1</sup>

**摘要** 对一类结构参数不完全已知的 Markov 跳变参数系统, 研究使得闭环系统的稳态状态方差小于某个给定的上界, 同时满足一定  $H_\infty$  性能的状态反馈鲁棒方差控制器设计问题. 运用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 方法, 对系统进行了方差分析, 给出并证明了控制器存在的条件, 进而用一组线性矩阵不等式的可行解给出了控制器的一个参数化表示. 通过建立一个具有 LMI 约束的凸优化问题, 给出了最小方差鲁棒控制器的设计方法. 最后仿真结果表明了该方法的有效性.

**关键词** 方差约束,  $H_\infty$  性能, 容错控制系统, Markov 跳变系统, 乘性噪声

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00337

## Robust Variance-constrained Control of a Class of Stochastic Hybrid Systems

WU You-Li<sup>1</sup> FANG Yang-Wang<sup>1</sup> WANG Hong-Qiang<sup>1</sup>  
LIU Wen-Jie<sup>1</sup>

**Abstract** The design of a state feedback robust variance controller is considered, which guarantees the closed-loop steady-state variance to be less than a given upper bound and concerns some  $H_\infty$  performance for a class of Markov jump systems whose mode is not available completely. Based on linear matrix inequality (LMI) method, system variance is analyzed and the existence conditions of such controllers are proposed and proved. A parameterized representation of a set of desired controllers is characterized in terms of the feasible solutions to the LMI system. The problem of designing the minimum variance robust controller is formulated as a convex problem with LMI constrains. Finally, the simulation results show the effectiveness of the method proposed in this paper.

**Key words** Variance constraint,  $H_\infty$  performance, fault tolerant control systems (FTCS), Markov jump system, multiplicative noise

容错控制系统 (Fault tolerant control systems, FTCS) 的目标是保证系统在发生故障的情形下仍能完成给定任务. 关于 FTCS 的设计问题, 有两类基本的设计方法: 1) 被动容错设计, 将一个或多个元件的故障情形看作模型不确定性, 采用鲁棒控制设计方法, 保证系统具有一定的鲁棒性能, 不重构控制器; 2) 主动容错设计, 根据自动故障检测和识别 (Fault detection and identification, FDI) 结果, 针对具体的故障模式, 实时重构控制器<sup>[1]</sup>. 虽然系统重构与故障的检测和识别是相互联系的, 但故障的检测与识别和控制器的设计通常是分开进行的. 在控制器重构时, 通常假设故障检测和识别过

程具有理想的效果 (无延迟、无虚警、无漏警等). Mariton<sup>[2]</sup> 建立数学模型, 在同一框架下考虑故障检测与识别和控制器的重构问题. Mariton 指出, 即使很小的检测延迟和很低的虚警概率作用于重构闭环控制系统时, 也不能保证系统稳定运行. 因此, 在进行控制器重构设计时, 考虑故障检测和识别固有的不完备性具有重要的意义.

Mariton 所提出的模型属于一类 Markov 跳变线性系统 (Markov jump linear systems, MJLS) 模型. 关于 MJLS 的研究取得了一系列重要的成果, 包括稳定性、均方控制、鲁棒控制、滤波及其在相关领域的重要应用等<sup>[3-5]</sup>. Mariton 提出的模型包括两类随机过程: 一类表示系统元件的故障状态, 另一类表示故障自动检测和识别结果作用于控制器重构的过程. 关于这类容错系统模型的稳定性、参数不确定性、检测错误、检测延迟、执行器饱和控制和  $H_\infty$  性能分析分别由 Aberkane<sup>[6]</sup>, Mahmoud<sup>[7-8]</sup> 和 Shi<sup>[9]</sup> 等进行了研究. Samir 等<sup>[10]</sup> 运用参数依赖 Lyapunov 函数研究了该类系统的稳定性和输出反馈控制问题, 给出了具有更少保守性的均方指数稳定性条件.

另一方面, 在实际工程应用中, 一类控制问题的性能指标常常直观地表现为系统状态稳态方差的上界形式. 以此为背景而形成的约束方差控制问题得到了国内外学者的广泛关注, 取得了一些重要的研究成果<sup>[11-13]</sup>. Wang 等<sup>[14]</sup> 讨论了具有乘性噪声和方差约束的随机系统的鲁棒  $H_\infty$  控制问题, Majura 等<sup>[15]</sup> 研究了模糊系统的最优控制问题. 王子栋等<sup>[16-17]</sup> 研究了不确定容错系统的方差约束控制问题, 进行了方差分析, 并提出了控制器的设计方法, 但其研究的模型只考虑了系统输入可能出现故障的情形. 关于由 MJLS 描述的主动容错系统、具有方差约束的鲁棒控制问题的研究, 目前尚未见到.

本文首先建立了一类具有乘性噪声和参数不确定性的 MJLS 描述的主动容错系统模型. 然后采用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 方法, 对该系统进行方差分析, 并研究了其鲁棒状态反馈控制器的设计问题. 要求控制器同时满足如下三个条件: 1) 闭环系统随机均方稳定; 2) 状态稳态误差具有给定上界约束; 3) 在噪声作用下, 系统满足  $H_\infty$  性能指标. 最后通过建立一个具有 LMI 约束的凸优化问题, 给出最优鲁棒方差控制器的设计方法.

### 1 问题描述

在给定概率空间  $(\Omega, F, P)$  中, 考虑如下具有乘性噪声和参数不确定性的离散动态系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = (A(r_k) + \Delta A_k(r_k) + A_M(r_k)\boldsymbol{\xi}_k)\mathbf{x}_k + \\ \quad B(r_k)\mathbf{u}_k(r_k, \eta_k, \mathbf{x}_k) + G(r_k)\mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = (C(r_k) + \Delta C_k(r_k))\mathbf{x}_k + \\ \quad D(r_k)\mathbf{u}_k(r_k, \eta_k, \mathbf{x}_k) + L(r_k)\mathbf{w}_k \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^p$  为控制输入,  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^r$  为控制输出. 过程噪声  $\mathbf{w}_k$  为零均值高斯白噪声, 其强度为  $R > 0$ . 随机乘性噪声  $\boldsymbol{\xi}_k$  为零均值高斯白噪声, 其强度为 1.  $\{r_k, k \geq 0\}$  表示系统完好或者多个可能出现的故障状态,  $\{\eta_k, k \geq 0\}$  为对系统故障的自动检测和辨识过程<sup>[18]</sup>. 假设  $r_k$  和  $\eta_k$  都是离散时间 Markov 过程<sup>[19]</sup>, 分别在有限集  $\ell = \{1, 2, \dots, \nu\}$  和  $\varphi = \{1, 2, \dots, \mu\}$  中取值. 系统的结构描述依赖于系统的结构状态  $r_k$ , 而系统输入则由控制器根据系统对故障的自动检测和辨识结果  $\eta_k$  给出.

收稿日期 2008-12-10 录用日期 2009-08-05  
Manuscript received December 10, 2008; accepted August 5, 2009  
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA701405), 国家自然科学基金 (60874040), 空军工程大学工程学院优秀博士学位论文创新基金 (BC06004) 资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA701405), National Natural Science Foundation of China (60874040), and the Doctorate Foundation of the Engineering College, Air Force Engineering University (BC06004)

1. 空军工程大学工程学院航空兵器工程系 西安 710038  
1. Department of Aviation Weapon Engineering, Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038

对于故障过程  $r_k$ , 其一步转移概率为

$$\alpha_{il} = \Pr\{r_{k+1} = l | r_k = i\}, \quad i, l \in \ell \quad (2)$$

式中,  $\alpha_{il} \geq 0$ , 且  $\sum_{l=1}^{\nu} \alpha_{il} = 1$ .

$\eta_k$  为故障过程  $r_k$  的条件 Markov 过程, 其一步条件转移概率为

$$q_{il}^j = \Pr\{\eta_{k+1} = l | \eta_k = i, r_k = j\}, \quad i, l \in \wp \quad (3)$$

式中,  $q_{il}^j \geq 0$ , 且  $\sum_{l=1}^{\mu} q_{il}^j = 1$ .

容许不确定参数满足匹配性条件为

$$\begin{bmatrix} \Delta A_k(r_k) & \Delta C_k(r_k) \end{bmatrix} = [H_1(r_k) \ H_2(r_k)] F_k(r_k) M(r_k) \quad (4)$$

式中, 实矩阵  $F_k(r_k)$  表示参数不确定性, 满足

$$F_k^T(r_k) F_k(r_k) \leq I, \quad r_k \in \ell \quad (5)$$

假设对于系统 (1), 反馈控制律具有如下形式:

$$\mathbf{u}_k(r_k, \eta_k, \mathbf{x}_k) = K(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k \quad (6)$$

则系统 (1) 可以写为如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = (\bar{A}(r_k, \eta_k) + A_M(r_k) \boldsymbol{\xi}_k) \mathbf{x}_k + G(r_k) \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \bar{C}(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k + L(r_k) \mathbf{w}_k \end{cases} \quad (7)$$

式中,

$$\bar{A}(r_k, \eta_k) = A(r_k) + B(r_k)K(r_k, \eta_k) + H_1(r_k)F_k(r_k)M(r_k)$$

$$\bar{C}(r_k, \eta_k) = C(r_k) + D(r_k)K(r_k, \eta_k) + H_2(r_k)F_k(r_k)M(r_k)$$

对  $r_k = i \in \ell, \eta_k = j \in \wp$ , 记  $[\cdot](r_k) = [\cdot]_i, [\cdot](r_k, \eta_k) = [\cdot]_{ij}$ .

**注 1.** 本文所采用的模型不仅能够描述系统组件、传感器或执行器发生故障的情形, 还能描述 FDI 出现虚警和检测延迟等情形, 文献 [16–17] 所研究的模型可以看作本文的一种特例, 显然本文所讨论的模型更复杂、更具有一般性.

**定义 1.** 对于每一个  $i \in \ell, j \in \wp$ , 定义系统 (1) 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k(i, j) &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_k(i, j) \mathbf{x}_k(i, j)^T] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_k(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k(r_k, \eta_k)^T | r_k = i, \eta_k = j] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k(r_k, \eta_k) &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_k(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k(r_k, \eta_k)^T] = \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \mathbb{E}[\mathbf{x}_k(i, j) \mathbf{x}_k(i, j)^T | r_k = i, \eta_k = j] \times \\ &= P\{\eta_k = j | r_k = i\} P\{r_k = i\} \end{aligned}$$

记  $\hat{Q}_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{x}_k(i, j) \mathbf{x}_k(i, j)^T] = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Q}_k(i, j)$ . 如果系统 (1) 鲁棒随机稳定, 则系统状态的稳态协方差存在

$$\begin{aligned} \hat{Q}(r_k, \eta_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Q}_k(r_k, \eta_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \hat{Q}_{ij} P\{\eta_k = j | r_k = i\} P\{r_k = i\} \end{aligned}$$

本文的目标是关于系统 (1), 设计形如式 (6) 的状态反馈控制器, 对于所有的容许不确定性, 同时满足如下三个条件:

- 1) 系统 (1) 是鲁棒随机均方稳定的;
- 2) 对于给定标量  $\gamma > 0$ , 初始状态  $\mathbf{x}_0 = 0$  和所有的非零  $\mathbf{w}_k$ , 控制输出  $\mathbf{z}_k$  满足:

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\|\mathbf{z}_k\|^2] \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\|\mathbf{w}_k\|^2] \quad (8)$$

- 3) 对于所有的  $i \in \ell, j \in \wp, s = 1, \dots, n$ , 系统状态稳态方差满足如下约束:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{x}_{k,s}(i, j)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{x}_{k,s}(i, j) \mathbf{x}_{k,s}(i, j)^T] = \\ &= [\hat{Q}_{ij}]_{ss} < \sigma_{ij}^2(s) \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{x}_k(i, j) = [x_{k,1}(i, j) \ \dots \ x_{k,n}(i, j)]^T$ , 给定标量  $\sigma_{ij}^2(s) > 0$  ( $i \in \ell, j \in \wp, s = 1, \dots, n$ ) 为由实际问题所要求的可接受方差上界.

以上问题称为乘性不确定容错系统的鲁棒方差控制问题.

## 2 鲁棒方差 $H_\infty$ 控制

本节讨论不确定性容错系统的多目标 (稳定性、 $H_\infty$  性能和方差约束) 控制问题.

### 2.1 稳定性分析

为了便于问题的求解, 本文将采用线性矩阵不等式描述主要结果. 对一组对称正定矩阵  $\{Q_{ij}, i \in \ell, j \in \wp\}$ , 记

$$\bar{Q}_{ij} = \sum_{h=1}^{\nu} \alpha_{hj} \sum_{l=1}^{\mu} q_{il}^h Q_{lh} = \Omega_{ij} \Psi \Omega_{ij}^T \quad (10)$$

式中

$$\Omega_{ij} = \left[ \sqrt{\alpha_{1i} q_{11}^j} I \ \dots \ \sqrt{\alpha_{1i} q_{1\mu}^j} I \ \dots \ \sqrt{\alpha_{\nu i} q_{11}^j} I \ \dots \ \sqrt{\alpha_{\nu i} q_{1\mu}^j} I \right] \quad (11)$$

$$\Psi = \text{diag}\{Q_{11}, \dots, Q_{\mu 1}, \dots, Q_{1\nu}, \dots, Q_{\mu\nu}\} \quad (12)$$

**定理 1.** 具有乘性噪声和参数不确定性容错系统 (7), 当  $\mathbf{w}_k \equiv 0$  时, 如下命题等价:

- 1) 系统 (7) 是鲁棒随机稳定的;
- 2) 存在一组对称正定矩阵  $\{Q_{ij}, i \in \ell, j \in \wp\}$ , 满足

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & Q_{ij} \bar{A}_{ij}^T \Omega_{ij} & Q_{ij} A_{Mi}^T \Omega_{ij} \\ \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} Q_{ij} & -\Psi & 0 \\ \Omega_{ij}^T A_{Mi} Q_{ij} & 0 & -\Psi \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

式中,  $\Omega_{ij}$  和  $\Psi$  分别由式 (11) 和 (12) 给出.

- 3) 存在一组对称正定矩阵  $\{P_{ij}, i \in \ell, j \in \wp\}$ , 满足

$$\begin{bmatrix} -P_{ij} & \bar{A}_{ij} P_{ij} \Omega_{ij} & A_{Mi} P_{ij} \Omega_{ij} \\ \Omega_{ij}^T P_{ij} \bar{A}_{ij}^T & -\Gamma & 0 \\ \Omega_{ij}^T P_{ij} A_{Mi}^T & 0 & -\Gamma \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

式中,  $\Gamma = \text{diag}\{P_{11}, \dots, P_{\mu 1}, \dots, P_{1\nu}, \dots, P_{\mu\nu}\}$ .

**证明.** 定义状态相关矩阵  $M_k(r_k, \eta_k)$  为

$$M_k(r_k, \eta_k) = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k^T(r_k, \eta_k)]$$

则对  $i \in \ell, j \in \wp, M_k(i, j)$  满足如下方程

$$M_{k+1}(i, j) = \bar{A}_{ij}\bar{M}_k(i, j)\bar{A}_{ij}^T + A_{Mi}\bar{M}_k(i, j)A_{Mi}^T$$

$$M_0(r_0, \eta_0) = E[\mathbf{x}_0(r_0, \eta_0)\mathbf{x}_0(r_0, \eta_0)^T] \quad (15)$$

式中

$$\bar{M}_{k+1}(i, j) = \sum_{h=1}^v \alpha_{hj} \sum_{l=1}^{\mu} q_{il}^j M_k(l, h) = \Omega_{ij}\Psi_m\Omega_{ij}^T \quad (16)$$

其中

$$\Psi_m =$$

$$\text{diag}\{M_k(1, 1), \dots, M_k(\mu, 1), \dots, M_k(1, v), \dots, M_k(\mu, v)\}$$

首先证明 (1)  $\Leftrightarrow$  (2). 令  $Y_{ij} = Q_{ij}^{-1}$ ,  $i \in \ell$ ,  $j \in \wp$ . 将式 (13) 分别左乘和右乘矩阵  $\text{diag}\{Y_{ij}, I, I\}$ , 有

$$\begin{bmatrix} -Y_{ij} & \bar{A}_{ij}^T\Omega_{ij} & A_{Mi}^T\Omega_{ij} \\ \Omega_i^T\bar{A}_{ij} & -\Sigma & 0 \\ \Omega_i^T A_{Mi} & 0 & -\Sigma \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

式中

$$\Sigma = \text{diag}\{Y_{11}^{-1}, \dots, Y_{\mu 1}^{-1}, \dots, Y_{1v}^{-1}, \dots, Y_{\mu v}^{-1}\} \quad (18)$$

应用 Schur 补引理<sup>[19]</sup>, 由式 (17) 可知存在标量, 使得下式成立:

$$\bar{A}_{ij}^T\Omega_{ij}\Sigma^{-1}\Omega_{ij}^T\bar{A}_{ij} + A_{Mi}^T\Omega_{ij}\Sigma^{-1}\Omega_{ij}^T A_{Mi} - Y_{ij} + \delta I < 0 \quad (19)$$

取 Lyapunov 函数为

$$V_k(M_k(r_k, \eta_k), r_k, \eta_k) = M_k(r_k, \eta_k)Y(r_k, \eta_k)$$

则对  $i \in \ell$ ,  $j \in \wp$ , 有

$$V_{k+1}(M_{k+1}(i, j), i, j) =$$

$$(\bar{A}_{ij}\bar{M}_k(i, j)\bar{A}_{ij}^T + A_{Mi}\bar{M}_k(i, j)A_{Mi}^T)Y_{ij} =$$

$$M_k(i, j)(\bar{A}_{ij}\Omega_{ij}\Sigma^{-1}\Omega_{ij}^T\bar{A}_{ij}^T + A_{Mi}\Omega_{ij}\Sigma^{-1}\Omega_{ij}^T A_{Mi}^T) <$$

$$M_k(i, j)Y_{ij} = V_k(M_k(i, j), i, j)$$

从而有式 (20) 成立 (见本页下方).

所以, 有  $0 < \alpha < 1$ .

$$E\{V_{k+1}(M_{k+1}(r_{k+1}), r_{k+1}, \eta_{k+1})|\mathbf{x}_k, r_k, \eta_k\} <$$

$$\alpha V_k(M_k(r_k), r_k, \eta_k)$$

对上式由 0 到  $k$  进行迭代, 有

$$E\{V_k(M_k(r_k), r_k, \eta_k)|\mathbf{x}_0, r_0, \eta_0\} <$$

$$\alpha^k V_0(M_0(r_0), r_0, \eta_0) \quad (21)$$

从而,

$$E\left\{\sum_{k=0}^N V_k(M_k(r_k), r_k, \eta_k)|\mathbf{x}_0, r_0, \eta_0\right\} <$$

$$(1 + \alpha + \dots + \alpha^N)V_0(M_0(r_0), r_0, \eta_0) <$$

$$\frac{1}{1 - \alpha}V_0(M_0(r_0), r_0, \eta_0)$$

由上式, 有

$$E\left\{\sum_{k=0}^N \|\mathbf{x}_k(x_0, r_0, \eta_0)\|^2 | x_0, r_0, \eta_0\right\} <$$

$$\frac{\min_{r_k \in S} \lambda_{\min}(Y(r_k, \eta_k))}{1 - \alpha} V_0(M_0(r_0), r_0, \eta_0)$$

记

$$\tilde{N}(x_0, r_0, \eta_0) = \frac{\min_{r_k \in S} \lambda_{\min}(Y(r_k, \eta_k))}{1 - \alpha} V_0(M_0(r_0), r_0, \eta_0)$$

有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\sum_{k=0}^N \|\mathbf{x}_k(x_0, r_0, \eta_0)\|^2 | \mathbf{x}_0, r_0\right\} \leq \tilde{N}(\mathbf{x}_0, r_0, \eta_0) \quad (22)$$

所以系统 (1) 是随机均方稳定的.

注意到  $A$  与  $A^T$  的谱半径相等, 与文献 [2] 类似即可得到 (2) $\Leftrightarrow$  (3) 的证明.  $\square$

## 2.2 $H_\infty$ 性能

本节针对式 (8) 的定义, 分析不确定容错系统 (1) 的  $H_\infty$  性能.

**定理 2.** 给定标量  $\gamma > 0$ , 称不确定容错系统 (7) 是鲁棒随机稳定的, 且具有  $H_\infty$  衰减度  $\gamma$ , 如果存在一组对称正定矩阵  $\{Q_{ij}, i \in \ell, j \in \wp\}$ , 使得如下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & 0 & Q_{ij}\bar{A}_{ij}^T\Omega_{ij} & Q_{ij}A_{Mi}^T\Omega_{ij} & Q_{ij}\bar{C}_{ij}^T \\ 0 & -\gamma^2 I & G_i^T\Omega_{ij} & 0 & L_i^T \\ \Omega_{ij}^T\bar{A}_{ij}Q_{ij} & \Omega_{ij}^T G_i & -\Psi & 0 & 0 \\ \Omega_{ij}^T A_{Mi}Q_{ij} & 0 & 0 & -\Psi & 0 \\ \bar{C}_{ij}^T Q_{ij} & L_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$< 0 \quad (23)$$

式中,  $\Omega_{ij}$  和  $\Psi$  分别由式 (11) 和 (12) 给出.

**证明.** 令  $P_{ij} = Q_{ij}^{-1}$ ,  $i \in \ell$ ,  $j \in \wp$ . 对式 (23) 左乘和右乘  $\text{diag}\{P_{ij}, I, I, I, I\}$ , 有如下不等式成立:

$$\frac{E\{V_{k+1}(M_{k+1}(r_{k+1}), r_{k+1}, \eta_{k+1})|\mathbf{x}_k, r_k, \eta_k\} - V_k(M_k(r_k), r_k, \eta_k)}{V_k(M_k(r_k), r_k, \eta_k)} =$$

$$\frac{E\{V_{k+1}(M_{k+1}(r_{k+1}), r_{k+1}, \eta_{k+1})|\mathbf{x}_k, r_k, \eta_k\}}{V_k(M_k(r_k), r_k, \eta_k)} - 1 =$$

$$\alpha - 1 < - \min_{r_k \in S} \left( \frac{\lambda_{\min}(\Sigma)}{\lambda_{\min}(Y(r_k, \eta_k))} \right) \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} -P_{ij} & 0 & \bar{A}_{ij}^T \Omega_{ij} & A_{Mi}^T \Omega_{ij} & \bar{C}_{ij}^T \\ 0 & -\gamma^2 I & G_i^T \Omega_{ij} & 0 & L_i^T \\ \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} & \Omega_{ij}^T G_i & -\Gamma & 0 & 0 \\ \Omega_{ij}^T A_{Mi} & 0 & 0 & -\Gamma & 0 \\ \bar{C}_{ij} & L_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

式中,  $\Gamma = \text{diag}\{P_{11}^{-1}, \dots, P_{\mu 1}^{-1}, \dots, P_{1\nu}^{-1}, \dots, P_{\mu\nu}^{-1}\}$ . 由引理 2, 式 (24) 等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} + A_{Mi}^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T A_{Mi} - P_{ij} + \bar{C}_{ij}^T \bar{C}_{ij} \\ G_i^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} + L_i^T \bar{C}_{ij} \\ A_{Ki}^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T G_i + \bar{C}_{ij}^T L_i \\ G_i^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T G_i + L_i^T L_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

与文献 [9] 的证明方法相似, 容易证明当式 (23) 成立时, 对任意的  $w_k \neq 0$ , 有

$$\sum_{k=0}^N E[\|z_k\|^2] \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N E[\|w_k\|^2]$$

成立. □

### 2.3 方差分析

由定义 1, 当系统 (1) 随机均方稳定时, 对于任意的  $i \in \ell, j \in \wp$ , 稳态状态协方差矩阵  $\hat{Q}_{ij}$  满足下式:

$$\bar{A}_{ij} \Omega_{ij} \hat{\Psi} \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij}^T + A_{Mi} \Omega_{ij} \hat{\Psi} \Omega_{ij}^T A_{Mi}^T - \hat{Q}_{ij} + G_i R G_i^T = 0 \quad (25)$$

式中,  $\Omega_{ij}$  由式 (11) 给出,  $\hat{\Psi} = \text{diag}\{\hat{Q}_{11}, \dots, \hat{Q}_{\mu 1}, \dots, \hat{Q}_{1\nu}, \dots, \hat{Q}_{\mu\nu}\}$ .

**定理 3.** 系统 (1) 是鲁棒随机稳定的, 且有  $\hat{Q}_{ij} \leq Q_{ij}$ , 如果存在一组对称正定矩阵  $Q_{ij}, i \in \ell, j \in \wp$ , 使得如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & \bar{A}_{ij} Q_{ij} \Omega_{ij} & A_{Mi} Q_{ij} \Omega_{ij} & G_i Q_{ij} \\ \Omega_{ij}^T Q_{ij} \bar{A}_{ij}^T & -\Psi & 0 & 0 \\ \Omega_{ij}^T Q_{ij} A_{Mi}^T & 0 & -\Psi & 0 \\ Q_{ij} G_i^T & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

式中  $\Omega_{ij}$  和  $\Psi$  分别由式 (11) 和 (12) 给出.

**证明.** 由 Schur 补引理, 式 (26) 等价于

$$\bar{A}_{ij} \Omega_{ij} \Psi \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij}^T + A_{Mi} \Omega_{ij} \Psi \Omega_{ij}^T A_{Mi}^T - Q_{ij} + G_i R G_i^T < 0 \quad (27)$$

显然, 由定理 1, 系统 (1) 是鲁棒随机稳定的.

由式 (27) 减去式 (25), 有

$$\bar{A}_{ij} \Omega_{ij} (\Psi - \hat{\Psi}) \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij}^T + A_{Mi} \Omega_{ij} (\Psi - \hat{\Psi}) \Omega_{ij}^T A_{Mi}^T - (Q_{ij} - \hat{Q}_{ij}) < 0$$

所以有

$$Q_{ij} - \hat{Q}_{ij} \geq 0$$

□

### 2.4 鲁棒状态反馈控制器设计

本节针对具有方差约束和不确定性的离散容错系统, 设计满足条件 1)~3) 的状态反馈鲁棒控制器.

**定理 4.** 给定  $\gamma > 0, \sigma_{ij}^2(s) (i \in \ell, j \in \wp, s = 1, \dots, n)$ , 如果存在一组正定对称矩阵  $Q_{ij}$ , 实矩阵  $Y_{ij}$  和正数  $\varepsilon_{ij}, \varsigma_{ij}$ , 使得矩阵不等式 (28)~(30) 有解, 则存在形如式 (6) 的反馈控制器使得对所有的容许不确定性, 条件 1)~3) 满足, 且控制器增益为:  $K_{ij} = Y_{ij} Q_{ij}^{-1}$ .

在式 (28)~(30) 中,  $[Q_{ij}]_{ss}$  为矩阵  $Q_{ij}$  对角线上的元素, 其中  $\Omega_{ij}$  和  $\Psi$  分别由式 (11) 和 (12) 给出.

**证明.** 考虑不确定性条件 (4) 和 (5), 由引理 1, 引理 2 及定理 1~3, 即可得到本定理的证明. □

**注 2.** 当  $\xi_k \equiv 0$  且无方差约束时, 关于鲁棒控制器的设计方法, 文献 [9] 给出了控制器的代数形式, 而本文利用线性矩阵不等式方法给出了控制器的线性矩阵不等式描述. 文献 [9] 在求解控制器时需要手动调整  $\varepsilon_{ij}$  的值, 需要一定的经验, 并且受到人为因素的影响. 而采用线性矩阵不等式描述时, 可以利用 Matlab LMI 工具箱求解, 将  $Q_{ij}, Y_{ij}$  作为矩阵变量,  $\varepsilon_{ij}$  和  $\varsigma_{ij}$  作为常值变量进行求解. 并且, LMI 方法还可以方便地用来设计具有某些特定性能的控制器的.

**注 3.** 由不等式 (28)~(30) 所描述的线性矩阵不等式, 可由 Matlab LMI 工具箱求解, 注意在求解时, 式 (30) 应采用如下矩阵不等式描述:

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & 0 & (Q_{ij} A_i^T + Y_{ij}^T B_i^T) \Omega_{ij} & Q_{ij} A_{Mi}^T \Omega_{ij} & Q_{ij} C_i^T + Y_{ij}^T D_i^T & Q_{ij} M_i^T \\ 0 & -\gamma^2 I & G_i^T \Omega_{ij} & 0 & L_i^T & 0 \\ \Omega_{ij}^T (A_i Q_{ij} + B_i Y_{ij}) & \Omega_{ij}^T G_i & \varepsilon_{ij} \Omega_{ij}^T H_{1i} H_{1i}^T \Omega_{ij} - \Psi & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{ij}^T A_{Mi} Q_{ij} & 0 & 0 & \varepsilon_{ij} \Omega_{ij}^T H_{2i} H_{2i}^T \Omega_{ij} - \Psi & 0 & 0 \\ C_i Q_{ij} + D_i Y_{ij} & L_i & 0 & 0 & -I & 0 \\ M_i Q_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & (A_i Q_{ij} + B_i Y_{ij}) \Omega_{ij} & A_{Mi} Q_{ij} \Omega_{ij} & G_i Q_{ij} & Q_{ij} M_i^T \\ \Omega_{ij}^T (Q_{ij} A_i^T + Y_{ij}^T B_i^T) & \varsigma_{ij} \Omega_{ij}^T H_{1i} H_{1i}^T \Omega_{ij} - \Psi & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{ij}^T Q_{ij} A_{Mi}^T & 0 & -\Psi & 0 & 0 \\ Q_{ij} G_i^T & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ M_i Q_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\varsigma_{ij} I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$[Q_{ij}]_{ss} < \sigma_{ij}^2(s) \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Q_{ij} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T < \sigma_{ij}^2(1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Q_{ij} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T < \sigma_{ij}^2(2)$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Q_{ij} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T < \sigma_{ij}^2(n)$$

2.5 最小方差鲁棒  $H_\infty$  控制器设计

不等式 (28)~(30) 是关于矩阵变量  $Q_{ij}$ ,  $Y_{ij}$  以及常值变量  $\varepsilon_{ij}$  和  $\varsigma_{ij}$  的线性矩阵不等式, 所有满足式 (28)~(30) 的  $Q_{ij}$ ,  $Y_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  和  $\varsigma_{ij}$  构成一个凸集, 可以应用有关 LMI 的现成软件方便地判断该集是否非空并求得一个特解. 同时, 定理 4 给出了系统 (1) 的所有满足条件 1)~3) 的控制器刻画, 利用这个性质可以设计满足一些特定要求的控制器. 特别地, 使得方差最小的鲁棒方差控制器往往更能符合实际应用的要求. 下面的定理给出了最小方差鲁棒  $H_\infty$  控制器的设计方法.

**定理 5.** 给定  $\gamma > 0$  和一组权系数  $\beta_{ij}(s)$ ,  $i \in \ell, j \in \wp$ , ( $s = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^\mu \sum_{s=1}^n \beta_{ij}(s) = 1$ ), 若以下优化问题

$$\min_{Q_{ij}, Y_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varsigma_{ij}} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^\mu \sum_{s=1}^n \beta_{ij}(s) \sigma_{ij}^2(s) \quad (31)$$

s.t. (27)~(29)

有解, 则  $u_k = Y_{ij} Q_{ij}^{-1} x_k$  是系统的一个最小方差鲁棒  $H_\infty$  控制器.

**注 3.** 容易看出定理 5 中的优化问题是一个凸优化问题, 可以保证达到全局最优解, 并且该问题是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题. 因此可以应用 Matlab 软件的 LMI 工具包中的 mincx 命令求解.

3 仿真实例

对于模型 (1), 考虑如下两模态情形. 其中模态 1 表示系统正常工作状态, 模态 2 表示系统第二个执行器通道故障.

1) 模态 1 ( $r(k) = 1$ ):

$$A(1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_M(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$L(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad M(1) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad H_2(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$F_k(1) = \sin(0.5k)$$

2) 模态 2 ( $r(k) = 2$ ):

$$A(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_M(2) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(2) = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad C(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad M(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$H_1(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T, \quad H_2(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}^T$$

$$F_k(2) = \cos(0.5k), \quad R = 1$$

结构转移概率矩阵为:

$$\nu = 2, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$$

$$\mu = 2, \quad \begin{bmatrix} q_{11}^1 & q_{12}^1 \\ q_{21}^1 & q_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{12}^2 \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

令  $\gamma = 3$ ,  $\sigma_{11}^2(s) = \sigma_{12}^2(s) = \sigma_{21}^2(s) = 1$ ,  $\sigma_{22}^2(s) = 2$ ,  $s = 1, 2, 3$ , 由 Matlab LMI 工具箱求解式 (27)~(29), 得:

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 0.4782 & -0.1156 \\ -0.1156 & 0.8199 \end{bmatrix}$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 0.4979 & -0.1580 \\ -0.1580 & 0.9220 \end{bmatrix}$$

$$Q_{21} = \begin{bmatrix} 0.3280 & -0.0106 \\ -0.0106 & 0.0387 \end{bmatrix}$$

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} 0.7228 & -0.0311 \\ -0.0311 & 0.1215 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} 0.5316 & -0.9265 \\ 0.6849 & -1.7164 \end{bmatrix}$$

$$Y_{12} = \begin{bmatrix} 0.5732 & -1.0869 \\ 0.7717 & -1.9600 \end{bmatrix}$$

$$Y_{21} = \begin{bmatrix} -0.3459 & 0.0040 \\ -0.0030 & -0.0024 \end{bmatrix}$$

$$Y_{22} = \begin{bmatrix} -0.7873 & 0.0072 \\ -0.0078 & -0.0015 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = 5.0817, \quad \varepsilon_{12} = 3.9740, \quad \varepsilon_{21} = 0.1819$$

$$\varepsilon_{22} = 0.5869, \quad \varsigma_{11} = 15.0078, \quad \varsigma_{12} = 17.2734$$

$$\varsigma_{21} = 0.2431, \quad \varsigma_{22} = 0.8195$$

则由定理 4, 反馈控制增益为:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 0.8681 & -1.0076 \\ -0.9560 & -1.9708 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0.8219 & -1.0380 \\ 0.9258 & -1.9672 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -1.0605 & -0.1867 \\ -0.0114 & -0.0643 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 0.4132 & -8.8388 \\ -0.3787 & -16.0328 \end{bmatrix}$$

图 1 为仿真曲线, 图 2 中实线为系统的模式, 虚线为系统结构和检测结果. 由图 1 可以看出本文所设计的控制器使得系统稳态性能满足条件 1)~3).

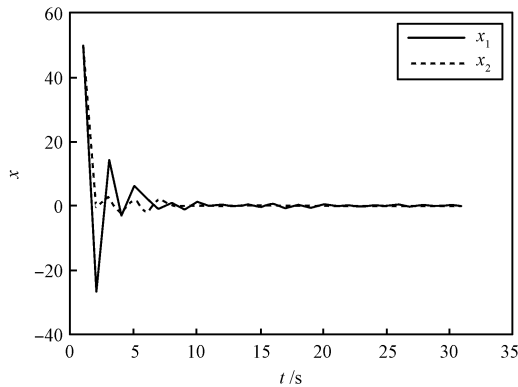


图 1 状态响应曲线

Fig. 1 The state response curves

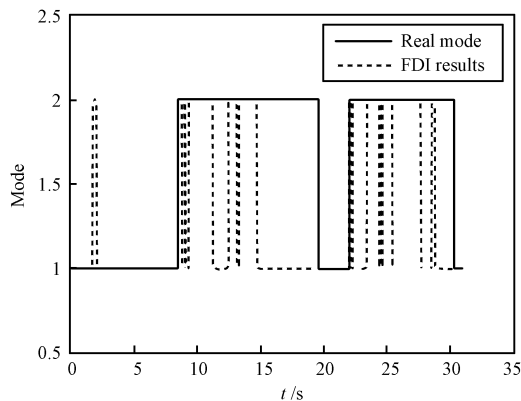


图 2 系统模式及其检测和辨识结果

Fig. 2 The FDI results of mode

#### 4 结论

本文针对采用具有 Markov 跳变参数的离散动态系统建模的不确定容错系统, 利用 LMI 方法, 研究了其鲁棒随机均方稳定的充要条件, 提出并证明了具有方差约束的鲁棒控制器存在条件, 并给出了其鲁棒方差控制器设计方法. 与采用代数方法描述的控制器的设计方法相比, 本文所设计的控制器求解方便, 可以采用 Matlab LMI 工具箱直接求解. 并且利用 LMI 方法给出了系统 (1) 所有满足条件 1)~3) 的控制器刻画. 据此, 通过建立一个由一组线性矩阵不等式约

束的凸优化问题, 本文给出了更能符合工程实际要求的最小方差鲁棒控制器的设计方法.

#### References

- 1 Patton R J, Frank P M, Clark R N. *Fault Diagnosis in Dynamic Systems: Theory and Applications*. London: Prentice Hall, 1989. 69–73
- 2 Mariton M. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. New York: Marcel Dekker, 1990. 91–105
- 3 Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. *Discrete Time Markov Jump Linear Systems*. London: Springer-Verlag, 2005. 135–150
- 4 Mahmoud M S, Shi P. Robust control for Markovian jump linear discrete-time systems with unknown nonlinearities. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, **49**(4): 538–542
- 5 Xu S Y, Chen T W. Robust  $H_\infty$  control for uncertain discrete-time stochastic bilinear systems with Markovian switching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, **15**(5): 201–217
- 6 Aberkane S, Ponsart J C, Sauter D. Output feedback  $H_\infty$  control of a class of stochastic hybrid systems with Wiener process via convex analysis. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2006, **2**(6): 1179–1196
- 7 Mahmoud M, Jiang J, Zhang Y. Stochastic stability analysis of active fault-tolerant control systems in the presence of noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(11): 1810–1815
- 8 Mahmoud M, Jiang J, Zhang Y. *Active Fault Tolerant Control Systems: Stochastic Analysis and Synthesis*. Berlin: Springer, 2003. 138–151
- 9 Shi P, Boukas E K, Nguang S K, Guo X P. Optimal robust disturbance attenuation for discrete-time active fault tolerant control systems with uncertainties. *Optimal Control Applications and Methods*, 2003, **24**(2): 85–101
- 10 Samir A, Jean C P, Mickael R, Dominique S. Output feedback control of a class of stochastic hybrid systems. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1325–1332
- 11 Chung H Y, Chang W J. Covariance control with variance constraints for continuous perturbed stochastic systems. *System and Control Letters*, 1992, **19**(5): 413–417
- 12 Lu J, Skelton R E. Robust variance control for systems with finitesignal-to-noise uncertainty. *Automatica*, 2000, **36**(4): 511–525
- 13 Wang Z D, Ho D W C, Liu X H. Variance-constrained control for uncertain stochastic systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2005, **35**(5): 746–753
- 14 Wang Z D, Yang F W, Ho D W C, Liu X H. Robust variance-constrained  $H_\infty$  control for stochastic systems with multiplicative noises. *Journal of Mathematic Analysis and Applications*, 2007, **328**(1): 487–502
- 15 Majura F S, Emmanuel G C.  $H_2$  optimal reduced order control design using a fuzzy logic methodology with bounds on system variances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2003, **11**(1): 153–156

- 16 Wang Zi-Dong, Guo Zhi. Variance-constrained fault-tolerant control for linear continuous stochastic systems. *Acta Automatica Sinica*, 1996, **22**(4): 501–503  
(王子栋, 郭治. 线性连续随机系统的容错约束方差控制设计. 自动化学报, 1996, **22**(4): 501–503)
- 17 Wang Zi-Dong, Sun Xiang, Sun Jin-Sheng, Wang Zhi-Quan. Robust fault-tolerant control and design for uncertain linear systems. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 1996, **17**(1): 112–115  
(王子栋, 孙翔, 孙金生, 王执铨. 不确定线性系统的鲁棒容错控制设计. 航空学报, 1996, **17**(1): 112–115)
- 18 Wang Y Y, Xie L H, de Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 1992, **19**(2): 139–149
- 19 Yu Li. *Robust Control: A LMI Method*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. 34–36  
(俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2002. 34–36)

**伍友利** 空军工程大学工程学院博士. 主要研究方向为结构随机跳变系统理论、导弹制导与控制. 本文通信作者.

E-mail: wu\_youli@126.com

(**WU You-Li** Ph.D. at the Engineering College, Air Force Engineering University. His research interest covers structure stochastic jumping system, and guidance and control of the missile. Corresponding author of this paper.)

**方洋旺** 空军工程大学工程学院教授. 主要研究方向为导弹制导与控制、随机最优控制理论与应用、非线性控制.

E-mail: fangyangwang2006@yahoo.com

(**FANG Yang-Wang** Ph.D., professor at the Engineering College, Air Force Engineering University. His research interest covers guidance and control of the missile, stochastic optimal control theory and application, and nonlinear control.)

**王洪强** 空军工程大学工程学院博士. 主要研究方向为导弹制导与控制.

E-mail: wanghongqiang@126.com

(**WANG Hong-qiang** Ph.D. at the Engineering College, Air Force Engineering University. His research interest covers guidance and control of the missile.)

**刘文杰** 空军工程大学工程学院硕士. 主要研究方向为导弹制导与控制.

E-mail: liuwenjie@126.com

(**LIU Wen-jie** Master student at the Engineering College, Air Force Engineering University. His research interest covers guidance and control of the missile.)

---