

## 基于偏差补偿递推最小二乘的 Hammerstein-Wiener 模型辨识

李妍<sup>1</sup> 毛志忠<sup>1</sup> 王琰<sup>2</sup> 袁平<sup>1</sup> 贾明兴<sup>1</sup>

**摘要** 许多实际系统可以表示成一种中间为线性动态环节、输入输出端为非线性静态环节的 Hammerstein-Wiener 模型。针对含过程噪声的 Hammerstein-Wiener 模型, 提出一种改进在线两阶段辨识方法。第一步采用偏差补偿递推最小二乘法在线辨识含原系统参数乘积项的参数向量。通过在递推最小二乘法中引入一个修正项, 补偿过程噪声引起的估计偏差。第二步采用基于张量积逼近的奇异值分解法分离出原系统各参数的值。通过引入两个矩阵的张量积逼近加权最小二乘的权系数, 提高参数分离精度。理论分析和计算机仿真验证了本文方法的有效性。

**关键词** Hammerstein-Wiener 系统, 偏差补偿递推最小二乘, 奇异值分解, 参数辨识

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00163

### Identification of Hammerstein-Wiener Models Based on Bias Compensation Recursive Least Squares

LI Yan<sup>1</sup> MAO Zhi-Zhong<sup>1</sup> WANG Yan<sup>2</sup>  
YUAN Ping<sup>1</sup> JIA Ming-Xing<sup>1</sup>

**Abstract** Many actual systems can be represented by the Hammerstein-Wiener model, where a linear dynamic system is surrounded by two static nonlinearities at its input and output. An improved on-line two stage identification algorithm is proposed to identify the Hammerstein-Wiener model with process noise. Firstly, the bias compensation recursive least squares is adopted to identify the parameter vector containing the product of the original system parameters. The estimation bias is compensated by introducing a correction term in the recursive least squares estimate. Secondly, the singular value decomposition method based on the tensor product approach is adopted to separate each parameter value from the original system. The accuracy of parameter separation is improved by introducing the tensor product of two matrixes to approach the weight coefficient of the weighted least squares. Theoretical analysis and computer simulation validate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words** Hammerstein-Wiener systems, bias compensation recursive least squares (BCRLS), singular value decomposition (SVD), parameter identification

非线性动态模型按结构分为: Hammerstein, Wiener, Wiener-Hammerstein 与 Hammerstein-Wiener 四种<sup>[1]</sup>。其中, 对 Hammerstein 模型的研究较为成熟: 文献 [2] 提出了传统迭代法; 文献 [3] 提出了动态分离辨识方法; 文献 [4]

收稿日期 2008-10-17 录用日期 2009-05-06

Manuscript October 17, 2008; accepted May 6, 2009

国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA041401, 2007AA04Z194) 资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA041401, 2007AA04Z194)

1. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004 2. 辽阳市发展和改革委员会 辽阳 111000

1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004 2. Liaoyang Municipal Development and Reform Commission, Liaoyang 111000

首先将非线性静态部分和线性动态部分分别用非线性基和 Laguerre 级数表示, 然后用过参数化法辨识两部分参数; 文献 [5] 针对有色噪声干扰非线性 ARMAX 模型, 提出了新型的最小二乘迭代辨识方法和递推辨识方法; 以此模型为基础, 文献 [6] 提出了新颖的梯度迭代辨识方法和随机梯度递推辨识方法; 文献 [7] 将辅助模型思想<sup>[8-9]</sup> 用于 Hammerstein 输出误差模型的辨识, 提出了相应的辅助模型辨识方法。

目前, 对 Hammerstein-Wiener 模型的辨识研究相对较少. 文献 [10] 给出了两阶段辨识方法, 首先采用递推最小二乘 (Recursive least squares, RLS) 辨识原系统参数的乘积, 然后用奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 分离出线性和非线性部分的参数值. 文献 [11] 提出了增广随机梯度辨识方法, 并给出了平均方法和 SVD 两种参数分离方法. 在这类重新参数化 Hammerstein-Wiener 模型 (也包括 Hammerstein 模型) 中, 获得参数估计包含了原系统参数的乘积项<sup>[5, 7, 10-11]</sup>. 最近文献 [12] 将参数分离方法归纳为三种, 比较可知 SVD 的收敛效果最好. 这类重新参数化 Hammerstein-Wiener 模型方法可得全局最优的参数估计值, 且仅需假设输入持续激励. 但在辨识的第一阶段, 若系统中存在过程噪声, 辨识得到的含原系统参数乘积项的参数向量会有偏差; 在第二阶段 SVD 时, 只有参数乘积矩阵秩为 1, 才能保证无误差地分离出原系统参数<sup>[4]</sup>. 以上文献并未考虑过程噪声对辨识结果的影响, 而文献 [13] 针对含过程噪声的 Hammerstein-Wiener 模型, 采用松弛迭代法辨识 Hammerstein-Wiener 模型参数, 但要求迭代第一步必须接近真实值, 否则陷入局部收敛, 得不到全局最优的参数值, 且计算量大, 只适用于离线辨识.

鉴于上述研究存在的不足, 本文针对含过程噪声的 Hammerstein-Wiener 模型, 提出一种改进两阶段在线辨识方法. 第一步用偏差补偿递推最小二乘 (Bias compensation recursive least squares, BCRLS) 算法<sup>[11-16]</sup> 在线辨识原系统参数乘积; 第二步用基于张量积逼近的 SVD 方法分离出原系统参数值. BCRLS 方法不仅可以补偿过程噪声产生的偏差, 且计算量较小, 适合在线计算; 基于张量积逼近的 SVD 可以无误差地分离出原系统参数. 理论分析及仿真表明, 在不增加新假设条件的情况下, 本文方法可得到系统参数的无偏估计.

### 1 系统描述

含过程噪声的 Hammerstein-Wiener 模型如图 1 所示. 其中,  $\xi(t)$  不同于输出测量噪声, 它对输出  $y(t)$  的影响与输出非线性  $N_2(w_1)$  的增益有关: 当增益大时, 输出干扰大; 当增益小时, 输出干扰小. 这种过程噪声更符合实际情况<sup>[13]</sup>.

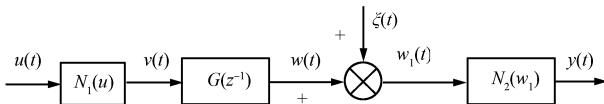


图 1 Hammerstein-Wiener 模型  
Fig. 1 Hammerstein-Wiener model

$N_1(u)$  代表执行机构非线性, 可用已知输入非线性基函数  $f_k[u]$  的线性组合来描述:

$$v = N_1(u) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k f_k[u] \quad (1)$$

其中,  $u$  为持续激励,  $c_k$  为未知系数.

考虑噪声影响时, 线性动态子系统的方程表达式为

$$w_1(t) = \sum_{p=1}^{n_p} a_p w_1(t-p) + \sum_{q=1}^{n_q} b_q v(t-q) + \xi(t) - \sum_{p=1}^{n_p} a_p \xi(t-p) \quad (2)$$

其中,  $a_p$  和  $b_q$  为未知系数,  $n_p$  和  $n_q$  为分母和分子的阶次.

输出过程非线性  $y = N_2(w_1)$  具有一一映射关系, 其逆函数  $w_1 = N_2^{-1}(y)$  用已知输出逆非线性基函数  $g_l[y]$  逼近:

$$w_1 = N_2^{-1}(y) = \sum_{l=0}^{L-1} d_l g_l[y] \quad (3)$$

其中,  $d_l$  为未知系数.

由于  $\xi(t)$  是均值为零、方差  $\sigma^2$  的白噪声, 定义  $\xi(t) = k_\xi e(t)$ . 为补偿  $\xi(t)$  引起的偏差, 使同一时刻  $g_l[y(t)]$  和  $e(t)$  有相同的系数, 即  $k_\xi = \sum_{l=1}^{L-1} d_l$ , 则不同时刻白噪声  $\xi(t)$  为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \sum_{l=1}^{L-1} d_l e(t) \\ \xi(t-p) &= \sum_{l=1}^{L-1} d_l e(t-p), \quad p = 1, \dots, n_p \end{aligned} \quad (4)$$

由式 (1)~(4) 整理出被控系统的双线性形式:

$$g_0[y(t)] = \gamma_0^T(t) \beta_0 + \alpha_1^T A_1(t) \beta_1 + \alpha_2^T A_2(t) \beta_2 + \gamma_{0e}^T(t) \beta_0 + \alpha_1^T A_{1e}(t) \beta_0 \quad (5)$$

其中,  $\beta_0$ ,  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  为与输出对应的参数向量;  $\gamma_0$  和  $A_1(t)$  为输出信息;  $\gamma_{0e}$  和  $A_{1e}(t)$  为噪声信息;  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  为与输入对应的参数向量;  $A_2(t)$  为输入信息. 具体形式如下:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= [d_1, \dots, d_{L-1}]^T \\ \alpha_1 &= [a_1, \dots, a_{n_p}]^T, \quad \beta_1 = [\beta_0^T, d_0]^T \\ \gamma_0(t) &= [-g_1[y(t)], \dots, -g_{L-1}[y(t)]]^T \\ A_1(t) &= \begin{bmatrix} g_1[y(t-1)] & \dots & g_{L-1}[y(t-1)] & g_0[y(t-1)] \\ g_1[y(t-2)] & \dots & g_{L-1}[y(t-2)] & g_0[y(t-2)] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1[y(t-n_p)] & \dots & g_{L-1}[y(t-n_p)] & g_0[y(t-n_p)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\gamma_{0e}(t) = [e(t), \dots, e(t)]^T, \quad \gamma_{0e}(t) \in \mathbf{R}^{L-1}$$

$$A_{1e}(t) = \begin{bmatrix} -e(t-1) & \dots & -e(t-1) \\ -e(t-2) & \dots & -e(t-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -e(t-n_p) & \dots & -e(t-n_p) \end{bmatrix}$$

$$A_{1e}(t) \in \mathbf{R}^{n_p \times (L-1)}$$

$$\alpha_2 = [b_1, \dots, b_{n_q}]^T, \quad \beta_2 = [c_0, \dots, c_{K-1}]^T$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} f_0[u(t-1)] & \dots & f_{K-1}[u(t-1)] \\ f_0[u(t-2)] & \dots & f_{K-1}[u(t-2)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0[u(t-n_q)] & \dots & f_{K-1}[u(t-n_q)] \end{bmatrix}$$

将式 (5) 中每一个双线性项写成未知参数乘积向量与已知数据向量相乘的形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_s^T A_s(t) \boldsymbol{\beta}_s &= \text{vec}(\boldsymbol{\alpha}_s \boldsymbol{\beta}_s^T)^T \text{vec}(A_s(t)), \quad s = 1, 2 \\ \boldsymbol{\alpha}_1^T A_{1e}(t) \boldsymbol{\beta}_0 &= \text{vec}(\boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\beta}_0^T)^T \text{vec}(A_{1e}(t)) \\ \boldsymbol{\theta}_s &= \boldsymbol{\beta}_s \otimes \boldsymbol{\alpha}_s = \text{vec}(\boldsymbol{\alpha}_s \boldsymbol{\beta}_s^T), \quad s = 1, 2 \\ \boldsymbol{\varphi}_s(t) &= \text{vec}(A_s(t)), \quad s = 1, 2 \\ \boldsymbol{\varphi}_{1e}(t) &= \text{vec}(A_{1e}(t))\end{aligned}$$

其中, 矩阵重列算子  $\text{vec}(\cdot)$  表示将括号内矩阵后列依次排列在前列下面重构成一个向量;  $\otimes$  表示向量求张量积;  $\boldsymbol{\varphi}_{1e}(t)$  按时间序列可分成  $L-1$  块, 每块  $n_p$  维, 而  $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$  按时间序列可分成  $L$  块, 每块  $n_p$  维, 即  $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$  与  $[\boldsymbol{\varphi}_{1e}(t); \mathbf{0}]$  一一对应。

综上, 被控系统可转化为式 (6) 的形式

$$g_0[y(t)] = \boldsymbol{\varphi}^T(t) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varphi}_e^T(t) \boldsymbol{\theta} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &= [\boldsymbol{\beta}_0^T, \boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T]^T = [d_1, \dots, d_{L-1}, a_1 d_1, \dots, \\ & a_{n_p} d_1, \dots, a_1 d_{L-1}, \dots, a_{n_p} d_{L-1}, a_1 d_0, \dots, a_{n_p} d_0, \\ & b_1 c_0, \dots, b_{n_q} c_0, \dots, b_1 c_{K-1}, \dots, b_{n_q} c_{K-1}]^T\end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t) &= [\boldsymbol{\gamma}_0^T, \boldsymbol{\varphi}_1^T, \boldsymbol{\varphi}_2^T]^T = [-g_1[y(t)], \dots, \\ & -g_{L-1}[y(t)], g_1[y(t-1)], \dots, g_1[y(t-n_p)], \dots, \\ & g_{L-1}[y(t-1)], \dots, g_{L-1}[y(t-n_p)], g_0[y(t-1)], \dots, \\ & g_0[y(t-n_p)], f_0[u(t-1)], \dots, f_0[u(t-n_q)], \dots, \\ & f_{K-1}[u(t-1)], \dots, f_{K-1}[u(t-n_q)]]^T\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_e(t) &= [\boldsymbol{\gamma}_0^T, \boldsymbol{\varphi}_{1e}^T, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T = [e(t), \dots, e(t), \\ & -e(t-1), \dots, -e(t-n_p), \dots, -e(t-1), \dots, \\ & -e(t-n_p), 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0]^T\end{aligned} \quad (9)$$

## 2 参数辨识

### 2.1 基于 BCRLS 的参数乘积辨识

由于 Hammerstein-Wiener 系统含有过程噪声, 因此本文采用 BCRLS 算法辨识原系统参数的乘积, 这样不但可以得到包含原系统参数乘积向量的无偏估计, 而且无需假设输入信号平稳和各态遍历, 更适合实际系统的应用。

原系统参数乘积向量的估计误差准则函数为

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [g_0[y(i)] - \boldsymbol{\varphi}(i)^T \boldsymbol{\theta}]^2 = \\ & (\boldsymbol{\theta} - R^{-1}(t) \boldsymbol{\rho}(t))^T R(t) (\boldsymbol{\theta} - R^{-1}(t) \boldsymbol{\rho}(t)) + \\ & \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [g_0[y(i)]]^2 - \boldsymbol{\rho}^T(t) R^{-1}(t) \boldsymbol{\rho}(t)\end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i) g_0[y(i)]$ ,  $R(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}(i)^T$ . 原系统参数乘积向量的最小二乘估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) = \left[ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}^T(i) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i) g_0[y(i)] \right] \quad (11)$$

由于白噪声  $e(t)$  均值为零, 方差为  $\sigma^2$  且与输入无关, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}^T(i) \boldsymbol{\theta} = -\sigma^2 \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\theta} \quad (12)$$

其中,  $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $I \in \mathbf{R}^{(L-1+L n_p - n_p) \times (L-1+L n_p - n_p)}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbf{R}^{(L-1+L n_p + K n_q) \times (L-1+L n_p + K n_q)}$ .

$u(t)$  为持续激励, 则  $R_{\boldsymbol{\varphi}}(t) = t R(t) = \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}(i)^T$  为正定阵. 由式 (6)、(11) 和 (12), 得  $\boldsymbol{\theta}$  渐近无偏估计的递推关系:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) + \hat{\sigma}^2(t) t P(t) \boldsymbol{\Lambda} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \quad (13)$$

其中,  $P(t) = R_{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(t)$ ,  $\hat{\sigma}^2(t)$  为未知扰动方差  $\sigma^2$  的估计值.

利用残差平方和求方差估计值  $\hat{\sigma}^2(t)$ , 先定义残差  $\varepsilon_{LS}(i) = g_0[y(i)] - \boldsymbol{\varphi}^T(i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t)$ , 由式 (11), 得

$$\sum_{i=1}^t \varepsilon_{LS}(i) \boldsymbol{\varphi}^T(i) = 0 \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (10) 后取极限, 并由式 (14) 得方差估计值为

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{J(t)}{\hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1) \boldsymbol{\Lambda} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t)} \quad (15)$$

原系统参数乘积向量的递推最小二乘估计为

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t) \boldsymbol{\varphi}^T(t) P(t-1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t) P(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t-1) + \\ & \frac{P(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t) [g_0[y(t)] - \boldsymbol{\varphi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t-1)]}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t) P(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t)}\end{aligned} \quad (17)$$

由式 (17), 推出准则函数的递推关系为

$$J(t) = \frac{t-1}{t} J(t-1) + \frac{[g_0[y(t)] - \boldsymbol{\varphi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(t-1)]^2}{t [1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t) P(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t)]} \quad (18)$$

综上, 归纳出 BCRLS 的具体计算步骤如下:

**步骤 1.** 采集数据  $\{u(t), y(t)\}$ , 并计算  $f_k[u]$  和  $g_l[y]$  的值;

**步骤 2.** 取初值  $p_0 = 10^6$ ,  $P(0) = p_0 I_{L-1+L n_p + K n_q}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}(0) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{0}_{(L-1+L n_p + K n_q) \times 1}$ ,  $J(0) = 0$ ;

**步骤 3.** 由式 (10) 计算  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  的值;

**步骤 4.** 依次计算式 (16)~(18) 的值;

**步骤 5.** 由式 (15) 计算方差的估计  $\hat{\sigma}^2(t)$ , 最终由式 (13) 计算出原系统参数乘积向量的无偏估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ ;

**步骤 6.**  $t = t + 1$ , 返回步骤 3.

随着递推的进行, 偏差补偿后  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  逐渐收敛于真值.

### 2.2 基于张量积逼近的参数分离

参数  $\boldsymbol{\beta}_0$  和  $\boldsymbol{\alpha}_1$  的值, 既可由 BCRLS 算法直接得到, 也可用参数分离求得. 而参数  $\boldsymbol{\beta}_2$  和  $\boldsymbol{\alpha}_2$  的值则必须用参数分离求解. 文献 [5, 7, 10-11] 针对式 (19) 和 (20) 所示的包含原系统参数乘积矩阵  $\Theta_{da}$  和  $\Theta_{cb}$  奇异值分解, 分离出参数  $\boldsymbol{\beta}_s$  和  $\boldsymbol{\alpha}_s$  ( $s = 1, 2$ ) 的值, 因为包含原系统参数乘积项的矩阵  $\Theta_{da}$  和  $\Theta_{cb}$  秩不为 1, 而且 SVD 时, 只取最大特征值  $\kappa_1$  和  $\sigma_1$ , 省略其他特征值, 所以这些被省略的特征值会使参数分离结果产生误差. 本文引入两个矩阵的张量积逼近加权最小二乘的分块权系数, 得到秩为 1 的新参数乘积矩阵  $\Gamma_s$  ( $s = 1, 2$ ). 这样再对  $\Gamma_s$  进行 SVD 时, 不存在参数乘积矩阵其他特征值产生的影响, 提高了参数分离精度.

包含原系统参数乘积项的参数矩阵为

$$\Theta_{da} = \begin{bmatrix} a_1 d_1 & a_2 d_1 & \cdots & a_{n_p} d_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 d_{L-1} & a_2 d_{L-1} & \cdots & a_{n_p} d_{L-1} \\ a_1 d_0 & a_2 d_0 & \cdots & a_{n_p} d_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Theta_{cb} = \begin{bmatrix} b_1 c_0 & b_2 c_0 & \cdots & b_{n_q} c_0 \\ b_1 c_1 & b_2 c_1 & \cdots & b_{n_q} c_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 c_{K-1} & b_2 c_{K-1} & \cdots & b_{n_q} c_{K-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

对式 (19) 和 (20) 奇异值分解, 得

$$\Theta_{da} = \beta_1 \alpha_1^T = \sum_{i=1}^{\min(L, n_p)} \kappa_i \eta_i \mathbf{v}_i^T \quad (21)$$

$$\Theta_{cb} = \beta_2 \alpha_2^T = \sum_{i=1}^{\min(K, n_q)} \sigma_i \delta_i \zeta_i^T \quad (22)$$

由式 (21) 和 (22), 原系统参数为

$$\hat{\beta}_1 = \text{sgn}(\kappa_1) \kappa_1 \eta_1, \quad \hat{\alpha}_1 = \text{sgn}(\kappa_1) \mathbf{v}_1 \quad (23)$$

$$\hat{\beta}_2 = \text{sgn}(\sigma_1) \sigma_1 \delta_1, \quad \hat{\alpha}_2 = \text{sgn}(\sigma_1) \zeta_1 \quad (24)$$

其中,  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数,  $\kappa_1$  和  $\sigma_1$  分别为原参数乘积矩阵  $\Theta_{da} \in \mathbf{R}^{L \times n_p}$  和  $\Theta_{cb} \in \mathbf{R}^{K \times n_q}$  的最大特征值,  $\eta_1, \mathbf{v}_1$  和  $\delta_1, \zeta_1$  分别为  $\kappa_1$  和  $\sigma_1$  对应的特征向量。

由于原参数乘积矩阵  $\Theta_{da}$  和  $\Theta_{cb}$  的秩不为 1, 而 SVD 只取最大的特征值  $\kappa_1$  和  $\sigma_1$ , 这样求得的原系统参数存在较大偏差, 即式 (23) 和 (24) 实际上是一种近似相等关系。

为了分离出更高精度的  $\beta_2$  和  $\alpha_2$  值, 需要考虑优化目标 (10) 的结构, 得到其第一项的加权非线性最小二乘问题:

$$\tilde{J} = \beta_0^T R_0 \beta_0 + \sum_{s=1}^2 (\alpha_s \otimes \beta_s - \hat{\theta}_s)^T R_s (\alpha_s \otimes \beta_s - \hat{\theta}_s) \quad (25)$$

其中,  $R_s$  为  $R$  的块对角线矩阵, 可由数据矩阵  $R$  求出。

分块权系数矩阵  $R_s$  用两个矩阵的张量积逼近, 即  $R_s \approx C_s \otimes D_s, s = 1, 2$ . 矩阵  $C_s$  和  $D_s$  的求法如下<sup>[17]</sup>:

已知  $R_s \in \mathbf{R}^{M_s N_s \times M_s N_s}, C_s \in \mathbf{R}^{M_s \times M_s}, D_s \in \mathbf{R}^{N_s \times N_s}$ . 当  $s = 1$  时,  $M_1 = n_p, N_1 = L$ ; 当  $s = 2$  时,  $M_2 = n_q, N_2 = K$ . 设  $[\chi_k]_s$  为矩阵  $R_s$  的第  $k$  列,  $[\tau_k]_s$  和  $[\mu_k]_s$  分别为矩阵  $C_s$  和  $D_s$  的第  $k$  列, 则  $[\tau_k]_s$  和  $[\mu_k]_s$  的值可通过最小化下面的误差向量求得:

$$\min_{\tau_m, \mu_n} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{n=1}^{N_s} \|[\chi_{(m-1)N_s+n}]_s - [\tau_m]_s \otimes [\mu_n]_s\|^2 \quad (26)$$

与式 (26) 后项对应的矩阵形式为

$$\text{vec}_{N_s, M_s}^{-1}([\tau_m]_s \otimes [\mu_n]_s) = [\mu_n]_s [\tau_m]_s^T, \quad s = 1, 2 \quad (27)$$

定义与式 (26) 前项对应的矩阵关系为

$$[G_{n,m}]_s = \text{vec}_{N_s, M_s}^{-1}([\chi_{(m-1)N_s+n}]_s), \quad s = 1, 2 \quad (28)$$

其中,  $\text{vec}_{N_s, M_s}^{-1}[\cdot]$  为向量重新排列算子, 表示将括号内的向量以每列长度为  $N_s$  的方式, 重构成  $N_s \times M_s$  维矩阵。

由式 (27) 和 (28), 最小化式 (26) 等价于最小化式 (29):

$$\min_{\tau, \mu} \| [G]_s - [\mu]_s [\tau]_s^T \|^2_F, \quad s = 1, 2 \quad (29)$$

将矩阵  $[G]_s \in \mathbf{R}^{N_s \times M_s}$  奇异值分解, 得

$$[\tau]_s = [[\tau_1]_s, \dots, [\tau_{M_s}]_s]^T \quad (30)$$

$$[\mu]_s = [[\mu_1]_s, \dots, [\mu_{N_s}]_s]^T, \quad s = 1, 2 \quad (31)$$

向量  $[\tau]_s$  和  $[\mu]_s$  重组, 得到矩阵  $C_s$  和  $D_s$  的值。

用求得的  $C_s \otimes D_s$  逼近  $R_s$ , 可将式 (25) 描述的加权非线性最小二乘转化为无权值普通最小二乘问题:

$$\tilde{J}_s = \| C_s^{1/2} \alpha_s \otimes D_s^{1/2} \beta_s - (C_s^{1/2} \otimes D_s^{1/2}) \hat{\theta}_s \|^2 \quad (32)$$

其中,  $C_s^{1/2}$  和  $D_s^{1/2}$  分别为  $C_s$  和  $D_s$  的哈密顿平方根. 定义与式 (32) 前项对应的新参数为

$$\bar{\alpha}_s = C_s^{1/2} \alpha_s, \quad \bar{\beta}_s = D_s^{1/2} \beta_s, \quad s = 1, 2 \quad (33)$$

定义与式 (32) 后项对应的新参数乘积矩阵为

$$\Gamma_s = \text{vec}_{N_s \times M_s}^{-1}[(C_s^{1/2} \otimes D_s^{1/2}) \hat{\theta}_s], \quad s = 1, 2 \quad (34)$$

由式 (32) 和 (34), 并对秩为 1 的矩阵  $\Gamma_s$  进行 SVD, 得

$$\hat{\beta}_s \hat{\alpha}_s^T = \Gamma_s = \sum_{i=1}^{\min(M_s, N_s)} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = s_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T \quad (35)$$

其中,  $s_1$  为最大特征值,  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{v}_1$  为其对应的特征向量。

由式 (35) 可以看出, 对新参数乘积矩阵  $\Gamma_s$  进行奇异值分解可实现无误差地分离出新参数  $\bar{\alpha}_s$  和  $\bar{\beta}_s$  的值。

由先验知识求  $\|\alpha_s\|$ , 并由式 (33) 得到原系统参数估计

$$\hat{\alpha}_s = \frac{C_s^{-1/2} \mathbf{v}_1 \|\alpha_s\|}{\|C_s^{-1/2} \mathbf{v}_1\|} \text{sgn}(s_1)$$

$$\hat{\beta}_s = D_s^{-1/2} \mathbf{u}_1 s_1 \frac{\|C_s^{-1/2} \mathbf{v}_1\|}{\|\alpha_s\|} \text{sgn}(s_1), \quad s = 1, 2 \quad (36)$$

### 3 仿真

为了验证本文方法的有效性, 以某厂炼钢电弧炉电极调节系统为例, 对其参数辨识问题进行仿真研究. 电弧炉电极调节系统由液压部分和电弧部分组成. 其中, 液压部分可以用死区非线性和三阶线性环节串联构成; 电弧部分是一个非线性环节<sup>[18]</sup>. 电弧炉电极调节系统通过调节电极位置 (电弧长度) 来改变电弧电流的大小. 在电弧炉冶炼过程中, 由于钢液面波动和电磁力作用, 电弧弧长存在随机扰动, 通常把这种扰动看成是过程白噪声. 可将电弧炉电极调节系统看成带过程噪声的 Hammerstein-Wiener 型结构, 如图 2 所示。

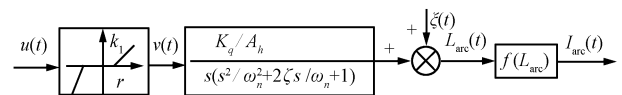


图 2 电弧炉电极调节系统

Fig. 2 An electrode regulating system of electric arc furnace

图 2 中, 死区函数用已知的 S 型函数逼近, 并写成两个已知基函数的线性组合为

$$\hat{v} = c_0 \frac{(u - r_0)}{1 + e^{-(u - r_0)}} \text{sgn}(u - r_0) + c_1 \frac{(u - r_1)}{1 + e^{-(u - r_1)}} \text{sgn}(u - r_1)$$

由上式, 式 (1) 中  $K = 2$ , 死区变化范围为  $[r_0, r_1]$ .

液压环节输入是比例阀的控制电压, 输出是活塞的位置, 通常可视为一个积分加二阶振荡环节:

$$G(s) = \frac{\frac{K_q}{A_h}}{s \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} \right) + 1} = \frac{65}{s(s^2 + 7s + 340)}$$

设采样周期为  $T_s = 0.01$  s, 其离散形式为

$$G(z^{-1}) = \frac{(1.063z^{-1} + 4.171z^{-2} + 1.026z^{-3}) \times 10^{-5}}{1 - 2.899z^{-1} + 2.832z^{-2} - 0.932z^{-3}}$$

由上式, 式 (2) 中线性动态环节的参数个数为  $n_p = 3$ ,  $n_q = 3$ .

一定电压档位下, 电弧电流与弧长近似成反比, 其逆函数用两个已知非线性基函数的线性组合逼近:

$$\hat{L}_{arc} = d_0 I_{arc}^{-h_0} + d_1 I_{arc}^{-h_1}$$

由上式, 式 (3) 中  $L = 2$ , 弧流幂指数变化范围为  $[-h_0, -h_1]$ .

设比例阀的控制电压  $u$  为  $-10$  V  $\sim$   $10$  V, 迭代 40 次后, 由 BCRLS 算法推算出包含原系统参数乘积项的参数向量为

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_0^T \\ \hat{\theta}_1^T \\ \hat{\theta}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 a_1 \\ d_1 a_2 \\ d_1 a_3 \\ d_0 a_1 \\ d_0 a_2 \\ d_0 a_3 \\ c_0 b_1 \\ c_0 b_2 \\ c_0 b_3 \\ c_1 b_1 \\ c_1 b_2 \\ c_1 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9936 \\ 2.9019 \\ -2.8378 \\ 0.936 \\ 2.8726 \\ -2.7925 \\ 0.9133 \\ 9.8862 \times 10^{-6} \\ 3.8268 \times 10^{-5} \\ 9.1491 \times 10^{-6} \\ 9.6543 \times 10^{-6} \\ 3.8456 \times 10^{-5} \\ 9.8156 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

用基于张量积逼近的参数分离方法, 得到线性部分参数值和两个非线性函数曲线.

设线性部分参数向量为  $\bar{\theta} = [\alpha_1^T, \alpha_2^T]^T$ , 那么参数归一化后, 线性参数估计误差为  $\delta = \|\hat{\theta} - \bar{\theta}\| / \|\bar{\theta}\|$ . 比较传统两阶段方法和本文方法辨识的线性环节参数, 如表 1 所示.

由表 1 可知, 对含有过程噪声的 Hammerstein-Wiener 系统, 本文方法的参数估计精度比较高.

采用本文方法和文献 [12] 的传统两阶段方法辨识非线性函数曲线, 迭代 40 次后, 死区如图 3 所示, 电弧如图 4 所示.

对于图 3 所示的死区非线性, 利用公式  $|v - \hat{v}|/|v|$  计算死区输出的相对误差, 本文方法的辨识误差为 0.023, 传统方法的辨识误差为 0.213; 对于图 4 所示的电弧非线性, 利用公式  $|I_{arc} - \hat{I}_{arc}|/|I_{arc}|$  计算电弧电流的相对误差, 本文方法的辨识误差为 0.087, 传统方法的辨识误差为 0.154. 经比较可以看出, 本文方法辨识出的非线性函数能更好地逼近实际非线性函数, 改进两阶段辨识方法是有效的.

### 4 结论

本文提出了改进两阶段方法在线辨识含有过程噪声的 Hammerstein-Wiener 模型. 第一步采用 BCRLS 方法在线辨识原系统参数乘积, 得到包含原系统参数乘积向量的一致渐近无偏估计; 第二步先用两个矩阵的张量积逼近加权最小二乘系数, 再用 SVD 分离出原系统各参数的值. 与传统两

表 1 两种不同方法的参数估计比较  
Table 1 Comparison of parameter estimations with two different methods

$t$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\delta$ (%)
RLS 估计							
15	3.18	-2.57	0.72	$0.91 \times 10^{-5}$	$4.24 \times 10^{-5}$	$0.92 \times 10^{-5}$	7.8
20	3.08	-2.66	0.81	$1.02 \times 10^{-5}$	$4.17 \times 10^{-5}$	$1.11 \times 10^{-5}$	4.7
25	2.90	-2.78	1.06	$1.03 \times 10^{-5}$	$4.21 \times 10^{-5}$	$0.91 \times 10^{-5}$	3.2
30	2.92	-2.81	0.91	$1.03 \times 10^{-5}$	$4.20 \times 10^{-5}$	$0.99 \times 10^{-5}$	1.2
35	2.90	-2.82	0.93	$1.05 \times 10^{-5}$	$4.19 \times 10^{-5}$	$0.99 \times 10^{-5}$	0.8
40	2.90	-2.83	0.93	$1.07 \times 10^{-5}$	$4.18 \times 10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-5}$	0.7
BCRLS 估计							
15	2.98	-2.75	0.90	$1.06 \times 10^{-5}$	$4.17 \times 10^{-5}$	$1.04 \times 10^{-5}$	1.8
20	2.97	-2.76	0.90	$1.05 \times 10^{-5}$	$4.18 \times 10^{-5}$	$1.01 \times 10^{-5}$	1.6
25	2.90	-2.79	1.02	$1.10 \times 10^{-5}$	$4.20 \times 10^{-5}$	$0.92 \times 10^{-5}$	2.6
30	2.89	-2.83	0.93	$1.07 \times 10^{-5}$	$4.18 \times 10^{-5}$	$1.02 \times 10^{-5}$	0.4
35	2.89	-2.83	0.93	$1.06 \times 10^{-5}$	$4.18 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-5}$	0.2
40	2.89	-2.83	0.93	$1.06 \times 10^{-5}$	$4.18 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-5}$	0.2
真值	2.90	-2.83	0.93	$1.06 \times 10^{-5}$	$4.18 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-5}$	

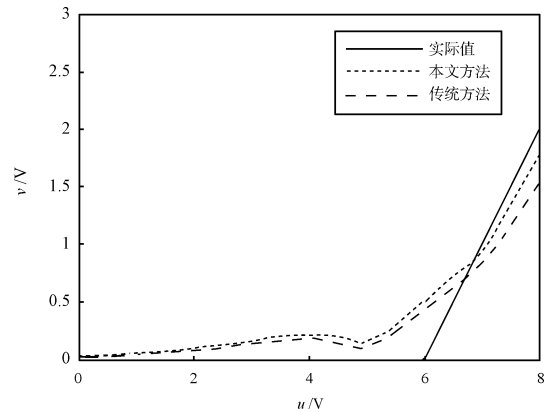


图 3 两种不同方法的死区比较

Fig. 3 Comparison of dead zones with two different methods

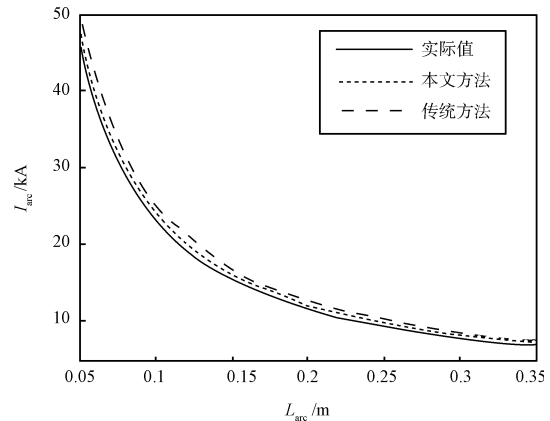


图 4 两种不同方法的电弧比较

Fig. 4 Comparison of arc with two different methods

阶段方法相比,改进方法不仅补偿了过程噪声引起的估计偏差,得到原系统参数乘积向量的无偏估计,而且补偿了参数乘积矩阵其他特征值产生的误差,提高了参数分离精度。

### References

- 1 Tan A H, Godfrey K. Identification of Wiener-Hammerstein models using linear interpolation in the frequency domain (LIFRED). *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2002, **51**(3): 509–521
  - 2 Liu Y, Bai E W. Iterative identification of Hammerstein systems. *Automatica*, 2007, **43**(2): 346–354
  - 3 Yuan Ting-Qi, Liu Wen-Jiang. Identification of Hammerstein model based on dynamical separation technology. *Control Theory and Applications*, 2002, **19**(4): 619–622  
(袁廷奇, 刘文江. 非线性 Hammerstein 系统辨识的动态分离方法. 控制理论与应用, 2002, **19**(4): 619–622)
  - 4 Xiang Wei, Chen Zong-Hai. New identification method of nonlinear systems based on Hammerstein models. *Control Theory and Applications*, 2007, **24**(1): 143–147  
(向微, 陈宗海. 基于 Hammerstein 模型描述的非线性系统辨识新方法. 控制理论与应用, 2007, **24**(1): 143–147)
  - 5 Ding F, Chen T W. Identification of Hammerstein nonlinear ARMAX systems. *Automatica*, 2005, **41**(9): 1479–1489
  - 6 Ding F, Shi Y, Chen T W. Gradient-based identification methods for Hammerstein nonlinear ARMAX models. *Nonlinear Dynamics*, 2006, **45**(1-2): 31–43
  - 7 Ding F, Shi Y, Chen T W. Auxiliary model based least-squares identification methods for Hammerstein output-error systems. *Systems and Control Letters*, 2007, **56**(5): 373–380
  - 8 Ding F, Chen T W. Combined parameter and output estimation of dual-rate systems using an auxiliary model. *Automatica*, 2004, **40**(10): 1739–1748
  - 9 Ding F, Chen T W. Identification of dual-rate systems based on finite impulse response models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, **18**(7): 589–598
  - 10 Bai E W. An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein-Wiener nonlinear systems. *Automatica*, 1998, **34**(3): 333–338
  - 11 Wang D Q, Ding F. Extended stochastic gradient identification algorithms for Hammerstein-Wiener ARMAX systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**(12): 3157–3164
  - 12 Fan Wei, Ding Feng. Three methods of separating parameters for Hammerstein nonlinear systems. *Science Technology and Engineering*, 2008, **8**(6): 1586–1589  
(范伟, 丁锋. Hammerstein 非线性系统参数估计分离的三种方法. 科学技术与工程, 2008, **8**(6): 1586–1589)
  - 13 Zhu Y. Estimation of an N-L-N Hammerstein-Wiener model. *Automatica*, 2002, **38**(9): 1607–1614
  - 14 Ding F, Chen T W, Qiu L. Bias compensation based recursive least-squares identification algorithm for MISO systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2006, **53**(5): 349–353
  - 15 Yang Hui-Zhong, Zhang Yong. Comparison of bias compensation methods and other identification approaches for Box-Jenkins models. *Control Theory and Applications*, 2007, **24**(2): 215–222  
(杨慧中, 张勇. Box-Jenkins 模型偏差补偿方法与其他辨识方法的比较. 控制理论与应用, 2007, **24**(2): 215–222)
  - 16 Zhang Yong, Yang Hui-Zhong. Bias compensation recursive least squares identification for output error systems with colored noises. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(10): 1053–1060  
(张勇, 杨慧中. 有色噪声干扰输出误差系统的偏差补偿递推最小二乘辨识方法. 自动化学报, 2007, **33**(10): 1053–1060)
  - 17 Abrahamsson R, Kay S M, Stoica P. Estimation of the parameters of a bilinear model with applications to submarine detection and system identification. *Digital Signal Processing*, 2007, **17**(2): 756–773
  - 18 Jin Wei-Qiang, Li Ji-Shun. The design of electrode regulation system for electric arc furnace. *Industrial Heating*, 2008, **37**(2): 45–47  
(金伟强, 李济顺. 电弧炉电极调节系统的设计. 工业加热, 2008, **37**(2): 45–47)
- 李 妍 东北大学博士研究生. 主要研究方向为非线性系统建模与控制. 本文通信作者. E-mail: neu\_ly@yahoo.cn  
(LI Yan Ph. D. candidate at Northeastern University. Her research interest covers nonlinear system modeling and controlling. Corresponding author of this paper.)
- 毛志忠 东北大学教授. 主要研究方向为复杂系统建模与控制. E-mail: maozhizhong@ise.neu.edu.cn  
(MAO Zhi-Zhong Ph. D., professor at Northeastern University. His research interest covers complex system modeling and controlling.)
- 王 琰 辽阳市发展和改革委员会副调研员. 主要研究方向为非线性系统建模与控制. E-mail: neu\_wy100@yahoo.com.cn  
(WANG Yan Associate consultant at Liaoyang Municipal Development and Reform Commission. His research interest covers nonlinear system modeling and controlling.)
- 袁 平 东北大学副教授. 主要研究方向为非复杂系统控制与软测量. E-mail: yuanping1@ise.neu.edu.cn  
(YUAN Ping Associate professor at Northeastern University. His research interest covers complex system controlling and soft sensing.)
- 贾明兴 东北大学副教授. 主要研究方向为控制系统故障诊断与智能控制. E-mail: jiamingxing@ise.neu.edu.cn  
(JIA Ming-Xing Associate professor at Northeastern University. His research interest covers fault detection and neural network techniques.)