

基于加权函数选择的伺服系统性能优化设计方法

姚郁¹ 傅绍文^{1,2} 贺风华¹ 王晓晨¹

摘要 为了尽可能提高伺服系统的性能,提出一种基于加权函数选择的性能优化设计方法.首先,给出性能优化设计问题的描述;其次,给出了线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)形式的优化指标;再次,提出一种基于加权函数选择的系统性能优化设计迭代算法;最后,利用 Bode 积分关系分析了算法的收敛性.所提出的系统性能优化设计算法易于迭代计算,仿真实例验证了算法的有效性.

关键词 性能加权函数,性能优化, Bode 积分,线性矩阵不等式
中图分类号 TP273

Servo System Performance Optimization Design Method Based on Weight Function Selection

YAO Yu¹ FU Shao-Wen^{1,2} He Feng-Hua¹
WANG Xiao-Chen¹

Abstract In order to get servo system's better performance, an optimization approach to system performance based on weight function selection is proposed. Firstly, the performance optimization design problem is described. Secondly, performance optimization design's linear matrix inequality (LMI) index is presented. Thirdly, an iterative algorithm based on weight function selection is proposed. Finally, the algorithm's convergence is analyzed based on Bode integral. The proposed performance optimization design method is easy to compute and a simulation result is given to verify the proposed method's validation.

Key words Performance weight function, performance optimization, Bode integral, linear matrix inequality (LMI)

加权函数选择是 H_∞ 控制方法在实际应用中成功与否的关键.其中,性能加权函数既表征了对伺服系统的指标要求,同时也表征了系统所能达到性能的高低.因此,可以在设计伺服系统之前按照任务指标要求选取性能加权函数,然后通过改进控制方法或调整被控对象特性使得控制器设计有解.另外一种情况是,在控制方法选定或被控对象给定情况下,通过调整性能加权函数得到不同的控制器,进而不断提高伺服系统性能.

对于第一种情况,主要是通过定性分析的方法选择性能加权函数.姚郁等^[1]在飞行仿真转台混合灵敏度设计中,给出了加权函数选择的基本原则:为了减小伺服系统跟踪误差和干扰对系统输出的影响,性能加权函数的直流增益应大于要求的误差和干扰抑制比例系数,而对于高频范围则无此要

求.类似地,吴旭东等^[2]指出在 H_∞ 混合灵敏度设计中性能加权函数应选取一阶低通滤波器形式,并且滤波器带宽为系统要求的干扰抑制频宽.王曦等^[3]则将系统时域内的指标要求,如上升时间以及超调量等,转化为频域指标,进而得到表征该要求的性能加权函数.此外,为了进一步细化性能加权函数选择的步骤,Ortega 等^[4]限定性能加权函数为带有 3 个变参的一阶传递函数,并根据具体的指标要求对这 3 个参数进行相应调整.

对于第二种情况,目的是得到使系统性能尽可能提高的加权函数以及相应的控制器.在具有一定带宽要求的情况下,伺服系统所能达到的性能是有限的^[5-6],因此,可通过选择性能加权函数对系统性能进行优化设计,以最大限度挖掘系统潜能.王广雄等^[7]指出系统的性能极限是由系统带宽决定的,达到性能极限依赖于有效的设计方法,并给出了性能加权函数选取的初步原则.剑桥大学的 Lanzon 与 Glover 则开辟了一种新的研究思路,Lanzon^[8]指出,为了达到伺服系统的性能极限,需要将性能加权函数作为设计参数进行设计,在文献[9-11]中,为了解决 H_∞ 回路成形设计中基于加权函数选择的系统性能优化设计问题,Lanzon 给出一种类似于 DK 迭代的性能加权函数选择算法,这种方法在给定频段上选取若干频率点,在每个频率点上求解相应的线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI),得到使系统性能接近极限的性能加权函数,由于采用逐个频率点计算的方法,计算量非常大.类似的处理思路,Lanzon^[12-13]又讨论了 μ 综合控制中性能加权函数选择算法,首先给定某对角传递函数矩阵作为性能加权函数的优化方向,然后通过尤拉参数化方法将控制器动态以线性分式变换(Linear fractional transformations, LFT)的形式分离出来,最后在关心的频段上选取若干个频率点,在每个频率点上求解 LMI,得到接近系统性能极限的性能加权函数,由于要求在所有频率点上控制器的未知矩阵变量相同,使得问题可解性难度增大,并且随着选择频率点的增多,同样存在计算量大的问题.为了避免在多个频率点的计算问题,Lanzon 等^[14-15]提出在时域内通过状态空间方法计算使系统性能接近极限的性能加权函数,为了使问题可解,算法中引入了一个矩阵乘积可交换的条件,一般情况下较难满足,并且当问题维数较大时,计算量很大.此外,为了简化性能加权函数优化问题的求解,Asgharian 等^[16]与曾丽兰等^[17]则采用数值优化方法讨论了系统性能优化设计问题.

综上所述,为了尽可能提高伺服系统的性能,可将性能加权函数作为设计参数对系统性能进行优化设计,但现有方法要求满足较为苛刻的条件,计算过程过于繁琐,并且缺少算法收敛性的分析,难于满足实际应用的需要.因此,本文提出一种新的、易于计算的并且算法收敛性有所保证的系统性能优化设计算法.

1 系统性能优化设计问题描述

H_∞ 控制经常将设计问题归纳为混合灵敏度问题,如图 1 所示.其中, $G(s)$ 为被控对象, $K(s)$ 为闭环系统控制器, $W_e(s)$ 是性能加权函数,在控制器设计过程中可以调整, $W_T(s)$ 是系统不确定性加权函数,在控制器设计过程中是固定不变的.混合灵敏度问题中用灵敏度函数 S 和补灵敏度函数 T 分别表示对系统的要求或约束,具体来说就是求解如下 H_∞ 优化问题

$$\min_{K_{\text{stabilizing}}} \left\| \begin{array}{c} W_e S \\ W_T T \end{array} \right\|_\infty \leq 1$$

收稿日期 2008-07-28 收修稿日期 2009-04-15
Received July 28, 2008; in revised form April 15, 2009
国家自然科学基金(60674043)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60674043)
1. 哈尔滨工业大学控制与仿真中心 哈尔滨 150080 2. 北京航天自动控制研究所 北京 100854
1. Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080 2. Beijing Aerospace Automatic Control Institute, Beijing 100854
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01470

其中, $S = (1 + GK)^{-1}$, $T = GK(1 + GK)^{-1}$.

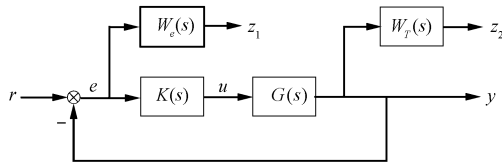


图 1 混合灵敏度问题

Fig. 1 Mixed sensitivity problem

反馈设计中, 动态性能与稳定裕度本质上是矛盾的, 因此必须在不同设计指标中进行折衷, 由 Bode 提出的灵敏度积分关系表示了这种约束. 由 Bode 积分关系可知, 对于极点个数多于零点个数的开环稳定系统, 灵敏度函数的对数幅值在所有频率上的积分等于 0. 因此, 当存在带宽约束时, 在一定频率范围内所期望的灵敏度衰减必然与另一些频率上灵敏度增大进行折衷.

根据小增益定理, 系统鲁棒稳定性要求为

$$\|W_T T\|_\infty \leq 1 \quad (1)$$

不确定性一般在高频段 $[\omega_H, \infty]$ 影响较大, 即 $\|W_T(j\omega)\| \gg 1$, $\omega > \omega_H$. 此时, 由式 (1) 可知 $\|GK\|_\infty \ll 1$, 即

$$\ln \|S(j\omega)\| \approx 0, \quad \omega > \omega_H$$

因此, 当系统无右半平面极点时, 可得 Bode 积分关系为

$$\int_0^{\omega_H} \ln \|S(j\omega)\| d\omega \approx 0 \quad (2)$$

在使用 H_∞ 控制方法求解相应的优化问题后, 如下等价关系成立

$$\left\| \begin{matrix} W_e S \\ W_T T \end{matrix} \right\|_\infty = \gamma \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\gamma} W_e S \\ \frac{1}{\gamma} W_T T \end{matrix} \right\|_\infty = 1$$

此时, 系统达到的性能为 W_e/γ , 而不确定性加权函数等价于 W_T/γ . 可见, 若 H_∞ 优化结果使得 $\gamma < 1$, 系统的不确定性等价变大, 即系统的允许带宽变小, 如图 2 所示, 其中, S_1 与 S_2 分别是对应于不确定性加权函数 W_T 与 W_T/γ 的灵敏度函数.

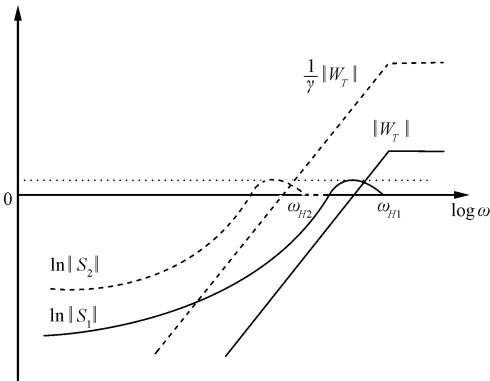


图 2 系统带宽约束

Fig. 2 System's frequency band restriction

由于系统鲁棒稳定性要求 $\gamma \leq 1$, 因此, 当 H_∞ 控制的优化结果为 $\gamma = 1$ 时, 系统的允许带宽最大, 即在不确定性界 W_T 所表示的系统带宽约束下, 要达到更好的性能, 要求闭环系统 H_∞ 范数 $\gamma = 1$. 因此, 在 H_∞ 控制方法的基础上以及 $\gamma = 1$ 的约束下, 可通过选择性能加权函数 W_e 来优化系统的性能.

对于低频干扰抑制以及降低系统灵敏度的要求, 一般情况下只需选用形式简单的性能加权函数, 因此, 本文研究一阶形式的性能加权函数, 其具体结构选择为

$$W_e = \frac{cs + (b + ac)}{s + a} \quad (3)$$

其中, $a > 0, b > 0, c > 0$.

可以看出, 式 (3) 所示的加权函数具有低通特性, 其第一个转折频率为 $\omega_1 = a$, 低频增益 $K_D = (b + ac)/a$, 第二个转折频率为 $\omega_2 = (b + ac)/c$, 高频增益为 $K_F = c$. 从提高系统性能的角度, 一般有如下要求:

- 1) 低频增益 K_D 表征了干扰抑制水平以及跟踪误差指标, 应尽可能大;
- 2) ω_1 表征了对干扰以及跟踪误差抑制的带宽, 应尽可能大;
- 3) 高频增益 K_F 反映了系统灵敏度函数峰值的大小, 应尽可能大.

即要求 $(b + ac)/a, a, c$ 取值尽可能大, 其直观描述如图 3 所示.

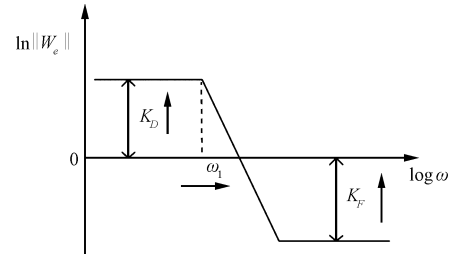


图 3 期望的性能加权函数

Fig. 3 Desired performance weight function

一般情况下, 要求 W_e 高频增益小于 1, 即 $c < 1$, 由于 W_e 低频增益 K_D 一般较大, 即 $(b + ac)/a \gg 1$, 此时, 对 W_e 的要求可简化为: $b/a, a, c$ 取值应尽可能大, 且 $c < 1$.

至此, 基于加权函数选择的系统性能优化设计问题可描述为: 找到一个如式 (3) 所示的加权函数 $W_e(s)$, 使得闭环系统的 H_∞ 范数 $\gamma \rightarrow 1$, 且 $W_e(s)$ 中的参数 $b/a, a, c$ 取值尽可能大.

2 LMI 形式优化指标

由于期望 $b/a, a, c$ 取值尽可能大, 系统性能优化设计指标可描述为: $\gamma \rightarrow 1$, 且

$$\begin{cases} \min \lambda_1 \\ \lambda_1 b > a \\ \lambda_1 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \min \lambda_2 \\ \lambda_2 a > 1 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \min \lambda_3 \\ \lambda_3 c > 1 \\ \lambda_3 > 0 \end{cases}$$

为了将所求问题转化为 LMI 形式, 引入具有保守性的约束 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, 并进行归一化处理. 给定 $b/a, a$ 及 c 的期望值分别为 k_0, a_0 及 c_0 , 由于 $b/a > 1/\lambda_1$, 可认为 λ_1 表

示 b/a 取值的倒数, 而 k_0 为 b/a 期望达到的最大值, 利用 $\lambda_1 b > a \Leftrightarrow \lambda_1 k_0 b > k_0 a$, 令 $\lambda'_1 = \lambda_1 k_0$, 则

$$\max\left(\frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \min \lambda'_1 \\ \lambda'_1 b > k_0 a \\ \lambda'_1 > 0 \\ k_0 a > b \end{cases}$$

同理有

$$\max(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \min \lambda'_2 \\ \lambda'_2 a > a_0 \\ \lambda'_2 > 0 \\ a_0 > a \end{cases}, \quad \max(c) \Leftrightarrow \begin{cases} \min \lambda'_3 \\ \lambda'_3 c > c_0 \\ \lambda'_3 > 0 \\ c_0 > c \end{cases}$$

令 $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = \lambda$, 则系统性能优化设计 LMI 形式指标可表示为

$$\begin{cases} \min \lambda \\ \lambda > 0, \lambda b > k_0 a, \lambda a > a_0, \lambda c > c_0 \\ k_0 a > b, a_0 > a, c_0 > c \end{cases}$$

3 基于加权函数选择的迭代算法

在图 1 中, 各传递函数的状态空间描述为

$$W_e: \begin{cases} \dot{x}_e = -ax_e + be \\ z_1 = x_e + ce \end{cases}$$

$$W_T: \begin{cases} \dot{x}_t = A_t x_t + B_t y \\ z_2 = C_t x_t + D_t y \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} \dot{x}_g = A_g x_g + B_g u \\ y = C_g x_g \end{cases}$$

其中, 被控对象 G 中 $D_g = 0$ 是使用 LMI 方法求解 H_∞ 控制问题的要求, 若 $D_g \neq 0$, 可在控制量 u 处加一个严格真的低通滤波器.

系统广义被控对象输入为 r, u , 输出为 z_1, z_2 及 e , 令 $\mathbf{x} = [x_e^T \ x_t^T \ x_g^T]^T$, $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T$, 则广义被控对象的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_p \mathbf{x} + B_{p1} r + B_{p2} u \\ \mathbf{z} = C_{p1} \mathbf{x} + D_{p11} r + D_{p12} u \\ e = C_{p2} \mathbf{x} + D_{p21} r \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$A_p = \begin{bmatrix} -a & 0 & -bC_g \\ 0 & A_t & B_t C_g \\ 0 & 0 & A_g \end{bmatrix}, \quad B_{p1} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$B_{p2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_g \end{bmatrix}, \quad C_{p1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -cC_g \\ 0 & C_t & D_t C_g \end{bmatrix}$$

$$D_{p11} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{p12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{p2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -C_g \end{bmatrix}, \quad D_{p21} = I$$

由式 (4) 可知, 参数 a, b 及 c 在系统状态空间矩阵 A_p, B_{p1}, C_{p1} 及 D_{p11} 中以仿射形式出现, 给定 a, b 及 c , 可使用 LMI 方法求解式 (4) 的 H_∞ 控制问题.

给定性能加权函数的初始参数, 以及 $b/a, a, c$ 的期望值 k_0, a_0, c_0 , 基于加权函数选择的系统性能优化设计的迭代算法如下:

步骤 1. 给定初始性能加权函数 W_{eI} ;

步骤 2. 由给定的 W_{eI} 求解对称矩阵 X, Y , 使得如下线性目标函数最小化问题有解:

$$\min \gamma \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_p^T X + X A_p & X B_{p1} & C_{p1}^T \\ B_{p1}^T X & -\gamma I & D_{p11}^T \\ C_{p1} & D_{p11} & -\gamma I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_p Y + Y A_p^T & Y C_{p1}^T & B_{p1} \\ C_{p1} Y & -\gamma I & D_{p11} \\ B_{p1}^T & D_{p11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

其中, N_o 和 N_c 分别是子空间 $\ker([C_{p2} \ D_{p21}])$ 和 $\ker([B_{p2}^T \ D_{p12}^T])$ 中任意一组基向量作为列向量所构成的矩阵. 令式 (5)~(8) 得到的优化结果为 γ_p ;

步骤 3. 给定步骤 2 中求得的 X, Y , 求解性能加权函数 W_{es} 的参数 a, b 及 c , 使得如下线性目标函数最小化问题有解:

$$\begin{cases} \min \lambda \\ \lambda > 0, \lambda b > k_0 a, \lambda a > a_0, \lambda c > c_0 \\ k_0 a > b, a_0 > a, c_0 > c \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_p^T X + X A_p & X B_{p1} & C_{p1}^T \\ B_{p1}^T X & -I & D_{p11}^T \\ C_{p1} & D_{p11} & -I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_p Y + Y A_p^T & Y C_{p1}^T & B_{p1} \\ C_{p1} Y & -I & D_{p11} \\ B_{p1}^T & D_{p11}^T & -I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

步骤 4. 若 γ_p 接近 1, 则转到步骤 5, 否则令 $W_{eI} = W_{eS}$, 转到步骤 2;

步骤 5. 由 X 、 Y 构造对应于 W_{eS} 的中心控制器 $K(s)$, 退出算法.

4 算法收敛性分析

由步骤 3 可见, 本文算法可使 b/a , a 及 c 取值尽可能大, 下面利用 Bode 积分关系论证算法是收敛的, 且使得 $\gamma \rightarrow 1$.

1) $\gamma \leq 1$

假设第 n 次迭代计算步骤 2 中性能加权函数为 W_{eI0} , 优化结果为 $\gamma_p = \gamma_0$, 相应控制器为 K_0 , 即

$$\left\| \begin{array}{c} W_{eI0}S_0 \\ W_T T_0 \end{array} \right\|_{\infty} = \gamma_0 \quad (12)$$

步骤 3 得到性能加权函数为 W_{eS0} , 即

$$\left\| \begin{array}{c} W_{eS0}S_0 \\ W_T T_0 \end{array} \right\|_{\infty} = 1 \quad (13)$$

而在第 $n+1$ 次迭代计算中, 步骤 2 中性能加权函数为 W_{eS0} , 优化结果为 $\gamma_p = \gamma_1$, 相应控制器为 K_1 , 即

$$\left\| \begin{array}{c} W_{eS0}S_1 \\ W_T T_1 \end{array} \right\|_{\infty} = \gamma_1 \quad (14)$$

以 W_{eS0} 作为性能加权函数求解 H_{∞} 最优控制问题时, K_1 是使闭环系统内稳定且 H_{∞} 范数最小的控制器, 对比式 (13) 与式 (14), 可知 $\gamma_1 \leq 1$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1 \rightarrow 1$

不确定性在系统低频段影响一般较小, 即

$$\left\| \begin{array}{c} W_e S \\ W_T T \end{array} \right\|_{\infty} \approx \|W_e S\|_{\infty}, \quad \omega \in [0, \omega_1] \quad (15)$$

由于 H_{∞} 控制方法的设计结果使得闭环系统具有全通特性, 因此利用式 (12)、(13) 及 (15), 有

$$\|W_{eI0}(j\omega)S_0(j\omega)\| = \gamma_0 \Leftrightarrow \ln \|W_{eI0}(j\omega)\| + \ln \|S_0(j\omega)\| = \ln \gamma_0, \quad \forall \omega \in [0, \omega_L] \quad (16)$$

$$\|W_{eS0}(j\omega)S_0(j\omega)\| = 1 \Leftrightarrow \ln \|W_{eS0}(j\omega)\| + \ln \|S_0(j\omega)\| = 0, \quad \forall \omega \in [0, \omega_L] \quad (17)$$

可见, 曲线 $-\ln \|W_{eI0}(j\omega)\|$ 与 $\ln \|S_0(j\omega)\|$ 之差在低频段上为常值 $-\ln \gamma_0$, 且曲线 $-\ln \|W_{eS0}(j\omega)\|$ 与 $\ln \|S_0(j\omega)\|$ 重合, 如图 4 所示.

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1 = \varepsilon$, 且 $\varepsilon < 1$, 则有 $-\ln \gamma_1 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow +\infty$, 即 $\ln \|S_1(j\omega)\| \rightarrow -\infty, \forall \omega \in [0, \omega_L]$. 由式 (2) 所示的 Bode 积分关系可得

$$\int_0^{\omega_H} \ln \|S_1(j\omega)\| d\omega = \int_0^{\omega_L} \ln \|S_1(j\omega)\| d\omega + \int_{\omega_L}^{\omega_H} \ln \|S_1(j\omega)\| d\omega = 0 \quad (18)$$

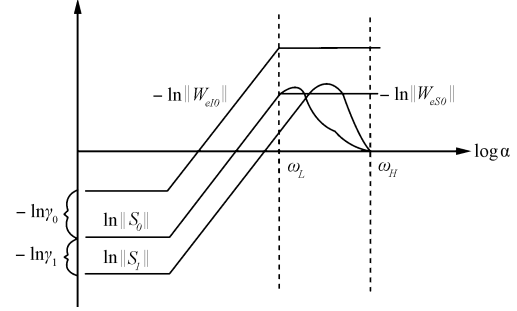


图 4 曲线 $-\ln \|W\|$ 与 $\ln \|S\|$ 的关系

Fig. 4 Relationship of curves $-\ln \|W\|$ and $\ln \|S\|$

因此, 在中频段 $[\omega_L, \omega_H]$, $\ln \|S_1(j\omega)\| \rightarrow +\infty$. 由于 W_{eS0} 是有理函数, 在区间 $[\omega_L, \omega_H]$ 上有界, 在算法的步骤 3 中, 对任意 $\omega \in [\omega_L, \omega_H]$, 可得

$$1 = \left\| \begin{array}{c} W_{eS0}S_1 \\ W_T T_1 \end{array} \right\|_{\infty} \geq \max\{\|W_{eS0}\| \|S_1\|, \|W_T T_1\|\} \quad (19)$$

由 $\|W_{eS0}\|$ 有界以及 $\|S_1(j\omega)\| \rightarrow \infty$, 可知 $\|W_{eS0}\| \|S_1\| > 1$, 与式 (19) 矛盾. 因此, 由 $\gamma_1 \leq 1$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1 = 1$.

3) $\gamma_0 \leq \gamma_1$

如图 4 所示, 在系统的低频段, 有

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \Leftrightarrow -\ln \gamma_0 \geq -\ln \gamma_1, \quad \omega \in [0, \omega_L] \quad (20)$$

令 $\Delta = -\ln \gamma_0 + \ln \gamma_1$, 由全通特性可知 Δ 为常数, 因此 $\gamma_0 \leq \gamma_1$ 等价于

$$\int_0^{\omega_L} \Delta d\omega \geq 0 \quad (21)$$

由于

$$\int_0^{\omega_L} \Delta d\omega = \int_0^{\omega_H} (-\ln \|W_{eI0}(j\omega)\| - 2 \ln \|S_0(j\omega)\| + \ln \|S_1(j\omega)\|) d\omega - \int_{\omega_L}^{\omega_H} (-\ln \|W_{eI0}(j\omega)\| - 2 \ln \|S_0(j\omega)\| + \ln \|S_1(j\omega)\|) d\omega \quad (22)$$

由 Bode 积分关系, 可得

$$\int_0^{\omega_L} \Delta d\omega = \int_0^{\omega_L} (-\ln \|W_{eI0}(j\omega)\|) d\omega - \int_{\omega_L}^{\omega_H} (-2 \ln \|S_0(j\omega)\| + \ln \|S_1(j\omega)\|) d\omega \quad (23)$$

令 $\int_0^{\omega_L} \Delta d\omega \geq 0$, 由式 (23), 可得

$$\int_0^{\omega_L} (\ln \|W_{eI0}(j\omega)\|) d\omega \leq \int_{\omega_L}^{\omega_H} (2 \ln \|S_0(j\omega)\| - \ln \|S_1(j\omega)\|) d\omega \quad (24)$$

在系统的中频段, 有

$$\left\| \begin{array}{c} W_e S \\ W_T T \end{array} \right\|_{\infty} = \gamma \leq 1, \quad \forall \omega \in [\omega_L, \omega_H] \quad (25)$$

因此, $\|W_e S\|_{\infty} \leq \gamma$, 进而

$$\|S(j\omega)\| \leq \frac{\gamma}{\|W_e(j\omega)\|}, \quad \forall \omega \in [\omega_L, \omega_H] \quad (26)$$

由于在体现系统性能要求的低频段 $\int_0^{\omega_L} \ln \|S(j\omega)\| d\omega < 0$, 由 Bode 积分关系可知

$$\int_{\omega_L}^{\omega_H} \ln \|S(j\omega)\| d\omega > 0, \quad \forall \omega \in [\omega_L, \omega_H] \quad (27)$$

由式 (21), (24), (26) 及 (27) 可知, 使得 $\gamma_0 \leq \gamma_1$ 的条件为

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_L} \ln \|W_{eI0}(j\omega)\| d\omega &\leq \\ \int_{\omega_L}^{\omega_H} \left(2 \ln \frac{\gamma_0}{W_{eI0}(j\omega)} - \ln \|S_1(j\omega)\| \right) d\omega &\leq \\ \int_{\omega_L}^{\omega_H} (-2 \ln \|W_{eI0}(j\omega)\|) d\omega &\quad (28) \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\omega_H} \ln \|W_{eI0}(j\omega)\| d\omega + \int_{\omega_L}^{\omega_H} \ln \|W_{eI0}(j\omega)\| d\omega \leq 0 \quad (29)$$

在系统控制器设计完毕后, 一般情况下式 (29) 成立.

因此, 由 $\gamma_1 \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1 = 1$ 及 $\gamma_0 \leq \gamma_1$ 可知, 所提出的系统性能优化设计迭代算法是收敛的, 且能够使得 $\gamma \rightarrow 1$.

5 仿真验证

在图 1 所示的系统中, 给定不确定性加权函数及被控对象传递函数为

$$\begin{aligned} W_T(s) &= \frac{0.01s + 0.001}{0.003s + 1} \\ G(s) &= \frac{12.5}{(0.0318s + 1)(0.0032s + 1)} \end{aligned}$$

初始的性能加权函数参数初值取为 $a = 0.5$, $b = 10$, $c = 0.3$, 即

$$W_{e0}(s) = \frac{0.3s + 10.15}{s + 0.5}$$

参数期望值取为 $k_0 = 1000$, $a_0 = 9.42$, $c_0 = 0.9$, 算法经过 20 次迭代后, 闭环系统 H_∞ 范数收敛到 0.9999, 如图 5 所示, 参数优化结果为 $a = 1.05$, $b = 116.28$, $c = 0.68$, 相应的性能加权函数为

$$W_{ep}(s) = \frac{0.679s + 117.0}{s + 1.047}$$

优化前后性能加权函数频率特性如图 6 所示, 可以看出, 优化前后系统干扰抑制水平及带宽有了较大提高. 图 7 为两种情况下系统的阶跃响应曲线, 经过优化设计之后, 系统阶跃响应特性明显变好.

6 结论

本文围绕提高伺服系统性能的要求, 提出了一种基于加权函数选择的性能优化设计迭代算法, 并利用 Bode 积分关系论证了算法是收敛的. 所提出性能优化设计算法具有非常简单的表达形式, 易于迭代计算. 仿真结果表明, 利用该算法可在较少迭代次数中找到使系统性能接近极限的加权函数, 进而提高了伺服系统性能.

虽然文中分析了算法的收敛性, 但未就其收敛速度、是否存在局部极小点等问题展开讨论. 此外, 高阶性能加权函

数可以更为细致地表达对伺服系统的性能要求, 因此有必要研究基于高阶加权函数的性能优化设计方法. 这些问题都是作者将来的研究重点.

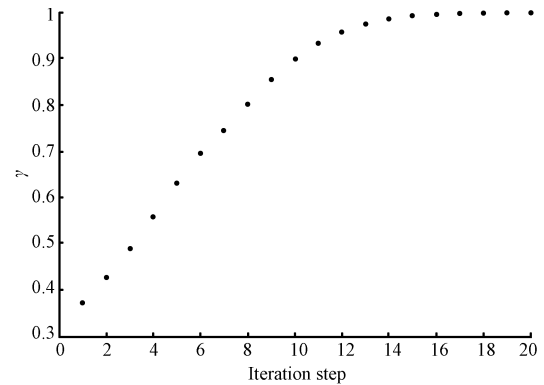


图 5 算法迭代过程中闭环系统范数

Fig. 5 The closed loop norm during algorithm's iteration

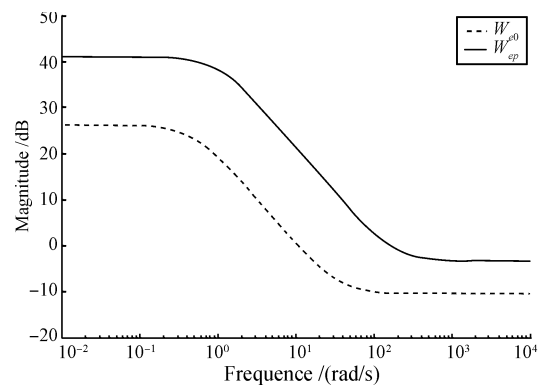


图 6 算法应用前后加权函数频率特性变化

Fig. 6 Comparison of performance weight function with algorithm application

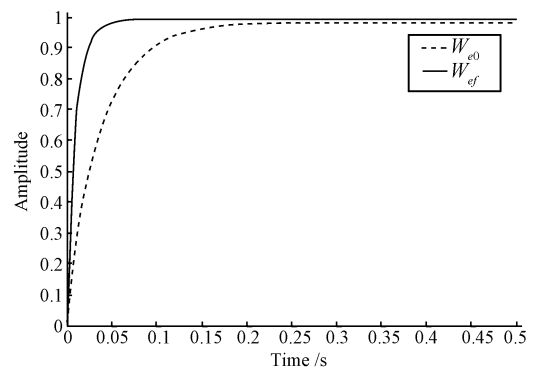


图 7 算法应用前后系统阶跃响应曲线

Fig. 7 Comparison of step response with algorithm application

References

1 Yao Yu, Dong Xi-Jun, Ma Jie. The mixed sensitivity design of flight simulation turntable. *Aerospace Control*, 1999, 17(3): 65-70
(姚郁, 董锡君, 马杰. 飞行仿真转台混合灵敏度设计. *航天控制*, 1999, 17(3): 65-70)

- 2 Wu Xu-Dong, Xie Xue-Shu. Weighting function matrix selection in H_∞ robust control. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 1997, **37**(1): 27–30
(吴旭东, 解学书. H_∞ 鲁棒控制中的加权阵选择. 清华大学学报 (自然科学版), 1997, **37**(1): 27–30)
 - 3 Wang Xi, Zeng Qing-Fu. Frequency shaping of mixed weighted sensitivity function for frequency uncertainty systems. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 1999, **20**(4): 358–361
(王曦, 曾庆福. 频域不确定性系统加权混合灵敏度函数频域整形. 航空学报, 1999, **20**(4): 358–361)
 - 4 Ortega M G, Rubio F R. Systematic design of weighting matrices for the H_∞ mixed sensitivity problem. *Journal of Process Control*, 2004, **14**(1): 89–98
 - 5 Aguiar A P, Hespanha J P, Kokotovi P V. Performance limitations in reference tracking and path following for nonlinear systems. *Automatica*, 2008, **44**(3): 598–610
 - 6 Bewley T R, Ziane M. A fundamental limit on the heat flux in the control of incompressible channel flow. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(11): 2118–2128
 - 7 Wang Guang-Xiong, He Yu-Fen. Performance limit of servo design. *Electric Machines and Control*, 1997, **1**(4): 238–240
(王广雄, 何雨奋. 伺服设计的性能极限. 电机与控制学报, 1997, **1**(4): 238–240)
 - 8 Lanzon A. Weight Selection in Robust Control: an Optimisation Approach [Ph. D. dissertation], Cambridge University, USA, 2000
 - 9 Lanzon A. Weight optimization in H_∞ loop-shaping. *Automatica*, 2005, **41**(7): 1201–1208
 - 10 Lanzon A. Simultaneous synthesis of weights and controllers in H_∞ loop-shaping. In: Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control. Florida, USA: IEEE, 2001. 670–675
 - 11 Gunasinghe I, Lanzon A. A systematic weight synthesis procedure for performance optimisation. In: Proceedings of the European Control Conference. Kos, Greece: IEEE, 2007. 223–228
 - 12 Lanzon A. Pointwise in frequency performance weight optimization in μ synthesis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, **15**(4): 171–199
 - 13 Lanzon A, Richards R J. A frequency domain optimization algorithm for simultaneous design of performance weights and controllers in μ synthesis. In: Proceedings of the Conference on Decision and Control. Arizona, USA: IEEE, 1999. 4523–4528
 - 14 Lanzon A, Cantoni M. On the formulation and solution of robust performance problems. *Automatica*, 2003, **39**(10): 1707–1720
 - 15 Lanzon A, Cantoni M. A state-space algorithm for the simultaneous optimisation of performance weights and controllers in μ synthesis. In: Proceedings of the Conference on Decision and Control. Sydney, Australia: IEEE, 2000. 611–616
 - 16 Asgharian R, Tavakoli S A. A systematic approach to performance weights selection in design of robust H_∞ PSS using genetic algorithms. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 1996, **11**(1): 111–117
 - 17 Zeng Li-Lan, Wang Dao-Bo. An improved optimization method for selecting weight function in H_∞ loop shaping. *Information and Control*, 2006, **35**(4): 487–492
(曾丽兰, 王道波. 一种改进的 H_∞ 回路成形权重函数优化选取方法. 信息与控制, 2006, **35**(4): 487–492)
- 姚 郁 哈尔滨工业大学航天学院教授. 主要研究方向为飞行器制导与控制. E-mail: yaoyu@hit.edu.cn
(YAO Yu Professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest covers guidance and control of aircraft.)
- 傅绍文 哈尔滨工业大学控制与仿真中心博士研究生, 北京航天自动控制研究所工程师. 主要研究方向为高精度伺服系统设计. 本文通信作者. E-mail: shaowenfu@sohu.com
(FU Shao-Wen Ph. D. candidate at the Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, and engineer at Beijing Aerospace Automatic Control Institute. His main research interest is design of servo system. Corresponding author of this paper.)
- 贺风华 哈尔滨工业大学航天学院讲师. 主要研究方向为非线性控制理论. E-mail: hefenghua@hit.edu.cn
(HE Feng-Hua Lecturer at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. Her main research interest is nonlinear control theory.)
- 王晓晨 哈尔滨工业大学控制与仿真中心博士研究生. 主要研究方向为并联机器人控制. E-mail: wangxiaochen@hit.edu.cn
(WANG Xiao-Chen Ph. D. candidate at the Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology. His main research interest is parallel robot control.)