

基于自适应滤波器的时频分析

储昭碧¹ 张崇巍¹ 冯小英¹

摘要 采用最小方差原则和梯度下降方法, 经过旋转变换, 获得频率参数和带宽参数可调的自适应二维线性正弦跟踪滤波器, 实现信号跟随与幅值估计. 把多个跟踪器并联, 形成带宽可调的多频点梳状滤波器, 得到多维线性常系数微动力系统. 用不变原理证明梳状滤波器是一致渐近稳定的. 用拉普拉斯变换导出频率特性, 单正弦输入时为向量形式, 针对多正弦分量时为频率特性矩阵. 当输入信号所有正弦分量的频率都等于梳状滤波器频率参数时, 本算法能够同时准确跟随所有分量及其幅值. 分析了算法的频域格栅效应以及带宽参数对稳态精度的影响, 通过仿真说明了算法的有效性.

关键词 自适应跟踪, 梳状滤波器, 时频分析, 频率格栅效应
中图分类号 TP14; TP93

Adaptive Filter-based Time-frequency Analysis

CHU Zhao-Bi¹ ZHANG Chong-Wei¹ FENG Xiao-Ying¹

Abstract An adaptive linear two-dimension sinusoid tracer with selectable frequency and bandwidth parameters is deduced to estimate the instantaneous value and the amplitude of a sinusoid by least square error, gradient descent method and rotation transform. A number of the tracers in parallel constitute a linear comb filter with adjustable bandwidth in every frequency that is a multi-dimension linear ordinary dynamic system. The uniformly asymptotical stability of the comb filter is validated by LaSalle invariance principle. The frequency characteristics in the form of vector for a sinusoid and matrix for signal with lots of sinusoidal components are derived by Laplace transform. All components of signal as well as their amplitudes can be estimated exactly simultaneously if all frequencies of the signal are the same as the frequency parameters of the comb filter. The frequency grid effect of the proposed algorithm as well as the effect of bandwidth parameter on precision in steady state are investigated. The algorithm's validity is verified by simulation results.

Key words Adaptive tracing, comb filter, time-frequency analysis, frequency grid effect

对工程信号进行分析和滤波, 常常需要把给定信号分解为不同频率的正弦分量之和. 目前广泛应用的工具主要是离散傅里叶变换 DFT 及其改进算法—加窗的快速傅里叶变换算法^[1-6]. DFT 算法精确分析的前提条件是, 保证采样时间窗长度准确等于所有分量周期的最小公倍数, 否则由于频谱泄漏产生误差, 对于包含多个间谐波的复杂信号, 此同步采样要求难以满足. 另外, DFT 算法直接得到的是各个正弦相量的实部和虚部, 必须通过二次计算才能得到被检测信号在每个采样时刻的数值.

近几年广为讨论的基于小波变换和小波包分解的算法^[7-8], 其计算量大, 不满足实时分析要求, 存在频带重叠导致调制混频现象^[9].

文献 [10] 采用了一种改进锁相环电路分析正弦信号, 能检测指定频率正弦输入的幅值和初相角, 文献 [11-12] 依据最小均方原则和最优梯度思想, 针

对固定频率 ω_0 的正弦输入 $u(t)$, 选择幅值 a 、相位 ϕ 作为状态变量, 提出类似文献 [10] 算法的幅值相角模型 (Amplitude phase model, APM) 跟踪器如下

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \bar{\mu}_1(u(t) - y) \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \bar{\mu}_2(u(t) - y) \cos \phi + \omega_0 \\ y &= a \sin \phi\end{aligned}$$

其中, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ 为跟踪器参数.

文献 [11-13] 以 APM 为基础提出幅值、频率、相位模型跟踪器 (Amplitude frequency phase model, AFPM). 文献 [14-16] 把多个跟踪器并联形成梳状滤波器, 分析谐波和间谐波. APM 算法是关于幅值和相位的非线性系统, 参数的物理意义不明确, 不利于调节参数和分析性能, 参数匹配与输入幅值有关, 算法鲁棒性不好.

本文先采用最小方差原则, 利用梯度下降方法, 经旋转变换, 获得自适应二维线性正弦跟踪器, 并估计其幅值, 改进了 APM 跟踪器的缺点. 再用多个跟踪器并联形成渐近稳定的梳状滤波器, 把信号分解为不同频率的正弦分量, 获得多个分量的时域跟随及其幅值, 最后通过仿真实例说明算法性能.

收稿日期 2008-07-03 收修改稿日期 2009-04-07
Received July 3, 2008; in revised form April 7, 2009
合肥工业大学科学研究发展基金 (2009HGXJ0178) 资助
Supported by Foundation of Science Research and Development of Hefei University of Technology (2009HGXJ0178)
1. 合肥工业大学电气与自动化工程学院 合肥 230009
1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01420

1 算法推导

设已知角频率 ω 的正弦信号的幅值 U 和初相位 δ 未知, 可表示为

$$u(t) = U \sin(\omega t + \delta) = U \cos \delta \cdot \sin \omega t + U \sin \delta \cdot \cos \omega t \quad (1)$$

由于有幅度和初相位两个未知量, 参考文献 [17], 选择状态变量为 $\mathbf{v}(t) = [v(t) \quad \tilde{v}(t)]^T$, 记

$$e(t) = u(t) - y(t) \quad (2)$$

$$y(t) = v(t) \sin \omega t + \tilde{v}(t) \cos \omega t \quad (3)$$

$$a(t) = \sqrt{v^2(t) + \tilde{v}^2(t)} \quad (4)$$

用 $a(t)$ 作为幅值的估计值, 用 $y(t)$ 作为 $u(t)$ 的估计值, $e(t)$ 为估计误差. 依据最小方差原则, 定义代价函数为

$$J(\mathbf{v}(t), t) = 0.5e^2(t) = 0.5(u(t) - y(t))^2$$

根据自适应滤波器的梯度下降方法, 使状态变量的变化方向为代价函数的负梯度方向^[11-12], 即

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -T \frac{\partial J(\mathbf{v}(t), t)}{\partial \mathbf{v}(t)}$$

对角矩阵 T 调节 $\mathbf{v}(t)$ 收敛到最优值的速度以及算法的稳定性. 令 $\mu_1, \mu_2 > 0$, 选择

$$T = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

得到以下的周期系数线性动力系统

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\tilde{v}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \sin^2 \omega t & -\mu_1 \sin \omega t \cdot \cos \omega t \\ -\mu_2 \cos \omega t \cdot \sin \omega t & -\mu_2 \cos^2 \omega t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \sin \omega t \\ \mu_2 \cos \omega t \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

做旋转变换

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \sin^2(\omega_0 t) - \mu_2 \cos^2(\omega_0 t) & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \sin^2(\omega_0 t) + \mu_2 \cos^2(\omega_0 t) \\ (\mu_1 - \mu_2) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} u(t)$$

指定 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, 并用 η 代替 ω , 得到自适应二维线性正弦跟踪算法 (Linear sinusoid tracer, LST)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & \eta \\ -\eta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (6)$$

以及信号跟随与幅值估计公式

$$y(t) = x(t) \quad (7)$$

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad (8)$$

在静止坐标系中用参数代替坐标系旋转, 把二维线性周期系数系统转换为常系数系统.

命题 1. 针对正弦跟踪器 (6), 以下结论成立:

1) 系统是全局一致渐近稳定的, 暂态响应速度主要决定于参数 μ , μ 越大收敛越快.

2) 若 $\eta = \omega$, 稳态时 $y(t) = u(t)$, $a(t) = U$, 故称 η 为频率参数.

3) 参数 μ 等于 -3dB 带宽, 故称 μ 为带宽参数.

证明. 见附录. □

文献 [12] 的第 2.1.1 节中引理 1 的证明过程显示, 在特殊条件下, 即当 APM 算法的两个参数 $\bar{\mu}_1$ 和 $\bar{\mu}_2$ 与输入正弦信号的幅值 U 之间满足最佳参数条件 $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 U$ 时, APM 算法具有式 (6) 的模型, 此时算法的性能最优. 事实上对于未知的 U , 不能保证该条件满足, 当 U 改变时, APM 算法系统鲁棒性不好. 由于所选状态变量与 APM 算法不同, 故式 (5) 的状态矩阵中没有显性的正弦幅值 U , 使得参数 μ_1, μ_2 与 U 无关, 新算法始终等价于最优的 APM 算法, 相当于 APM 算法中的参数 $\bar{\mu}_2$ 跟随 U 改变, 从而始终保持最佳参数条件成立, 改进了 APM 算法参数与输入信号幅值关联而导致算法鲁棒性差的缺点. 与 APM 方法相比, 本算法的两个参数 μ 和 η 都具有明确的物理意义, 应用时调整其数值更为方便. 当 η 是整数或小数, 可分别分析整数次谐波与非整数次间谐波, 而当 $\eta = 0$ 时系统简化为一阶惯性滤波. 另外, 新算法可直接获得输入信号的估计值, 不必进行 DFT 算法与 APM 算法那样的二次计算.

把多个线性正弦跟踪器并联, 形成如图 1 所示的并联滤波器组, 其中 Tracer 1 ~ Tracer N 都是式 (6) 的正弦跟踪器. 记第 i 个正弦跟踪滤波器的状态变量为 $x_i(t)$, $\tilde{x}_i(t)$, 其带宽参数为 μ_i , 频率参数为 η_i . 记 $D = \text{diag}\{\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_N\}$ 是对角矩阵, $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N]^T$ 是列向量, $\boldsymbol{\Gamma}_N = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ 是全为 1 的 $N \times 1$ 列向量, 记 O 是全 0

矩阵. 滤波器组的状态变量为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_N \end{bmatrix}^T$$

于是, 滤波器组可写成以下 $2N$ 维动力系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Gamma}_N^T & D \\ -D & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ O \end{bmatrix} u(t) \quad (9)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_N^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

所提取的第 i 个正弦分量的幅值可表示为

$$a_i(t) = \sqrt{x_i^2(t) + \tilde{x}_i^2(t)} \quad (11)$$

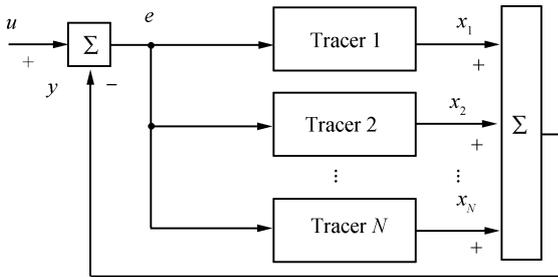


图 1 时频分析算法结构

Fig.1 Scheme of time-frequency analysis

2 算法性能

2.1 稳定性分析

为分析暂态稳定性, 考虑系统的齐次方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Gamma}_N^T & D \\ -D & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

命题 2. 零点是齐次系统 (12) 的全局一致渐近稳定平衡点.

证明. 取正定的李雅普诺夫函数为

$$V(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$$

其中, 对角矩阵 $P_1 = 0.5 \text{diag}\{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_N^{-1}\}$. $V(t)$ 对时间的导数是负半定的

$$\dot{V}(t) = - \left(\sum_{i=1}^N x_i(t) \right)^2 \leq 0$$

若 $\dot{V}(t) \equiv 0$, 则 $\sum_{i=1}^N x_i(t) \equiv 0$, 代入方程 (12), 得

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ -D\mathbf{x}(t) \end{bmatrix}$$

则有 $\ddot{\mathbf{x}}(t) + D^2\mathbf{x}(t) = O$, 其解必然为正弦函数形式 $x_i(t) = a_{i0} \sin(\eta_i t + \delta_{i0})$, 于是

$$\sum_{i=1}^N (a_{i0} \sin(\eta_i t + \delta_{i0})) \equiv 0$$

由于 η_i 互不相等, 该式有唯一零解

$$\begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix}$$

这说明系统的最大不变集只包含零点, 根据 LaSalle 不变原理, 命题成立^[18]. \square

2.2 信号跟随与幅值估计

考虑输入信号由多个频率的正弦叠加的情况

$$u(t) = \sum_{k=1}^M U_k \sin(\omega_k t + \delta_k) = \boldsymbol{\Gamma}_M^T \mathbf{u} \quad (13)$$

其中, 输入信号列向量记为

$$\mathbf{u} = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_M(t)]^T$$

由输入信号频率构成的列向量记为

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_M]^T$$

命题 3. 如果对每个输入分量的频率, 都有一个跟踪器的频率参数与其相等, 即

$$\omega_k = \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (14)$$

则算法 (9)~(11) 能实现对输入信号的各个分量的准确跟随, 并准确估计各个分量的幅值, 有

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \\ x_{M+1}(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_M(t) \\ a_{M+1}(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

证明. 记 I_N 为 N 维单位矩阵, 在零初值条件下对式 (9) 取拉普拉斯变换得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \tilde{\mathbf{X}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_N + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Gamma}_N^T & -D \\ D & sI_N \end{bmatrix}^{-1} U(s)$$

依据分块矩阵求逆定理和矩阵求逆引理^[19], 状态传递函数为向量形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(s) \\ \tilde{\mathbf{H}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s(s^2 I_N + D^2)\boldsymbol{\mu}}{1 + s\boldsymbol{\Gamma}_N^T(s^2 I_N + D^2)\boldsymbol{\mu}} \\ \frac{-D(s^2 I_N + D^2)\boldsymbol{\mu}}{1 + s\boldsymbol{\Gamma}_N^T(s^2 I_N + D^2)\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix}$$

以 $s = j\omega$ 代入上式, 得第 i 个跟踪器的状态转移函数表达式为

$$H_i(j\omega) = \frac{j\mu_i\omega}{\eta_i^2 - \omega^2} G(j\omega)$$

$$\tilde{H}_i(j\omega) = \frac{-\mu_i\eta_i}{\eta_i^2 - \omega^2} G(j\omega) = j\eta_i\omega^{-1} H_i(j\omega)$$

$$G(j\omega) = \left(1 + j\omega \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\eta_k^2 - \omega^2} \right)^{-1}$$

显然, 每个正弦跟踪器的状态变量 $\tilde{x}_i(t)$ 的相位总是比另一个状态 $x_i(t)$ 超前 $\pi/2$.

依据线性系统的叠加定理, 对于式 (13) 的 M 个正弦叠加的信号, 其状态转移函数形成 $N \times M$ 维矩阵

$$\mathbf{H}(j\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} H_1(j\omega_1) & \cdots & H_1(j\omega_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N(j\omega_1) & \cdots & H_N(j\omega_M) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(j\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1(j\omega_1) & \cdots & \tilde{H}_1(j\omega_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_N(j\omega_1) & \cdots & \tilde{H}_N(j\omega_M) \end{bmatrix}$$

频率参数 $\eta_1 \sim \eta_N$ 作为 N 个分割点, 把正频率轴分为 $N + 1$ 段, 如果信号的所有频率都位于分割点上, 即满足式 (14) 的条件, 状态转移函数矩阵为

$$\mathbf{H}(j\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} I_M \\ O \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}}(j\boldsymbol{\omega}) = j \begin{bmatrix} I_M \\ O \end{bmatrix}$$

当 $i = 1, 2, \dots, M$ 时, $x_i(t) = U_i \sin(\omega_i t + \delta_i)$, $\tilde{x}_i(t) = U_i \cos(\omega_i t + \delta_i)$, $a_i(t) = U_i$; 当 $i = M + 1, M + 2, \dots, N$ 时, $x_i(t) = \tilde{x}_i(t) = 0$, $a_i(t) = 0$. 从而命题成立. \square

当信号频率处于分割点之间, 即 $\omega_k \neq \eta_i$, 总有 $|H_i(j\omega_k)| < 1$, $\angle H_i(j\omega_k) \neq 0$, $|\tilde{H}_i(j\omega_k)| = \eta_i\omega_k^{-1}|H_i(j\omega_k)|$, $\angle \tilde{H}_i(j\omega_k) = \pi/2 + \angle H_i(j\omega_k)$, 这说明输入信号中频率不等于任何跟踪器的频率参数的分量, 不能被任何状态变量无幅值误差、无相位误差地准确跟随, 其能量分散到所有状态变量中, 会在

所有状态变量中产生周期振荡分量. 这是一种频域格栅效应.

定义跟随误差为 $e_i(t) = u_i(t) - x_i(t)$, 则其范围是

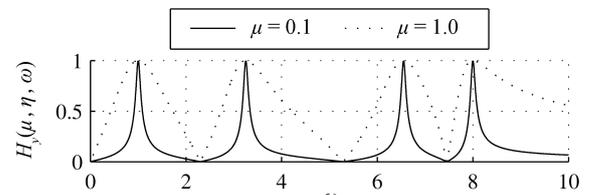
$$|e_i(t)| \leq |G(j\omega_i)| \left| 1 + j\omega_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{\mu_k}{\eta_k^2 - \omega_i^2} \right| U_i + \mu_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \left| \frac{G(j\omega_k)\omega_k U_k}{\eta_i^2 - \omega_k^2} \right|$$

除了输入分量的幅值以外, 影响误差的因素还包括两个方面: 首先是输入分量的频率与跟踪器的频率参数之差, 其差值越大则误差越大. 其次是带宽参数的影响, 增大 μ_i , 会减小 $|G(j\omega_i)|$, 从而减小分量 $u_i(t)$ 对误差 $e_i(t)$ 的贡献, 但同时会增大其他分量 $u_k(t)$ ($k \neq i$) 对 $e_i(t)$ 的贡献; 而增大其他跟踪器的 μ_k 会减小 $u_k(t)$ 对 $e_i(t)$ 的贡献. 这优于 DFT 算法中格栅效应不可调整的状况.

对于单个正弦输入, 系统输出的频率特性为

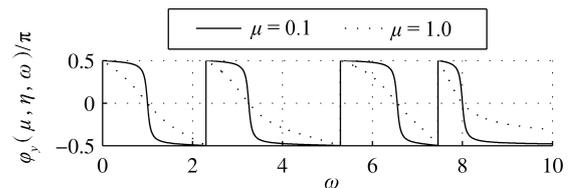
$$H_y(j\omega) = H_y(\omega)e^{j\varphi_y(\omega)} = \sum_{i=1}^N H_i(j\omega)$$

系统频率响应只与参数 μ_i , η_i , ω 的相对值有关. 设 $N = 4$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 分别等于 1, 3.25, 6.55, 8, 输入信号频率从 0~10 变化, 取所有的带宽参数都等于 μ , 图 2 是输出幅频特性曲线和相频特性曲线. 整个并联滤波器成为梳状滤波器, 在每个 η_i 处形成一个峰值为 1 的梳齿, 由于频率特性 $H_i(j\omega)$ 相互抵消,



(a) 幅频特性

(a) Amplitude-frequency characteristic



(b) 相频特性

(b) Phase-frequency characteristic

图 2 输出频率特性

Fig. 2 Frequency characteristics of proposed algorithm

使得在两个梳齿之间出现一个零点, 该频率值决定于全部的参数 μ_i 和 η_i , 系统具有陷波器的功效. μ_i 的大小决定对应幅频特性的梳齿的带宽, μ_i 越小梳齿通带越窄, 频率选择性越好, 同时两个梳齿之间的阻带越宽, 滤波器越趋向陷波器.

由于各个跟踪器的频率参数可以等于包括小数的任意正数, 可任意划分频率轴, 这与 DFT 算法中不能随意调整的等间隔划分不同, 方便非整数次间谐波的分析.

当信号中包含长周期的间谐波分量时, DFT 算法的数据窗长, 所保存的采样数据个数多, 信号跟随动态响应时间长. 本算法没有 DFT 算法那样严格的时域数据窗的要求, 不需要保存数据窗内的采样值, 动态响应速度按照指数收敛, 动态响应时间还可通过带宽参数的大小来调整, 可远小于间谐波分量的周期. 另外, 本算法的状态变量 $x_i(t)$ 和 $\tilde{x}_i(t)$ 直接作为输入分量的跟随及其超前 $\pi/2$ 的变量, 这较 DFT 算法与 APM 算法更方便实现信号跟踪.

在时间-频率坐标系上分析, DFT 算法是基于频率轴上的某个点, 通过对时间轴的一个区间的信息进行加权累加, 进而获得输入信号在该频率点的谱信息, 这种基于时域内积的算法, 具有较好的抗脉冲干扰性能. 而本算法是基于时间轴上的某个点, 通过对频率轴上多个频点的信息进行加权累加, 从而获得输入信号在该时刻的不同频率点处的谱信息. 对应频域分析的 DFT 方法, 新算法属于时域谱分析方法. 由于本文算法为线性时不变系统, 其性能尤其是暂态性能优于高度耦合的非线性的 APM 算法. 即使在每个跟踪器的参数都满足最佳参数条件、APM 算法等价于线性时不变系统的特殊情况下, 本文算法的参数个数也明显比 APM 算法少一半. 另外, 由于本文算法具有幅值鲁棒性, 多个跟踪器可以采用同一个带宽参数, 可大大减少计算量.

与小波变换和小波包分解相比, 本算法没有选择基函数的困扰, 计算量小, 实用性较强.

3 应用仿真

3.1 跟随性能

在下面的 Matlab 仿真中, 都选取采样频率为 10 kHz. 令基波角频率为 $\omega_0 = 100\pi$ rad/s, 设输入电压信号 $u(t)$ 单位为伏特 (V), 由四个平稳正弦成分组成, 各成分的频率已知, 分别为基频的 1.0, 3.25, 6.55, 8.0 倍, 表示为

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) = U_1 \sin(\omega_0 t + \delta_1) + U_2 \sin(3.25\omega_0 t + \delta_2) + U_3 \sin(6.55\omega_0 t + \delta_3) + U_4 \sin(8.0\omega_0 t + \delta_4) \quad (15)$$

各个分量的幅值和相角在不同时刻产生不同的变化, 如表 1 所示, 研究频率已知的理想情况下不同算法的跟随性能和幅值估计性能.

表 1 输入信号变化量及其发生时刻
Table 1 Increments of input with time

t	0.0s 初值	0.3s 增量	0.7s 增量	1.0s 增量	1.5s 增量
U_1	1.0	0.0	-0.2	$0.1 \sin(4\pi t)$	0.0
U_2	0.1	0.0	0.2	0.0	0.0
U_3	0.5	0.0	-0.3	$0.05 \sin(4\pi t)$	0.0
U_4	0.2	0.0	-0.2	0.0	0.0
δ_1	-0.8π	0.6π	0.0	0.0	-0.5π
δ_2	-0.3π	1.0π	0.0	0.0	-0.5π
δ_3	0.2π	-0.5π	0.0	0.0	0.6π
δ_4	0.7π	-0.9π	0.0	0.0	0.7π

在 DFT 算法中, 为获得精确分析结果, 需把基波频率减小为 $0.05\omega_0$, 而各个分量则对应于 20 次, 65 次, 131 次, 160 次谐波, 如选取数据窗长度为一个基波周期, 至少需要 0.4 s 输出才能跟随信号幅值或相角的跳变.

在本文算法与 APM 算法中, 分别采用 4 个跟踪器并联, 相应的频率参数都设为输入分量的频率. 设置本文算法的带宽参数以及 APM 算法的参数都为 200π . 每个状态变量的初始值都设为零, 仿真后各分量跟随误差及其幅值估计曲线分别如图 3~6 (见第 1425 页和 1426 页) 所示.

从起始时刻开始, 在图 3 中收敛最慢的 e_4 在 0.1 s 时也达到零值, 而图 5 中收敛最慢的 e_2 在 0.2 s 时才到零值, 图 4 收敛最慢的 a_4 在 0.08 s 即实现对 U_4 的无差跟随, 而图 6 收敛最慢的 a_2 在 0.1 s 时才实现无差跟随 U_2 . 说明本文算法的暂态收敛速度优于 APM 算法. 其原因主要是在 APM 算法中, 在 $\bar{\mu}_{i1} = \bar{\mu}_{i2}$ 条件下, 由于 U_2 最小, 使得 $\bar{\mu}_{21}$ 与 $\bar{\mu}_{22}U_2$ 之差最大, 针对 u_2 的跟踪器离最优参数条件最远, 其暂态时间最长. 而本文算法的每个跟踪器都等价于最优参数条件下的 APM 算法, 所以暂态时间都较短. 本文算法和 APM 两种算法的暂态响应时间都小于 DFT 算法精确分析所需要的时间窗长度, 两种算法的动态性能都优于 DFT 算法. 另外, 输入信号的各个分量幅值、相角的初值都不等于零, 而本文算法与 APM 算法的状态变量的初值都等于零, 这说明了两种算法对于由幅值与相角同时改变具有良好的跟踪性能.

在 $t = 0.3$ s 时, 保持各分量的幅值不变, 使相角产生不同大小、不同方向的跳变. 图 3 的暂态响应时间都小于 0.1 s, 而图 5 中 e_2 的暂态时间竟长达 0.22 s, 图 4 的暂态时间都小于 0.08 s, 而图 6 中 a_2 的响应时间长达 0.16 s, 说明在单纯相角跳变引起的

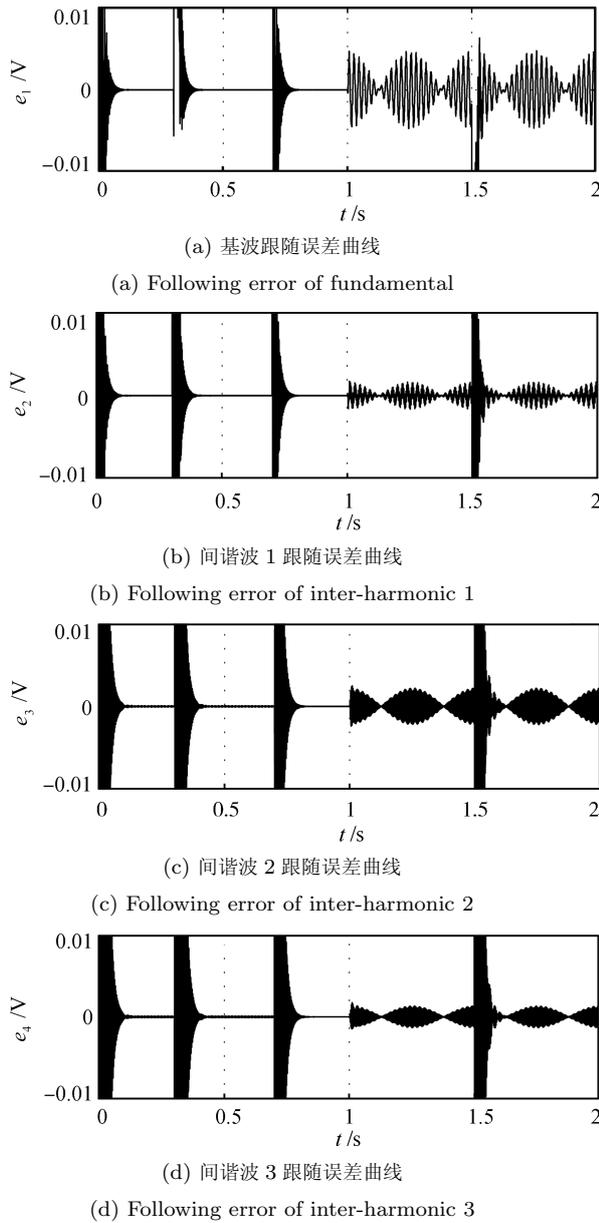


图 3 本文算法跟随误差曲线

Fig. 3 Following errors of proposed algorithm

暂态过程中, 本文算法跟随性能更优于 APM 算法.

在 $t = 0.7\text{s}$ 时, 保持各分量的相角不变, 使幅值产生不同大小、不同方向的跳变. 图 3 和图 4 的暂态响应时间约为 0.08s , 与 $t = 0.3\text{s}$ 时的暂态过程类似, 说明本文算法的鲁棒性较好, 图 5 和图 6 的暂态时间都小于 0.05s , 远小于 $t = 0.3\text{s}$ 时的暂态时间, APM 在不同情况下的跟随性能差别较大, 表明鲁棒性较差.

在 $t = 1.0\text{s}$ 时, 保持各分量的相角不变, 在幅值 U_1, U_3 上叠加频率等于 2Hz 、幅值分别为 0.1V , 0.05V 的正弦调制波. 图 4 和图 6 显示了本文算法与 APM 算法对各个分量幅值的准确跟随性能, 幅值

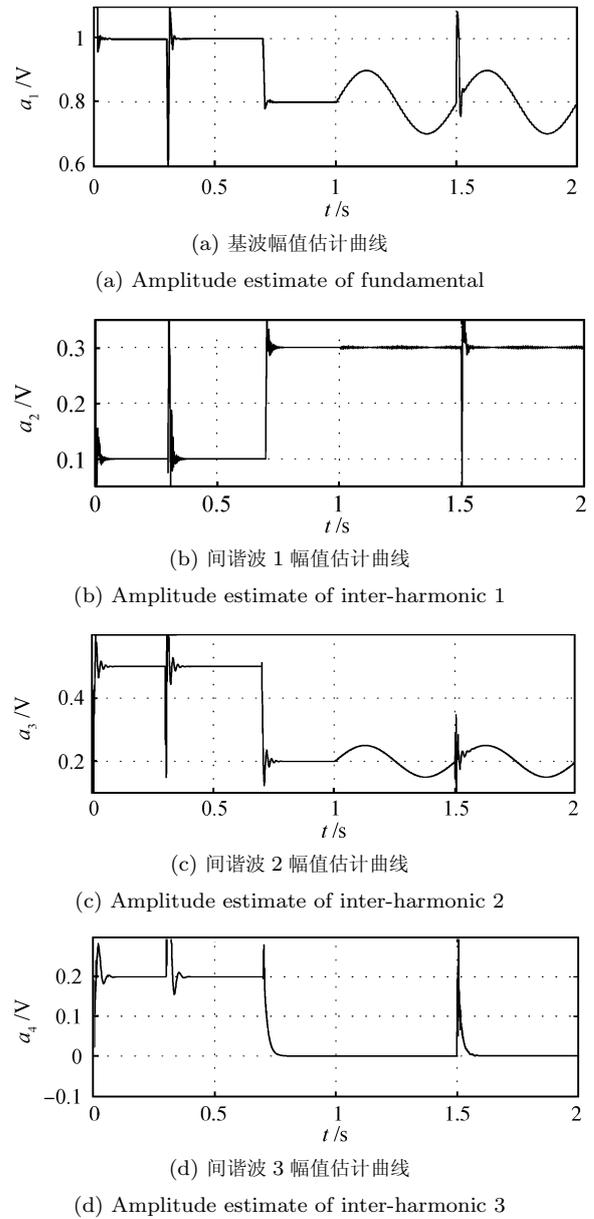


图 4 本文算法估计幅值曲线

Fig. 4 Estimates of amplitudes of proposed algorithm

调制等价于输入分量的频率不再等于跟踪器的频率参数, 故图 3 和图 5 中存在高频的跟随误差.

在 $t = 1.5\text{s}$ 时, 保持各分量的幅值不变, 使相角产生不同大小、不同方向的跳变, 图 4 和图 6 显示在过渡过程结束后, 两种算法仍然保持较好的幅值跟随性能.

3.2 频率格栅效应

在输入分量的实际频率与算法的设定频率有偏差时, 研究 DFT 算法、APM 算法以及本文所提出的 LST 算法在稳态时的频率格栅效应. 设输入信号及其正弦分量仍然为式 (15), 其幅值为表 2 中的真值. 在三种算法中, 都将其当作频率为 $1.0\omega_0, 3.5\omega_0$,

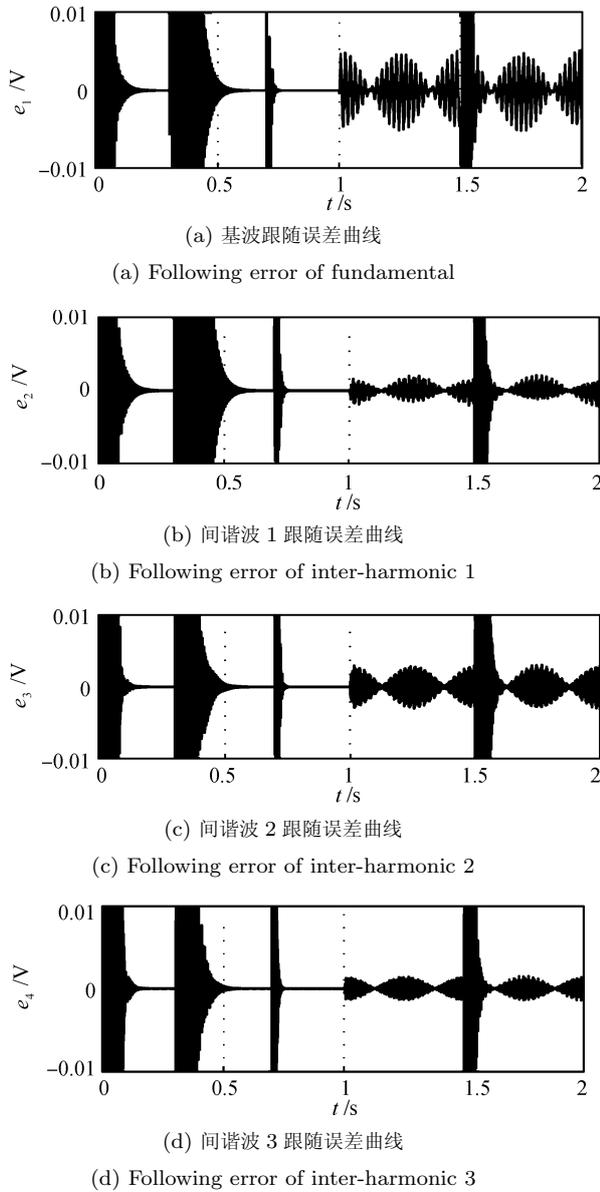


图 5 APM 算法跟随误差曲线
Fig.5 Following error of APM

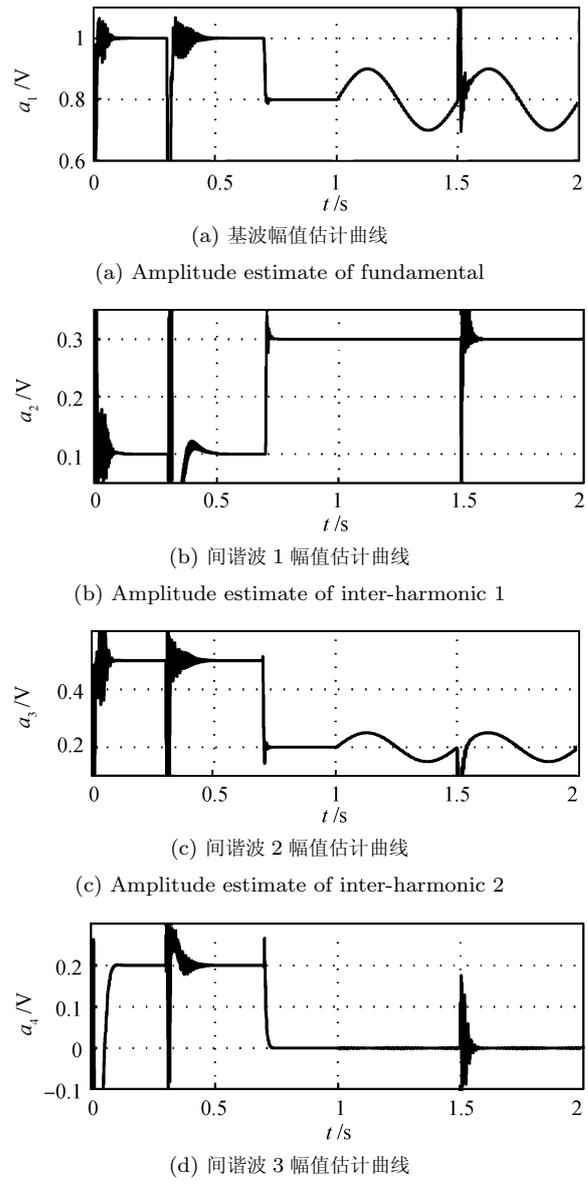


图 6 APM 算法估计幅值曲线
Fig.6 Estimates of amplitude of APM

6.5 ω_0 , 8.0 ω_0 的四个分量处理, 其估计幅值依次记为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 分析结果列在表 2 中. 表中数据为“中心值 \pm 偏差值”结构.

在 DFT 算法中, 基波频率设为 $0.5\omega_0$, 以 $T_W = 2\pi/(0.5\omega_0) = 0.04\text{s}$ 为数据窗长度, a_1, a_2, a_3, a_4 分别为 2 次, 7 次, 13 次与 16 次谐波的幅值.

在本文所提的并联 LST 算法中, 可以认为 a_1 和 a_4 对应的频率参数没有偏差, 而 a_2 和 a_3 对应的频率参数有偏差, 因此设定参数 $\mu_1 = \mu_4, \mu_2 = \mu_3$, 分四种情况进行仿真. 对于频率参数没有偏差的 a_1 和 a_4 , 其中心总等于真值. 频率参数存在偏差的 a_2 和 a_3 , 其中心与真值总有偏差, 频率偏差越大则幅值偏

差越大, 而带宽参数增大则幅值偏差减小. 当带宽参数 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 200\pi$ 时, 本文算法的精确性近似于 DFT 算法, 而当 $\mu_1 = \mu_4 = 20\pi, \mu_2 = \mu_3 = 200\pi$ 时, 本文算法的精确性优于 DFT 算法. 一方面是因为较小的 μ_1 减小了其他分量对 a_1 的影响, 较小的 μ_4 减小了其他分量对 a_4 的影响, a_1 和 a_4 上叠加的高频振荡幅度很小, 而由于二者的频率参数没有偏差, 幅值中心等于真值, 因此能够获得精确的检测结果. 另一方面, 较大的 μ_2, μ_3 减小了频率偏差造成的估计幅值 a_2 和 a_3 中心的偏移, 使得本文算法的检测结果比 DFT 算法更精确.

把 APM 算法中第 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 个跟踪器的

表 2 三种算法的频率格栅效应
Table 2 Frequency grid effects of the three algorithms

估计值及其真值		$a_1 = 0.8$	$a_2 = 0.2$	$a_3 = 0.2$	$a_4 = 0.2$
LST	DFT	0.80 ± 0.022	0.125 ± 0.010	0.196 ± 0.012	0.008 ± 0.008
	$\mu_{1,4}=200\pi$ $\mu_{2,3}=20\pi$	0.80 ± 0.150	0.078 ± 0.006	0.198 ± 0.008	0.070 ± 0.060
	$\mu_{1,4}=20\pi$ $\mu_{2,3}=20\pi$	0.80 ± 0.015	0.075 ± 0.006	0.176 ± 0.008	0.006 ± 0.006
	$\mu_{1,4}=200\pi$ $\mu_{2,3}=200\pi$	0.80 ± 0.040	0.219 ± 0.011	0.199 ± 0.003	0.012 ± 0.012
	$\mu_{1,4}=20\pi$ $\mu_{2,3}=200\pi$	0.80 ± 0.003	0.193 ± 0.010	0.197 ± 0.018	0.001 ± 0.001
	$\mu_{1,4}=200\pi$ $\mu_{2,3}=20\pi$	0.80 ± 0.180	0.00 ± 0.070	0.00 ± 0.175	0.00 ± 0.160
APM	$\mu_{1,4}=20\pi$ $\mu_{2,3}=20\pi$	0.80 ± 0.018	0.00 ± 0.080	0.00 ± 0.180	0.00 ± 0.020
	$\mu_{1,4}=200\pi$ $\mu_{2,3}=200\pi$	0.80 ± 0.150	0.00 ± 0.230	0.17 ± 0.100	0.00 ± 0.080
	$\mu_{1,4}=20\pi$ $\mu_{2,3}=200\pi$	0.80 ± 0.015	0.00 ± 0.210	0.17 ± 0.090	0.00 ± 0.009
	$\mu_{1,4}=200\pi$ $\mu_{2,3}=200\pi$	0.80 ± 0.015	0.00 ± 0.210	0.17 ± 0.090	0.00 ± 0.009

两个参数 $\bar{\mu}_{i1}$ 与 $\bar{\mu}_{i2}$ 设定为相同值, 并等于本文算法中第 i 个跟踪器的带宽参数 μ_i , 对应 LST 算法的四种参数组合的检测结果列在表 2 中. 与本文算法相比, 在相同参数下 APM 的性能较差. 尤其是 a_2 的中心与真值相差太远, 当 $\mu_2 = \mu_3 = 200\pi$ 时, a_2 的振荡幅度甚至超过真值大小, 显示该 APM 跟踪器是不稳定的. 当 $\mu_2 = \mu_3 = 20\pi$ 时, a_3 与此类似. 这也说明 APM 算法的参数调整比较困难.

4 结论

采用梯度自适应的最小方差算法, 经旋转变换获得二维线性正弦跟踪滤波器, 多个跟踪器并联获得带宽可调的多频点梳状滤波器, 用于信号时频分析, 能跟随信号中不同频率的正弦分量并估计其幅值. 把频率参数设置为整数或小数, 方便实现对频率已知的谐波或间谐波的准确跟随和幅值估计. 当输入信号所有正弦分量的频率都落在并联滤波器的频率参数上, 算法可以精确地估计每个正弦分量本身及其幅值, 还可得到幅值相同而相位超前 $\pi/2$ 的信号. 当输入信号的某个正弦分量的频率不等于并联滤波器的任何频率参数时, 存在频域格栅效应, 导致所有分量的跟随值及其估计幅值产生高频振荡. 通过增加滤波器的个数, 对频率轴精细划分或者采用窄带滤波, 可提高整体的分析性能.

附录 命题 1 的证明

系统 (6) 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.5\mu \pm 0.5\sqrt{\mu^2 - 4\eta^2}$$

当 $\mu > 0$ 时, 系统是全局一致渐近稳定的, 收敛速度主要决定于参数 μ , μ 越小收敛越慢.

当输入式 (1) 的单个正弦信号时, 系统 (6) 的稳态状态为

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(\mu, \eta, \omega)U \sin(\omega t + \delta + \varphi(\mu, \eta, \omega)) \\ \tilde{H}(\mu, \eta, \omega)U \cos(\omega t + \delta + \varphi(\mu, \eta, \omega)) \end{bmatrix}$$

其中

$$H(\mu, \eta, \omega) = \frac{\mu\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + (\eta^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\tilde{H}(\mu, \eta, \omega) = \frac{\mu\eta}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + (\eta^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\varphi(\mu, \eta, \omega) = \arctan\left(\frac{\eta^2 - \omega^2}{\mu^2\omega^2}\right)$$

若 $\eta = \omega$, 则 $H(\mu, \eta, \omega) = \tilde{H}(\mu, \eta, \omega) = 1$, $\varphi(\mu, \eta, \omega) = 0$, 于是 $x(t) = u(t)$, $a(t) = U$.

若要求幅频特性满足

$$H(\mu, \eta, \omega) \geq \frac{1}{\xi}, \quad \xi \geq 1$$

只考虑 $\omega > 0$, 则有

$$\left| \omega - \sqrt{\eta^2 + 0.25\mu^2(\xi^2 - 1)} \right| \leq 0.5\mu\sqrt{\xi^2 - 1}$$

以 $\sqrt{\eta^2 + 0.25\mu^2(\xi^2 - 1)}$ 为中心对应幅频响应要求的带宽为 $W_b = \mu\sqrt{\xi^2 - 1}$. 当 $\xi = \sqrt{2}$ 时, $W_b = \mu$, 所以 μ 的数值等于 -3 dB 对应的带宽.

References

- Owen E L. A history of harmonics in power systems. *IEEE Industry Applications Magazine*, 1998, 4(1): 6–12
- Hidalgo R M, Fernandez J G, Rivera R R, Larrondo H A. A simple adjustable window algorithm to improve FFT measurements. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2002, 51(1): 31–36
- Zhang F S, Geng Z X, Yuan W. The algorithm of interpolating windowed FFT for harmonic analysis of electric power system. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2001, 16(2): 160–164

- 4 Testa A, Gallo D, Langella R. On the processing of harmonics and interharmonics: using Hanning window in standard framework. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2004, **19**(1): 28–34
- 5 Sozanski K P. The shunt active power filter with better dynamic performance. In: Proceedings of IEEE Lausanne Power Tech. Lausanne. Washington D. C., USA: IEEE, 2007. 1504–1508
- 6 Darwish H A H, Fikri M. Practical considerations for recursive DFT implementation in numerical relays. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2007, **22**(1): 42–49
- 7 Hamid E Y, Kawasaki Z I. Instrument for the quality analysis of power systems based on the wavelet packet transform. *IEEE Power Engineering Review*, 2002, **22**(3): 52–54
- 8 Tarasiuk T. Hybrid wavelet-fourier method for harmonics and harmonic subgroups measurement-case study. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2007, **22**(1): 4–17
- 9 Zhou Lin, Xia Xue, Wan Yun-Jie, Zhang Hai, Lei Peng. Harmonic detection based on wavelet transform. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2006, **21**(9): 67–74 (周林, 夏雪, 万蕴杰, 张海, 雷鹏. 基于小波变换的谐波测量方法综述. 电工技术学报, 2006, **21**(9): 67–74)
- 10 Karimi-Ghartemani M, Iravani M R. A nonlinear adaptive filter for online signal analysis in power systems: applications. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2002, **17**(2): 617–622
- 11 Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. Periodic orbit analysis of two dynamical systems for electrical engineering applications. *Journal of Engineering Mathematics*, 2003, **45**(2): 135–154
- 12 Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. Performance characterization of a nonlinear system as both an adaptive notch filter and a phase-locked loop. *International Journal of Adaptive Control and Signal Process*, 2004, **18**(1): 23–53
- 13 Ziarani A K, Konrad A. A method of extraction of non-stationary sinusoids. *Signal Processing*, 2004, **84**(8): 1323–1346
- 14 Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. A nonlinear time-frequency analysis method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, **52**(6): 1585–1595
- 15 Karimi-Ghartemani M, Iravani M R. Measurement of harmonics/inter-harmonics of time-varying frequencies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2005, **20**(1): 23–31
- 16 McNamara D M, Ziarani A K, Ortmeier T H. A new technique of measurement of nonstationary harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2007, **22**(1): 387–395
- 17 Girgis A A, Chang W B, Makram E B. A digital recursive measurement scheme for on-line tracking of power system harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 1991, **6**(3): 1153–1160
- 18 Khalil H K [Author], Zhu Yi-Sheng, Dong Hui, Li Zuo-Zhou [Translator]. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005. 89–93 (Khalil H K [著], 朱义胜, 董辉, 李作洲 [译]. 非线性系统. 北京: 电子工业出版社, 2005. 89–93)
- 19 Zhang Xian-Da. *Matrix Analysis and Applications*. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 56–71 (张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004. 56–71)



储昭碧 合肥工业大学讲师, 博士研究生. 主要研究方向为电能质量. 本文通信作者. E-mail: chuzhaobi@126.com (CHU Zhao-Bi Lecturer and Ph. D. candidate at Hefei University of Technology. His main research interest is power quality. Corresponding author of this paper.)



张崇巍 合肥工业大学教授. 主要研究方向为电力电子技术. E-mail: cwzhang@hfut.edu.cn (ZHANG Chong-Wei Professor at Hefei University of Technology. His main research interest is power electron technology.)



冯小英 合肥工业大学高级实验师. 主要研究方向为检测技术与自动化. E-mail: czbfxy@126.com (FENG Xiao-Ying Senior laboratory assistant at Hefei University of Technology. Her research interest covers measurement and automation.)