

具有马氏跳跃参数的切削加工 系统控制问题研究

董奕凡¹ 康宇¹ 奚宏生¹

摘要 以单刀具垂直切削加工系统为研究对象, 引入了变进给量控制方法, 建立了具有 Markov 跳跃参数的时变时滞跳跃系统模型. 通过对系统的随机稳定性分析, 给出了使系统呈均方意义下指数稳定的充分条件, 同时研究了在系统参数矩阵和状态转移率非精确可知情形下的鲁棒稳定性条件, 并讨论了时变时滞参数对系统状态变量指数衰减速率的影响关系. 最后以仿真算例说明了本文所提方案的有效性.

关键词 单刀具垂直切削, Markov 跳跃系统, 时变时滞, 均方指数稳定

中图分类号 TP13

Control of Cutting Systems with Markovian Jump Parameters

DONG Yi-Fan¹ KANG Yu¹ XI Hong-Sheng¹

Abstract This paper is concerned with exponential stability of a single-tool orthogonal cutting system, which is modelled as a Markovian jump system with time-varying delay. A new method using varying feed rate control is presented. Sufficient conditions for exponential stability in the mean square sense are obtained using the Lyapunov-Krasovskii functional (LKF) method. Furthermore, a robust stochastic stability criterion is established for the discussed system, in which the system matrices and the mode transition rate are partially known. The effects of delay parameters on the exponential convergence rate of the system states are also discussed. An illustrative numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words Single-tool orthogonal cutting, Markovian jump system, time-varying delay, exponential stability in the mean square sense

切削系统是一种典型的机械加工系统. 随着生产的发展, 机械加工的自动化程度越来越高, 对机械加工中的颤振现象进行有效控制, 大幅度提高机床切削系统的稳定性已成为现代加工业不可回避的重要问题. 变速加工是一种提高切削加工系统稳定性、抑制颤振的有效手段. 所谓变速切削即机床主轴转速围绕某一基本转速, 以一定的变速波形、一定的变速幅度和一定的变速频率作周期性变化, 是一种使用范围较广且效果较好的振动控制方法, 已经引起国内外学者的广泛关注, 并取得了大量的研究成果.

但在现有理论文献的分析中, 都是通过调整工件转速来实现系统稳定域的增加^[1-2]. 本文首先分析单刀具垂直切削的物理模型, 在考虑了机床主轴变速调控方法的同时, 引入

收稿日期 2008-07-01 收修改稿日期 2009-04-28

Received July 1, 2008; in revised form April 28, 2009

国家自然科学基金 (60704007, 60774038), 安徽省重大科技专项基金 (08010202038), 安徽省优秀青年科技基金资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60704007, 60774038), Important Sci-Tech Special Projects of Anhui Province (08010202038), Science and Technological Fund of Anhui Province for Outstanding Youth

1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027

1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01356

了基于状态反馈的切换型变进给量控制方法以更好地抑制颤振现象,这在以往文献中是没有被研究过的.同时,在现有研究中对变速切削加工系统的建模分析大多以单一模型来描述^[3].而对于实际的切削加工系统,系统的切削力受多种参数的影响,切削力的计算方式也非常复杂,工作环境中的很多因素都会造成切削力的变化,从而导致其刻画系统模型的变化.例如切削过程中需要切削液不断地进行冷却,一旦切削液的供应发生故障,那么会很快改变切削热场,而不论工件、刀具还是机床本身,都会因受不稳定切削热场的作用而导致相对位置发生变化,进而改变名义切削深度,改变切削力.又如走刀过程中刀具磨损变形的方向也是不一定的,会直接修正切削力,刀具沿工件轴向的变形对切削力的影响程度最小,沿工件径向的变形影响程度最大,沿工件切向的变形影响程度次之.因此仅用单一动态模型已经不能精确地描述由于受到上述因素影响而实时随机变化的动态切削加工系统.故将随机变化的实际动态系统划分成若干模态,模态之间的相互转化服从一定的概率分布,从而建模为具有跳跃参数的不确定随机混合动态系统不失为一种更合理的方法.

需要注意的是,系统模态之间的转移率矩阵实际上是由大量事实统计得来的,只是一个估计值或者说是一个基准值,不可避免地会出现估计误差,而这些误差同样会影响系统的稳定性^[4].因此,在建立混合动态系统模型的同时要考虑到转移率的不确定性并进行分析,也是本文的主要工作之一.

同时,变速切削系统是时变时滞系统^[2].在大多数时变时滞系统的理论研究中,由于时滞没有具体形式,很难从细部特征刻画时变时滞参数与闭环系统动态性能之间的内在联系.将实际切削系统的时变时滞参数特征考虑到系统的稳定性分析中,讨论时滞参数对系统状态变量指数衰减速率的影响关系来控制转速,从而实现颤振的快速衰减,这对于充分发挥变速切削的优势,提高切削加工系统的生产效率和稳定性具有重要意义.

本文从实际系统的动力学方程出发,首先分析了工件转速与时滞参数的关系,并在考虑参数模态变化的基础上建立了带有马氏参数的时滞跳跃系统模型.在此模型的基础上,对系统的均方指数稳定性进行了研究,并定性分析了时滞的若干特定参数对系统指数衰减速率造成的影响.

1 系统描述

1.1 简单切削加工系统建模

为方便分析,考虑只有一个横向自由度的单刀具垂直切削系统^[2-3],如图 1 所示.

由牛顿第二定律,对刀具进行受力分析,可得如下动力学方程^[5-6]:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + k[y(t) + y_p] = F(t) \cos \beta \quad (1)$$

其中, $y(t)$ 为切削的相对偏移厚度,它反映了在 t 时刻切削过程的波动情况,即切削加工系统常见的颤振现象. y_p 指弹簧的静态压缩部分,即平稳切削时 ($\dot{y}(t) = 0$) 弹簧的压缩长度,一般为恒值. m 为刀具以及刀具架的总质量, c 为阻尼器的阻尼系数, k 为弹簧的弹性系数, β 为某一固定的受力角度. $F(t)$ 为刀具与工件的接触面实时所受的切削力,近似满足 $F(t) = Cbh(t)$, 其中, C 为比例常数, b 为切削宽度, $h(t)$ 为实时切削厚度,即 $F(t)$ 与接触面积 $bh(t)$ 成正比.

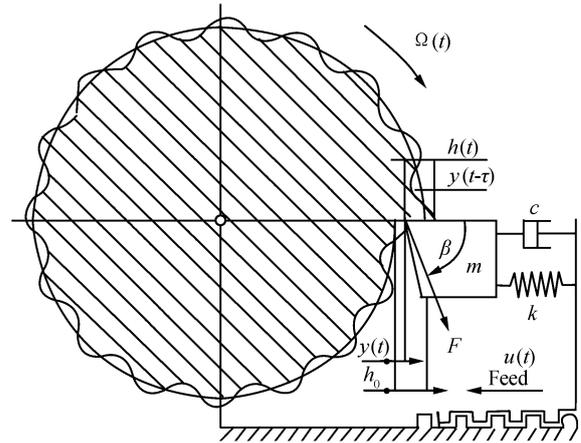


图 1 切削系统模型
Fig. 1 Orthogonal cutting system

由图 1 中可以看出,假定在工件旋转一周的时间内给定刀具的进给量为 h_0 ,则当系统达到稳定状态,即 $y(t) \equiv 0$ 时,由刀具受力平衡可得方程 $Cbh_0 \cos \beta = ky_p$.

为了更好地抑制颤振 $y(t)$,我们在考虑变速加工方法的同时,引入受控的变进给量 $u(t)$,则刀具的期望进给量 h_0 与实际进给量 $h(t)$ 满足关系 $h(t) = h_0 - y(t) + y(t - \tau(t)) + u(t)$.其中, $\tau(t)$ 表示工件旋转一周所需的时间,因而 $y(t - \tau(t))$ 表示了前一周期同一径向上的相对偏移厚度.以上方向均以向右为正.

综合以上分析,可以得到如下二阶系统方程:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = Cb \cos \beta [u(t) - y(t) + y(t - \tau(t))] \quad (2)$$

令 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$,则方程转化为常见的时滞线性系统形式:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}u(t) \quad (3)$$

这只是切削加工最简单的模型,实际应用时的系统模型要复杂许多,但它们具有一个最基本特征就是再生特质,即时滞性.并且这些时滞具有一些特定的形式,可以为我们对时滞系统的分析带来方便.

1.2 时变时滞分析

由于是变速切削,系统 (3) 的时滞是时变的, $\tau(t)$ 与工件的转速 $\Omega(t)$ 满足关系: $\int_{t-\tau(t)}^t \frac{\Omega(s)}{60} ds = 1$.同时,变速切削要求工件的旋转速度 $\Omega(t)$ 在一个基准值附近作微小的周期性变动,即:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + Af(\omega t) \quad (4)$$

其中, Ω_0 为基准转速, $f: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$ 为周期函数,频率为 ω , A 为变动幅度.一般 A 不允许超过基准值的 20%.

Insperger 等^[2]指出具有如上形式转速的切削系统,其周期时滞 $\tau(t)$ 也具有近似相同的形式,即:

$$\tau(t) = \tau_0 + \delta f(\omega t) \quad (5)$$

其中类似地, $f: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$, $\delta < 0.2\tau_0$.

式 (4) 的优点是便于实现,而式 (5) 的优点是便于理论分析.在建立了转速与时滞间的关系后,我们就可以从理论

上分析时滞对系统稳定性的影响,从而在实际控制过程中通过控制转速来实现切削加工系统性能优化的优化。

关于时滞的形式,常见的有以下 3 种(假定周期为 T):

- 1) 正弦形式,即: $\tau(t) = \tau_0 + \delta \sin(2\pi t/T)$;
- 2) 上行锯齿波,即: $\tau(t) = \tau_0 + \delta[-1 + 2(t \bmod T)/T]$;
- 3) 下行锯齿波,即: $\tau(t) = \tau_0 + \delta[1 - 2(t \bmod T)/T]$.

其中, $t \bmod T$ 表示 t 被 T 除取余值. Insperger 等^[2]对这 3 种时滞形式进行了稳定域比较仿真,并且指出正弦形式具有最佳表现. 基于此,本文所讨论的时滞形式定义如下:

$$\tau(t) = \tau_0 + \delta \sin(\omega t) \quad (6)$$

并假定 $\tau(t) \leq \tau_0 + \delta < \infty$, $\dot{\tau}(t) = \delta\omega \cos(\omega t) \leq \delta\omega < 1$. 记 $\tau_m = \tau_0 + \delta$, $h = \delta\omega$.

1.3 带有 Markov 跳跃参数的不确定时滞系统建模

如前所述,在实际的切削加工系统中,工作环境中的很多因素都会造成切削力的随机变化. 如果将这种随机变化分成若干模式,并且假设模式之间的转化服从马氏分布,则可以将切削加工系统建模为具有 Markov 跳跃参数的随机混合动态系统.

定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, 其中, Ω 为样本空间, \mathcal{F} 为样本空间子集的 σ -代数, \mathcal{P} 为概率测度. 基于此概率空间,并考虑建模参数的不确定性,在系统 (3) 基础上建立跳跃系统模型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= [A(r_t) + \Delta A(t, r_t)]\mathbf{x}(t) + [A_d(r_t) + \\ &\quad \Delta A_d(t, r_t)]\mathbf{x}(t - \tau(t)) + [B(r_t) + \Delta B(t, r_t)]\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= \Phi(t), \quad \forall t \in [-\tau_m, 0] \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\Phi(t)$ 为系统初始状态向量, $\{r_t\}$ 是定义在有限状态空间 $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ 上的连续时间 Markov 过程, 其状态转移概率为

$$\Pr\{r_{t+\Delta} = j | r_t = i\} = \begin{cases} \hat{\pi}_{ij}\Delta + o(h), & i \neq j \\ 1 + \hat{\pi}_{ii}\Delta + o(h), & i = j \end{cases}$$

其中, $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} (o(\Delta)/\Delta) = 0$ ($\Delta > 0$), $\hat{\pi}_{ij}$ 表示 t 时刻的模式 i 在 $t + \Delta$ 时刻转移到模式 j 的转移率, 且 $\hat{\pi}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \hat{\pi}_{ij}$, $\hat{\pi}_{ij} \geq 0$. 在转移概率不确定的情形下, $\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij} + \Delta\pi_{ij}$, $\forall i, j \in \mathcal{S}$. 其中, π_{ij} 表示状态转移率的估计值或标称值, 亦满足 $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$, $\pi_{ij} \geq 0$. $\Delta\pi_{ij}$ 表示状态转移率建模误差, 且满足:

$$|\Delta\pi_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} > 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{S}, \quad j \neq i \quad (8)$$

$A(r_t)$, $A_d(r_t)$, $B(r_t)$ 为适当维已知定常矩阵, $\Delta A(t, r_t)$, $\Delta A_d(t, r_t)$, $\Delta B(t, r_t)$ 为非精确可知的时变矩阵, 并假定对 $\forall r_t \in \mathcal{S}$ 具有如下形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t, r_t) & \Delta A_d(t, r_t) & \Delta B(t, r_t) \\ H(r_t) \times F(t, r_t) \begin{bmatrix} E_a(r_t) & E_d(r_t) & E_b(r_t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \quad (9)$$

其中, $H(r_t)$ 、 $E_a(r_t)$ 、 $E_d(r_t)$ 、 $E_b(r_t)$ 为适当维已知常矩阵, $F(t, r_t)$ 为不确定因子, 且满足:

$$F^T(t, r_t)F(t, r_t) \leq I, \quad \forall r_t \in \mathcal{S} \quad (10)$$

为书写方便,用下标 i 表示模式 $r_t = i$, 如 $A_i = A(r_t = i)$.

2 均方指数稳定性分析

2.1 预备知识

注意到 $\{(\mathbf{x}(t), r_t), t \geq 0\}$ 并不是 Markov 过程, 为使系统模型定义在 Markov 过程的框架内, 记 $\mathbf{C}_0 = \bigcup_{i \in \mathcal{S}} \mathbf{C}[-\tau_m, 0] \times \{i\}$. 其中, $\mathbf{C}[-\tau_m, 0]$ 是定义在区间 $[-\tau_m, 0]$ 上的连续函数空间. 定义 $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-\tau_m, 0]$. 类似地^[7-8], 可以证明 $\{(\mathbf{x}_t, r_t), t \geq 0\}$ 是具有状态空间 \mathbf{C}_0 的连续 Markov 过程. 接下来我们给出如下引理.

引理 1^[9]. 给定适当维矩阵 $H, E, Q = Q^T, R = R^T > 0$, 则对 $\forall F \in \{F : F^T F \leq R\}$, 不等式

$$Q + HFE + E^T F^T H^T < 0$$

成立的充要条件是存在实数 $\rho > 0$, 使得不等式

$$Q + \rho HH^T + \rho^{-1} E^T R E < 0$$

成立.

引理 2. 给定矩阵 $E' = E'^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $E = E^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 且满足 $E' - E > 0$, 则有 $\lambda_{\max}(E') > \lambda_{\max}(E)$.

2.2 确定性时滞系统均方指数稳定性

对于系统 (7) 在参数确定条件下的情形, 即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(r_t)\mathbf{x}(t) + A_d(r_t)\mathbf{x}(t - \tau(t)) + B(r_t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= \Phi(t), \quad \forall t \in [-\tau_m, 0] \end{aligned} \quad (11)$$

取状态反馈控制律: $\mathbf{u}(t) = K(r_t)\mathbf{x}(t)$. 其中 $K(r_t) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($r_t \in \mathcal{S}$) 为待设计的控制器矩阵.

为得到本文相关结论, 首先利用类似文献 [10] 的分析方法, 给出如下定理.

定理 1. 对于时变时滞跳跃系统 (11), 在 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ 时, 若存在正定矩阵 $P_i > 0$ ($i \in \mathcal{S}$), $Q > 0$ 使得下列耦合不等式

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q & P_i A_{di} \\ A_{di}^T P_i & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

成立, 则系统呈均方意义下指数稳定.

证明. 见附录 A. □

定理 2. 对于时变时滞跳跃系统 (11), 若存在正定矩阵 $P_i > 0$ ($i \in \mathcal{S}$), $Q > 0$ 和矩阵 K_i ($i \in \mathcal{S}$) 使得不等式

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q & P_i A_{di} & P_i B_i & K_i^T \\ A_{di}^T P_i & -Q & 0 & 0 \\ B_i^T P_i & 0 & -I & 0 \\ K_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立, 则系统在状态反馈控制律 $\mathbf{u}(t) = K_i \mathbf{x}(t)$ 的作用下呈均方意义下指数稳定.

证明. 见附录 B. □

2.3 参数不确定时滞系统均方指数稳定性

考虑到系统矩阵参数的不确定性以及转移率的估计误差, 我们得到如下定理.

定理 3. 对于不确定时变时滞跳跃系统 (7), 在 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ 时, 若存在正定矩阵 $P_i > 0$ ($i \in \mathcal{S}$), $Q > 0$, 常数 $q_i >$

0, $\lambda_{ij} > 0 (i, j \in \mathcal{S}, j \neq i)$ 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega_i + q_i E_{ai}^T E_{ai} & P_i A_{di} + q_i E_{ai}^T E_{di} & M_i & P_i H_i \\ A_{di}^T P_i + q_i E_{di}^T E_{ai} & -Q + q_i E_{di}^T E_{di} & 0 & 0 \\ M_i^T & 0 & -\Lambda_i & 0 \\ H_i^T P_i & 0 & 0 & -q_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

成立, 则系统呈均方意义下指数稳定. 其中

$$\begin{aligned} \Omega_i &= A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} \frac{\varepsilon_{ij}^2}{4} I \\ M_i &= [P_i - P_1, P_i - P_2, \dots, P_i - P_{i-1}, P_i - P_{i+1}, \dots, P_i - P_N] \\ \Lambda_i &= \text{diag}\{\lambda_{i1} I, \lambda_{i2} I, \dots, \lambda_{i(i-1)} I, \lambda_{i(i+1)} I, \dots, \lambda_{iN} I\} \end{aligned}$$

证明. 将式 (12) 中的 A_i, A_{di}, π_{ij} 分别替换为 $A_i + \Delta A_i(t), A_{di} + \Delta A_{di}(t), \pi_{ij} + \Delta \pi_{ij}$, 结合定理 1, 引理 1 及式 (8)~(10), 并注意到 $\sum_{j=1}^N \Delta \pi_{ij} P_j = \sum_{j=1, j \neq i}^N \Delta \pi_{ij} (P_j - P_i)$, 可知系统均方指数稳定的充分条件为存在正定矩阵 $P_i > 0 (i \in \mathcal{S}), Q > 0$, 使得式

$$\begin{bmatrix} \Omega_i + q_i E_{ai}^T E_{ai} & P_i A_{di} + q_i E_{ai}^T E_{di} \\ A_{di}^T P_i + q_i E_{di}^T E_{ai} & -Q + q_i E_{di}^T E_{di} \end{bmatrix} + q_i^{-1} \begin{bmatrix} P_i H_i \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_i^T P_i & 0 \\ \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}^{-1} (P_j - P_i)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

成立, 其中, $q_i > 0, \lambda_{ij} > 0, \Omega_i = A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} \frac{\varepsilon_{ij}^2}{4} I$. 再由 Schur 补引理, 即得式 (14). \square

注 1. 注意到新的 Ω_i 中所含耦合项比原本多出了 $\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} \frac{\varepsilon_{ij}^2}{4} I$ 一项, 这正是由转移率矩阵的统计误差给系统稳定性条件带来的影响.

注 2. 对比定理 1 和定理 3 可发现, 定理 1 是定理 3 的一个特例. 这是因为若定理 3 成立, 则有

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q & P_i A_{di} + \Phi_i \\ A_{di}^T P_i & -Q + q_i E_{di}^T E_{di} \end{bmatrix} < 0$$

其中, $\Phi_i = q_i^{-1} P_i H_i H_i^T P_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}^{-1} (P_j - P_i)^2 + q_i E_{ai}^T E_{ai} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} \frac{\varepsilon_{ij}^2}{4} I$. 从而由上式可直接推知式 (12) 成立.

以下考虑设计状态反馈控制器 $K(r_t) \in \mathbf{R}^{m \times n} (r_t \in \mathcal{S})$ 使得系统 (7) 保持均方意义下的指数稳定.

定理 4. 对于不确定时变时滞跳跃系统 (7), 若存在正定矩阵 $P_i > 0 (i \in \mathcal{S}), Q > 0$, 常数 $q_i > 0, \lambda_{ij} > 0 (i, j \in \mathcal{S}, j \neq i)$ 和矩阵 $K_i (i \in \mathcal{S})$, 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} + q_i E_{ai}^T E_{ai} & \Psi_{12i} & \Psi_{13i} & K_i^T & M_i & P_i H_i \\ \Psi_{21i} & \Psi_{22i} & \Psi_{23i} & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{31i} & \Psi_{32i} & \Psi_{33i} & 0 & 0 & 0 \\ K_i & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ M_i^T & 0 & 0 & 0 & -\Lambda_i & 0 \\ H_i^T P_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

成立, 则系统在状态反馈控制律 $u(t) = K_i x(t)$ 的作用下呈

均方意义下指数稳定. 其中

$$\begin{aligned} \Psi_{11i} &= A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} \frac{\varepsilon_{ij}^2}{4} I \\ \Psi_{12i} &= P_i A_{di} + q_i E_{ai}^T E_{di}, & \Psi_{13i} &= P_i B_i + q_i E_{ai}^T E_{bi} \\ \Psi_{21i} &= A_{di}^T P_i + q_i E_{di}^T E_{ai}, & \Psi_{22i} &= -Q + q_i E_{di}^T E_{di} \\ \Psi_{23i} &= q_i E_{di}^T E_{bi}, & \Psi_{31i} &= B_i^T P_i + q_i E_{bi}^T E_{ai} \\ \Psi_{32i} &= q_i E_{bi}^T E_{di}, & \Psi_{33i} &= -I + q_i E_{bi}^T E_{bi} \\ M_i &= [P_i - P_1, P_i - P_2, \dots, P_i - P_{i-1}, P_i - P_{i+1}, \dots, P_i - P_N] \\ \Lambda_i &= \text{diag}\{\lambda_{i1} I, \lambda_{i2} I, \dots, \lambda_{i(i-1)} I, \lambda_{i(i+1)} I, \dots, \lambda_{iN} I\} \end{aligned}$$

证明. 证明类似于定理 3, 将式 (13) 中的 $A_i, A_{di}, B_i, \pi_{ij}$ 分别替换为 $A_i + \Delta A_i, A_{di} + \Delta A_{di}, B_i + \Delta B_i, \pi_{ij} + \Delta \pi_{ij}$, 结合定理 2 及引理 1 即得结论. \square

2.4 时滞参数对指数衰减速率的影响

本小节主要讨论具有如式 (6) 形式的时滞的参数对指数衰减速率的影响, 即考察 τ_0, δ, ω 对式 (A5) 中 β 的作用. 由于 β 满足式 (A4), 即

$$c\beta + \alpha_2 \beta e^{\beta \tau_m} = \alpha_1 \quad (16)$$

故首先分析证明过程中引入的两个参数 α_1, α_2 . 注意到式 (A2) 及 $\alpha_1 = \min_{i \in \mathcal{S}} \{\lambda_{\min}(-\Xi_i)\}$, 可知在系统稳定性满足的前提下, α_1 成为 h 的函数, τ_m 对 α_1 无影响, 即 $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. 分析可知对 $\forall i \in \mathcal{S}, h$ 对 α_1 的影响如下:

$$h \uparrow \Rightarrow \lambda_{\max}(\Xi_i) \uparrow \Rightarrow \min_{i \in \mathcal{S}} \{\lambda_{\min}(-\Xi_i)\} \downarrow \Rightarrow \alpha_1 \downarrow \quad (17)$$

其中, $\frac{1}{1-h} \uparrow \Rightarrow \lambda_{\max}(\Xi_i) \uparrow$ 运用了引理 2.

其次, 注意到 $\alpha_2 = c_1 \tau_m \frac{1}{1-h}$, 故 $\alpha_2 = \alpha_2(\tau_m, h)$, 且

$$\tau_m \uparrow \Rightarrow \alpha_2 \uparrow, \quad h \uparrow \Rightarrow \frac{1}{1-h} \uparrow \Rightarrow \alpha_2 \uparrow \quad (18)$$

结合式 (16)~(18) 可知, 当 τ_m 增加时, 由于式 (16) 右侧保持不变, 而左侧的 α_2 却在增加. 同时注意到左侧为 β 的单调增函数, 故为维持等号, β 必减小. 同理, 当 h 增加时, 式 (16) 右侧会减小, 同时左侧的 α_2 却在增加, 故 β 必减小.

再由 τ_m, h 的定义: $\tau_m = \tau_0 + \delta, h = \delta \omega$ 可知 τ_m, h 均为 τ_0, δ, ω 的增函数, 因此 τ_0, δ, ω 的增加同样导致 β 的减小. 综合以上分析, 可以得出结论:

当具有如式 (6) 形式时滞的系统 (11) 在满足约束条件 (12) 及 $\delta \omega < 1$ 时, 其指数衰减的速率随着时变时滞的参数 τ_0, δ, ω 的增加而减缓.

3 仿真算例

取实际切削系统各参数如表 1 及表 2 所示.

表 1 工件及刀具各参数选取

Table 1 The workpiece and machine tool parameters

m (kg)	c (kg/s)	k (N/m)	C (N/m ²)	β (°)	b (m)
50	2×10^4	2×10^7	1.05×10^9	60	0.03

表 2 转速各参数选取及对应时滞

Table 2 The rotating speed parameters and corresponding delay

Ω_0 (rpm)	A (rpm)	T (s)	τ_0 (s)	δ (s)	T (s)
6 000	600	2	0.01	0.001	2

将各参数代入式 (2) 和 (3), 可得正常运行时 (模态 1) 系统矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.1 \times 10^5 & -400 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.1 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.1 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

考虑到系统由于前文所述的原因导致切削力发生突变 (主要是 $\cos \beta$ 的改变, 假设变化至 80°), 得模态 2 系统矩阵

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.1 \times 10^5 & -400 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

同时考虑到建模误差, 取

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$E_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, E_{b1} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{a2} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, E_{d2} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, E_{b2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

给定状态转移率 $\Pi = (\pi_{ij}) = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 40 & -40 \end{bmatrix}$, 且 $|\Delta\pi_{12}| \leq \varepsilon_{12} = 0.75, |\Delta\pi_{21}| \leq \varepsilon_{21} = 1.35$. 取 $h = 0.1$, 利用 LMI 工具箱解式 (15), 得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7.1216 \times 10^{-3} & 2.1414 \times 10^{-6} \\ 2.1414 \times 10^{-6} & 1.2048 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, q_1 = 3.5098 \times 10^{-6}$$

$$q_2 = 2.1422 \times 10^{-2}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 7.1303 \times 10^{-3} & 2.2033 \times 10^{-6} \\ 2.2033 \times 10^{-6} & 1.3586 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \lambda_{12} = 6.7433 \times 10^{-7}$$

$$\lambda_{21} = 9.0620 \times 10^{-6}$$

$$K_1 = [-0.3133 \quad -3.0817 \times 10^{-5}]$$

$$K_2 = [-0.6323 \quad -1.0951 \times 10^{-4}]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.8327 & 1.7480 \times 10^{-4} \\ 1.7480 \times 10^{-4} & 4.4525 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

设初始状态 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0.2e^t \\ -1.5e^{2t} \end{bmatrix}$ ($t \leq 0$), 不确定因子

$$F_1(t) = \begin{bmatrix} 0.9 \sin t & 0 \\ 0 & 0.5 \cos t \end{bmatrix}, F_2(t) = \begin{bmatrix} 0.8 \cos t & 0 \\ 0 & 0.7 \sin t \end{bmatrix}$$

$$\Delta\pi_{12} = 0.5, \Delta\pi_{21} = 0.8$$

按上述参数对系统 (7) 进行仿真, 得到相对偏移厚度 $y(t)$ 的轨迹如图 2 所示.

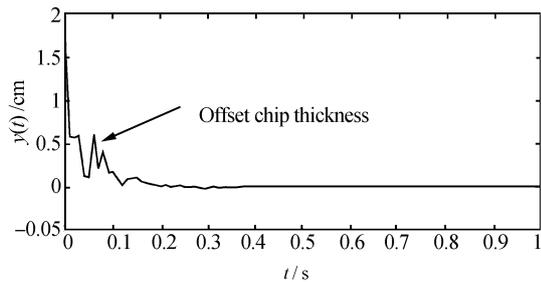


图 2 相对偏移厚度 $y(t)$ 轨迹 ($\tau_0 = 0.01, \delta = 0.001, \omega = \pi$)
Fig. 2 Offset chip thickness $y(t)$ ($\tau_0 = 0.01, \delta = 0.001, \omega = \pi$)

同时考虑时滞 $\tau(t) = \tau_0 + \delta \sin(\omega t)$ 中的 τ_0, δ, ω 发生变化时对系统状态的影响, 分别如图 3~5 所示.

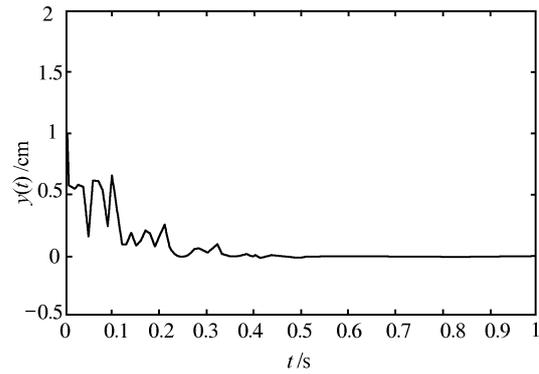


图 3 τ_0 增加到 0.9 时 $y(t)$ 的轨迹
Fig. 3 Offset chip thickness $y(t)$ when τ_0 increases to 0.9

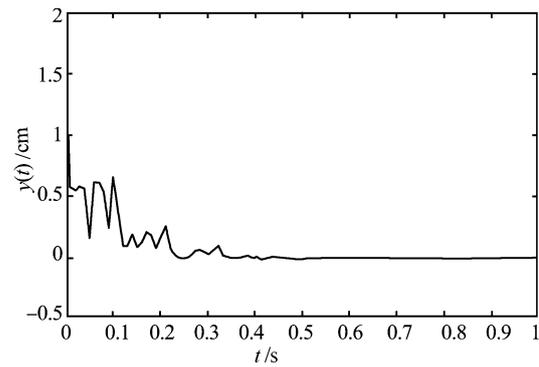


图 4 δ 增加到 0.009 时 $y(t)$ 的轨迹
Fig. 4 Offset chip thickness $y(t)$ when δ increases to 0.009

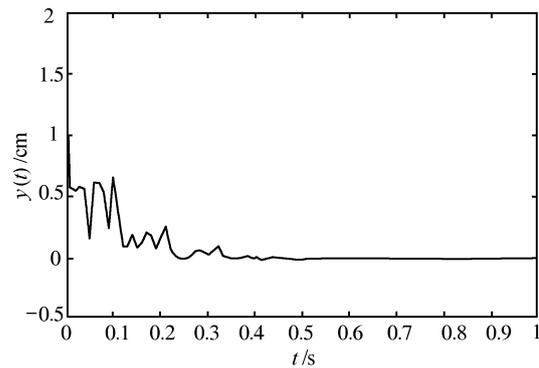


图 5 ω 增加到 4π 时 $y(t)$ 的轨迹
Fig. 5 Offset chip thickness $y(t)$ when ω increases to 4π

由仿真结果可以看出, $y(t)$ 在控制信号下能以较快的速度收敛到 0, 具有较强的鲁棒性, 并且 $y(t)$ 的衰减速率随着 τ_0, δ, ω 的增加而减小.

4 结论

本文对变速切削系统建立了带有马氏参数的时滞跳跃系统模型, 对系统的均方指数稳定性条件和在系统矩阵以及状态转移率非精确可知情形下的鲁棒稳定条件进行了研究, 并就时滞参数对系统指数衰减速率的影响进行了初步探讨. 特

别地, 引入了基于状态反馈的切换型变进给量控制方法以更有效地抑制加工系统颤振问题. 需指出的是, 本文对进给量的控制仅限于较为简单的状态反馈控制, 如何更有效地利用包括时滞在内的其他信息将成为进一步研究方向.

附录 A 定理 1 的证明

证明. 对于系统 (11), 构造 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}_t, t, i) = \mathbf{x}^T(t)P_i\mathbf{x}(t) + \frac{1}{1-h} \int_{t-\tau(t)}^t \mathbf{x}^T(\theta)Q\mathbf{x}(\theta)d\theta \quad (\text{A1})$$

易知 $E\{V(\mathbf{x}_t, t, i)\} \geq dE\{\|\mathbf{x}(t)\|^2\} \geq 0$, 其中 $d = \min_{i \in \mathcal{S}}\{\lambda_{\min}(P_i)\}$, $E\{\cdot\}$ 表示数学期望. 任取常数 $\beta > 0$, 在 t 时刻 ($r_t = i$),

$$\mathcal{L}[e^{\beta t}V(\mathbf{x}_t, t, i)] \leq e^{\beta t}\xi^T(t)\Xi_i\xi(t) + \beta e^{\beta t}V(\mathbf{x}_t, t, i)$$

其中, $\xi(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau(t))]^T$,

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j + \frac{1}{1-h} Q & P_i A_{di} \\ A_{di}^T P_i & -Q \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

若式 (12) 成立, 则 $\Xi_i < 0$. 令 $\alpha_1 = \min_{i \in \mathcal{S}}\{\lambda_{\min}(-\Xi_i)\} > 0$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\beta t}V(\mathbf{x}_t, t, i)] &\leq \\ (-\alpha_1 + c\beta)e^{\beta t}\|\mathbf{x}(t)\|^2 + c_1\beta e^{\beta t} &\frac{1}{1-h} \int_{t-\tau_m}^t \|\mathbf{x}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

其中, $c = \max_{i \in \mathcal{S}}\{\lambda_{\max}(P_i)\}$, $c_1 = \lambda_{\max}(Q)$. 再由 Dynkin 公式, 对任意 $T > 0, \beta > 0$ 及所有 $i \in \mathcal{S}$, 有

$$\begin{aligned} E\{e^{\beta T}V(\mathbf{x}_T, T, i)\} &\leq V(\mathbf{x}_0, t_0, r_0) + (-\alpha_1 + c\beta) \\ E\left\{\int_0^T e^{\beta t}\|\mathbf{x}(t)\|^2 dt\right\} + \frac{c_1\beta}{1-h} &E\left\{\int_0^T e^{\beta t} \int_{t-\tau_m}^t \|\mathbf{x}(s)\|^2 ds dt\right\} \end{aligned}$$

注意到 $\int_0^T e^{\beta t} \int_{t-\tau_m}^t \|\mathbf{x}(s)\|^2 ds dt \leq \tau_m \int_{-\tau_m}^T e^{\beta(t+\tau_m)} \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt$, 于是

$$\begin{aligned} E\{e^{\beta T}V(\mathbf{x}_T, T, i)\} &\leq \\ V(\mathbf{x}_0, t_0, r_0) + (-\alpha_1 + c\beta + \alpha_2\beta e^{\beta\tau_m}) &\times \\ \int_0^T e^{\beta t} E\{\|\mathbf{x}(t)\|^2\} dt + \alpha_2\beta e^{\beta\tau_m} &\int_{-\tau_m}^0 e^{\beta t} E\{\|\mathbf{x}(t)\|^2\} dt \end{aligned}$$

其中, $\alpha_2 = c_1\tau_m \frac{1}{1-h}$. 选取适当 $\beta > 0$, 使得

$$-\alpha_1 + c\beta + \alpha_2\beta e^{\beta\tau_m} = 0 \quad (\text{A4})$$

则可得 $E\{e^{\beta T}V(\mathbf{x}_T, T, i)\} \leq c_2$, 其中, $c_2 = V(\mathbf{x}_0, t_0, r_0) + \alpha_2\beta e^{\beta\tau_m} \int_{-\tau_m}^0 e^{\beta t} E\{\|\mathbf{x}(t)\|^2\} dt$. 从而

$$E\{\|\mathbf{x}(t)\|^2\} \leq \frac{c_2}{d} e^{-\beta t} \quad (\text{A5})$$

由文献 [10] 中的定义 1 知系统均方意义下指数稳定. \square

附录 B 定理 2 的证明

证明. 将式 (12) 中的 A_i 替换为 $A_i + B_i K_i$, 由定理 1 及引理 1 知系统 (11) 呈均方意义下指数稳定的充分条件是存在实数 $\rho > 0$, 使得不等式

$$\Xi_i + \rho^{-1} \begin{bmatrix} K_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i & 0 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} P_i B_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i^T P_i & 0 \end{bmatrix} < 0$$

成立, 其中, Ξ_i 见式 (A2). 上式两边同乘以 ρ , 将 $\rho P_i, \rho Q$ 分别替换为 P_i, Q , 由 Schur 补引理, 知上式等价式 (13). \square

References

- 1 Michiels W, Van Assche V, Niculescu S I. Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(4): 493–504
- 2 Insuperger T. Stability Analysis of Periodic Delay-Differential Equations Modeling Machine Tool Chatter [Ph. D. dissertation], Budapest University of Technology and Economics, Hungary, 2002
- 3 Olgac N, Sipahi R. A unique methodology for chatter stability mapping in simultaneous machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 2005, **127**(4): 791–800
- 4 Xiong J L, Lam J, Gao H J, Ho Daniel W C. On robust stabilization of Markovian jump systems with uncertain switching probabilities. *Automatica*, 2005, **41**(5): 897–903
- 5 Chen C K, Tsao Y M. A stability analysis of regenerative chatter in turning process without using tailstock. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2006, **29**(7-8): 648–654
- 6 Chen C K, Tsao Y M. A stability analysis of turning a tailstock supported flexible work-piece. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2006, **46**(1): 18–25
- 7 Shu Z, Lam J, Xu S Y. Robust stabilization of Markovian delay systems with delay-dependent exponential estimates. *Automatica*, 2006, **42**(11): 2001–2008
- 8 Boukas E K, Liu Z K. *Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems*. New York: Springer-Verlag, 2002
- 9 Kang Y, Zhang J F, Ge S S. Robust output feedback H_∞ control of uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time-delays. *International Journal of Control*, 2008, **81**(1): 43–61
- 10 Xu S Y, Chen T W, Lam J. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(5): 900–907

董奕凡 博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制、离散事件动态系统. E-mail: adyfdong@mail.ustc.edu.cn
(DONG Yi-Fan Ph. D. candidate. His research interest covers robust control and discrete event dynamic systems.)

康宇 副教授. 主要研究方向为鲁棒控制、变结构控制、跳跃系统. 本文通信作者. E-mail: kangduyu@ustc.edu.cn
(KANG Yu Associate professor. His research interest covers robust control, variable structure control, and jump systems. Corresponding author of this paper.)

奚宏生 教授. 主要研究方向为鲁棒控制、离散事件动态系统、随机系统、混合动态系统、信息安全. E-mail: xihsh@ustc.edu.cn
(XI Hong-Sheng Professor. His research interest covers robust control, discrete event dynamic systems, stochastic systems, hybrid dynamic systems, and information security.)