

## 基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型

王毅<sup>1</sup> 牛瑞卿<sup>1</sup> 喻鑫<sup>1</sup> 沈焕峰<sup>2</sup>

**摘要** 建立性能稳定的扩散模型一直以来都是各向异性扩散技术研究的关键问题。尽管许多改进的扩散模型陆续提出, 这些方法仍旧难以有效解决两个核心问题: 梯度阈值和迭代停止时间的确定。针对以上问题, 本文提出了基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型。在该模型中, 作者设定高斯尺度因子和梯度阈值随时间单调递减, 这有利于在多个尺度下准确提取边缘和边界特征信息。此外, 利用逐次迭代信噪比能够有效地确定迭代停止时间, 减少不必要的过量平滑。为了验证本文模型的有效性, 采用 Pinecone 灰度图像进行了图像增强平滑处理。实验结果表明, 本文模型在性能上优于传统扩散模型, 能够有效地消除噪声和保持边缘。

**关键词** 各向异性扩散, 时间变化, 扩散系数, 鲁棒  
**中图分类号** TP751

## Time Dependent Robust Anisotropic Diffusion Processes

WANG Yi<sup>1</sup> NIU Rui-Qing<sup>1</sup> YU Xin<sup>1</sup>  
SHEN Huan-Feng<sup>2</sup>

**Abstract** The key point of research on anisotropic diffusion is to build the adaptive and stable diffusion model. However, there are still two problems in the existing anisotropic diffusion models — the determination of the gradient threshold and the iterative stopping time. In this paper, we propose a time-dependent robust anisotropic diffusion method. In the method, the Gaussian scale and the gradient threshold are set to the monotonically decreasing function of the time, which is very useful to accurately extract edge and boundary features. Meanwhile, an iterative SNR measure is defined to effectively determine the stopping time, so as to lessen over-smooth regions. In order to show the validity of the proposed diffusion scheme, we use one gray image “Pinecone” in our experiments. Experimental results have shown that the time-dependent robust anisotropic diffusion methods have superiority over the existing methods and they can effectively smooth out noise while preserving edge features.

**Key words** Anisotropic diffusion, time dependent, diffusion coefficient, robust

近年来, 偏微分方程 (Partial differential equation, PDE) 已被广泛应用于图像处理领域<sup>[1-2]</sup>。其中, 最有影响力的偏微分方程是 Perona 和 Malik<sup>[3]</sup> 的各向异性扩散方

收稿日期 2008-07-08 收修改稿日期 2009-05-14

Received July 8, 2008; in revised form May 14, 2009

国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA12Z160), 国家自然科学基金 (40672205), 对地观测技术国家测绘局重点实验室资助项目 (200809), 测绘遥感信息工程国家重点实验室资助项目 (09R02) 资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA12Z160), National Natural Science Foundation of China (40672205), Project Supported by Key Laboratory of Mapping from Space of State Bureau of Surveying and Mapping (200809), and Open Research Fund of State Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing (09R02)

1. 中国地质大学 (武汉) 地球物理与空间信息学院 武汉 430074 2. 武汉大学资源与环境科学学院 武汉 430079

1. Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan 430074 2. School of Resource and Environmental Science, Wuhan University, Wuhan 430079

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01253

程 (P-M 模型), 其本质为多尺度保边缘平滑. 由于基于非线性扩散的图像分析方法有如下特点: 1) 具有良好的保边缘特性, 能够最大程度保留图像的结构信息; 2) 具有多维空间的可扩展性; 3) 具有一套完整的尺度空间理论, 适用于图像多尺度分析; 4) 具有严格的数学理论基础且数值算法简洁、易于实现. 因此, 许多学者从理论和实现上对该技术进行了分析, 提出了一些相关的图像增强和平滑算法<sup>[4-14]</sup>.

上述成果极大地丰富了各向异性扩散的理论研究. 然而, 这些方法仍旧难以有效解决以下问题: 1) 如何有效估计扩散系数的梯度阈值; 2) 如何自动选择最优迭代停止时间. 针对以上问题, 作者将控制扩散特性的三个参数 — 梯度阈值  $k$ 、高斯滤波尺度因子  $\sigma$  和迭代停止时间  $T$  同时引入扩散模型, 并设定梯度阈值  $k$  和高斯滤波尺度因子  $\sigma$  都具有随时间单调递减的特性, 同时, 在迭代数值计算中引入逐次迭代信噪比, 并试图建立基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型.

## 1 已有的各向异性扩散模型

### 1.1 P-M 各向异性扩散模型

Perona 和 Malik 在热扩散方程的基础上, 提出了扩散系数可变的各向异性扩散模型 (P-M 模型).

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (c(|\nabla I(x, y, t)|) \nabla I(x, y, t)) \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $c(|\nabla I|)$  称为扩散系数,  $\nabla \cdot (\cdot)$  为散度算子,  $\nabla$  为梯度算子.  $c(|\nabla I|)$  是扩散系数, 通常选取非负单调递减函数. Perona 和 Malik 在文献 [3] 中提出了两个扩散系数函数:

$$c(|\nabla I(x, y, t)|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I(x, y, t)|}{k}\right)^2} \quad (2)$$

$$c(|\nabla I(x, y, t)|) = \exp \left[ - \left(\frac{|\nabla I(x, y, t)|}{k}\right)^2 \right] \quad (3)$$

P-M 模型虽然能够克服线性扩散模型的缺点, 但仍存在以下缺陷: 1) 容易将噪声作为边缘保留; 2) 各向异性扩散方程是病态的不稳定方程, 无法保证解的存在唯一性.

### 1.2 Catte 各向异性扩散模型

为了解决扩散模型解的适定性问题, Catte 等<sup>[4]</sup> 提出了改进的各向异性扩散模型 (Catte 模型):

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (c(|\nabla(G_\sigma * I(x, y, t))|) \nabla I(x, y, t)) \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $G_\sigma$  是尺度因子为  $\sigma$  的高斯核函数.  $|\nabla G_\sigma * I(x, y, t)|$  表示常系数热扩散方程在尺度因子为  $\sigma$  时的梯度模. 由于 Catte 模型能够有效地抑制高斯噪声, 从而一定程度上解决了 P-M 模型无法区分边缘和噪声的问题, 保证了方程解的存在唯一性. 然而, Catte 模型容易模糊图像中的边缘和线条.

### 1.3 RAD 各向异性扩散模型

Perona 和 Malik 提出的模型的扩散速度很大, 且在梯度很高的区域依旧保持扩散的特性, 可能消除一些不太明显的重要细节和弱化高对比度的区域. 根据鲁棒估计模型和各向异性扩散的关系, Black 等<sup>[12]</sup> 提出了基于鲁棒估计算子

的扩散系数 (对应的扩散模型为 RAD (Robust anisotropic diffusinon) 模型):

$$c(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{|\nabla I(x, y, t)|}{\sigma_e} \right)^2 \right]^2, & |I(x, y, t)| \leq \sigma_e \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\sigma_e$  是鲁棒尺度阈值. 在统计学中, 式 (5) 所对应的误差模型称为 Tukey 误差模型. 和 P-M 误差模型相比, Tukey 误差模型能够“估计”到更高质量的边缘和图像细节, 同时还能看到误差模型是如何“终止”扩散行为的. 从式 (5) 可以看到, 鲁棒各向异性扩散模型与 P-M 模型类似, 难以消除颗粒噪声的干扰.

### 1.4 前后双向扩散模型

为了达到同时进行噪声去除和增强边缘的目的, Gilboa 等<sup>[13]</sup> 提出前后双向扩散 (Forward and backward) 模型, 其扩散系数形式如下

$$c(x, y, t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|I(x, y, t)|}{k_f}\right)^n} - \frac{\alpha}{1 + \left(\frac{|I(x, y, t)| - k_b}{w}\right)^{2m}} \quad (6)$$

前后双向扩散模型能够在平滑的同时, 增强图像中的边缘与线条等细节信息. 与鲁棒各向异性扩散模型相似, 难以有效滤除噪声.

### 1.5 复数各向异性扩散模型

Gilboa 等<sup>[14]</sup> 提出了一种扩散系数为复数的非线性各向异性扩散模型: RMP (Ramp preserving) 复扩散模型.

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (c(\text{Im}(I(x, y, t))) \nabla I(x, y, t)) \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

式 (7) 中, 扩散系数  $c(s) = e^{i\theta} / (1 + (s/(k\theta))^2)$  是复函数, 它的虚部近似于高斯卷积的 Laplacian 变换, 实部则近似于高斯卷积. 式 (7) 同时实现了高斯和拉普拉斯金字塔的多尺度分析. 然而, 该模型会模糊边缘和线条.

## 2 基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型

控制扩散模型的参数主要有: 梯度阈值  $k$ 、高斯滤波尺度因子  $\sigma$  和最优迭代停止时间  $T$ . 如何确定这些参数具有一定的难度. 针对该问题, 本文将围绕梯度阈值的选取、偏微分方程解的适定性问题和迭代停止时间的确定三个方面展开研究, 试图建立性能更稳定、实用性更强的各向异性扩散自适应滤波方法.

### 2.1 基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型

作者将非线性冷却技术和鲁棒各向异性扩散模型相结合, 提出一个基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型, 其扩散系数表示如下:

$$\begin{cases} c(x, y, t) = \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{|\nabla G_{\sigma(t)} * I(x, y, t)|}{k(t)} \right)^2 \right]^2, & |\nabla G_{\sigma(t)} * I| \leq k(t) \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $k(t)$  是随时间变化的梯度阈值, 其定义如下<sup>[15]</sup>

$$k(t) = \frac{1}{\varepsilon + \alpha_1 t} \tag{9}$$

式中,  $\varepsilon$  是一个非常小的数,  $\alpha_1$  是冷却率. 梯度阈值  $k$  为随时间递减, 图像的边缘得以保持下来, 同质区域越来越光滑. 尺度因子  $\sigma(t)$  也是随时间变化单调递减的高斯尺度因子, 在逐渐减小的尺度下进行梯度估计, 能够有效保持准确的有用信息, 并选择性滤除当前尺度下的噪声. 此外, 为了有效确定迭代算法的停止时间, 本文采用逐次迭代信噪比<sup>[16]</sup> 来获得最优结果.

### 2.2 模型特性分析

上节提出的基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型(式(8)和(9)), 具有以下特性: 1) 随时间变化的高斯平滑尺度因子  $G_{\sigma(t)}$ . 随时间变化的高斯尺度因子能够在不同的尺度下准确提取边缘信息, 同时, 准确地估计出图像的真实边缘. 2) 随时间变化的扩散系数梯度阈值  $k(t)$ . 由式(8)来看, 在扩散的起始阶段即  $t \rightarrow 0$  时,  $|\nabla I| \ll 1/\varepsilon, c(x, y, t \rightarrow 0) \rightarrow 1$ , 式(8)相当于线性扩散方程, 随着时间的变化,  $k(t)$  值逐渐变小, 非线性扩散得以进行, 图像变得越来越光滑; 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $c(x, y, t \rightarrow \infty) = 0$ , 退化过程结束, 扩散便达到稳定状态. 实际应用中, 灰度图像只有 256 个灰度级, 当  $k(t) \ll 1$  时, 扩散模型达到稳定状态.  $k(t)$  由参数  $\alpha_1$  来控制. 随着  $\alpha_1$  的增大, 冷却过程加快, 图像的边缘得以保持. 3) 自动确定迭代停止时间  $T$ . 含有噪声的图像进行各向异性扩散处理时, 信噪比值与时间变化的函数是一凹函数, 具有局部最大值. 根据以上规律, 通过比较迭代前后信噪比, 找出最大信噪比值(临界值), 其对应的迭代时间即为模型的迭代停止时间  $T$ . 该方法能够自动确定模型的迭代停止时间  $T$ , 较好地避免了扩散不充分和扩散过量的问题.

综上, 通过设定随时间变化的高斯平滑尺度因子  $G_{\sigma(t)}$  和扩散系数梯度阈值  $k(t)$  以及引入逐次迭代信噪比, 本文模型能够有效地提高模型的稳定性和扩散特性. 同时, 它不会随图像本身不同而变化. 此外, 模型的形式较为简便且易于控制.

### 3 算法步骤和数值计算方法

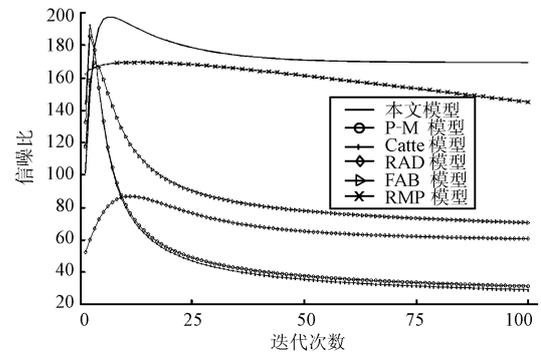
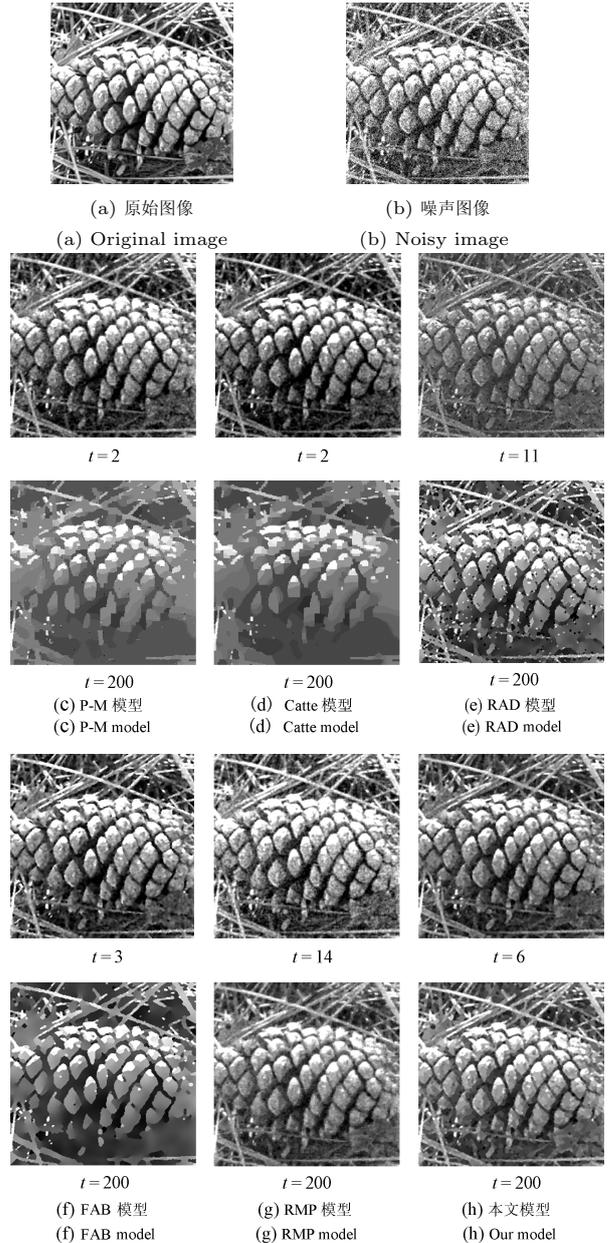
基于时间变化的鲁棒各向异性扩散算法具体的实现步骤如下:

**步骤 1.** 初始化模型. 确定算法的迭代次数  $t^*$  和空间步长  $h$ 、高斯滤波器的尺度因子函数  $\sigma(t)$  及其初始值、时间步长  $\Delta t$ , 冷却速率  $\alpha_1$ .

**步骤 2.** 估计图像梯度  $|\nabla G_{\sigma(t)} * I|$ . 假设图像经过  $n$  次迭代处理, 将迭代处理后的图像输入作为待处理的图像  $I = I^n$ . 本文采用文献 [4] 中 8-邻域差分算法得到梯度的估计值  $|\nabla G_{\sigma(t)} * I|$ . 通常情况下, 对于一幅  $M \times N$  大小的图像而言, 边界处的像素往往无法构成满足要求的块大小, 可以在边界外围补齐像素后, 再进行处理.

**步骤 3.** 计算扩散系数  $c(\nabla I)$ . 将满足要求的梯度图像  $|\nabla G_{\sigma(t)} * I|$  和冷却速率  $\alpha_1$  代入式(8)中, 得到扩散系数.

**步骤 4.** 迭代求解偏微分方程, 求得经过迭代处理后的图像. 本文采用偏微分方程离散化数值解法, 将时空连续域上的图像  $I(x, y, t)$  离散化为  $I(ih, jh, n\Delta t)$ ,  $\Delta t, h$  分别为时间和空间步长,  $i, j$  为坐标点. 对图像上所有像素采用文献 [3] 中的差分迭代离散方程进行求解.



(i) 逐次迭代信噪比  
(i) Iterative SNR

图 1 图像的滤波结果

Fig. 1 Smoothing results for a "Pinecone" image

**步骤 5.** 判断扩散过程是否继续进行. 通过比较迭代前后的信噪比, 若迭代次数满足条件  $T = t^*$  时, 则迭代过程结束, 得到输出图像  $I^{n+1}$ ; 否则, 重新回到步骤 2 继续执行迭代过程.

#### 4 实验结果与分析

本文实验目的是将各种扩散算法分别应用到具有高斯噪声的图像处理中, 以检验算法的实用性. 图 1(a) 是一幅灰度图像 Pinecone ( $256 \times 256$ ), 对其加入  $\sigma^2 = 400$  的高斯噪声, 噪声图像如图 1(b) 所示. 作者将本文模型的滤波结果分别与 P-M 模型、Catté 模型、RAD 模型、FAB 模型和 RMP 模型的处理结果进行比较. 图 1(c)~(h) 分别是 6 种扩散模型的处理结果, 其中第 2 行图像分别对应 6 种扩散模型在信噪比最大值对应的  $T$  时刻的滤波结果. 经过 200 次迭代后, P-M 模型、Catté 模型和 RAD 模型的处理结果非常光滑, 但边缘和重要细节丢失严重. FAB 模型在平滑的同时, 能够对图像边缘进行锐化, 因此, 图像的细节边缘的对比度较大, 然而, FAB 模型也将部分噪声误认为边缘而进行增强, 使得图像中有些颗粒状的离散点. RMP 模型模糊了较弱的边缘. 本文模型处理结果中, 噪声被完全滤除, 且有效保持了图像的细节边缘. 此外, 从图 1(i) 的“信噪比-迭代次数”函数关系图可以看出, 本文模型获得的最佳信噪比结果要优于传统模型的结果. 比较图 1(c)~(h) 第 2 行中的图像可以看出, 本文模型的结果图像中松果的纹理结构和周围的枝条清晰可见, 且噪声被有效滤除. 由图 1(i) 可知, 本文模型在迭代次数 60 次后, 信噪比值处于基本不变的稳定状态, 且滤波结果在迭代次数大于 5 次后优于其他扩散模型. 这表明, 本文模型对应的扩散方程能在较短时间内收敛 (达到最大信噪比值), 并且收敛后的最优滤波结果不会随着迭代次数的增加而质量下降. 综上, 本文模型在不同的噪声环境下, 滤波性能、稳定性和实用性都优于传统各向异性扩散模型.

#### 5 结论

本文提出了基于时间变化的鲁棒各向异性扩散模型, 较好地解决了现存模型的两大问题. 将本文模型与传统扩散模型进行了滤波实验, 其结果表明: 1) 从视觉效果上来看, 本文提出的扩散模型在滤除的同时, 较好地保持了高对比度重要的细节和边缘信息; 2) 本文模型一定程度上简化了参数设置的复杂性, 且便于控制. 同时, 模型对迭代次数不敏感, 即在较短的时间内模型能够收敛, 并自动确定迭代停止时间. 关于模型参数的选取及模型在彩色图像中的应用将是今后研究的重点.

#### References

- Guichard F, Moisan L, Morel J M. A review of PDE models in image processing and image analysis. *Journal de Physique IV*, 2002, **92**(12): 137–154
  - Sapiro G. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. England: Cambridge University Press, 2001
  - Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, **12**(7): 629–639
  - Catté F, Lions P L, Morel J M, Coll T. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(1): 182–193
  - Wang Y, Zhang L P, Li P X. Local variances-controlled forward-and-backward diffusion for image enhancement and noise reduction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(7): 1854–1864
  - Aja-Fernandez S, Alberola-Lopez C. On the estimation of the coefficient of variation for anisotropic diffusion speckle filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(9): 2694–2701
  - Luo H G, Zhu L M, Ding H. Coupled anisotropic diffusion for image selective smoothing. *Signal Processing*, 2006, **86**(7): 1728–1736
  - Yu H C, Chua C S. GVF-based anisotropic diffusion models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(6): 1517–1524
  - Martin-Herrero J. Anisotropic diffusion in the hypercube. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2007, **45**(5): 1386–1398
  - Rifkahn E, Amer A. Fast automated stopping-time and edge-strength estimation for anisotropic diffusion. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Las Vegas, USA: IEEE, 2008. 933–936
  - Krissian K, Westin C F, Kikinis R, Vosburgh K G. Oriented speckle reducing anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(5): 1412–1424
  - Black M J, Sapiro G, Marimont D H, Heeger D. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, **7**(3): 421–432
  - Gilboa G, Sochen N, Zeevi Y Y. Forward-and-backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2002, **11**(7): 689–703
  - Gilboa G, Sochen N, Zeevi Y Y. Image enhancement and denoising by complex diffusion processes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(8): 1020–1036
  - Gilboa G, Zeevi Y Y, Sochen N. Image enhancement segmentation and denoising by time dependent nonlinear diffusion processes. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*. Thessaloniki, Greece: IEEE, 2001. 134–137
  - Chen K. Adaptive smoothing via contextual and local discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(10): 1552–1567
- 王毅 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院讲师. 主要研究方向为遥感图像处理和偏微分方程图像处理. 本文通信作者.  
E-mail: wangyi@whu.edu.cn  
(WANG Yi Lecturer at the Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences. His research interest covers remote sensing image processing using partial differential equations and particularly pattern recognition. Corresponding author of this paper.)
- 牛瑞卿 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院副教授. 主要研究方向为环境遥感和地质遥感. E-mail: rqnqiu@163.com  
(NIU Rui-Qing Associate professor at the Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences. His research interest covers environmental remote sensing and geological remote sensing.)
- 喻鑫 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院讲师. 主要研究方向为机器视觉、模式识别和遥感与地质应用.  
E-mail: uxinhenry@gmail.com  
(YU Xin Lecturer at the Institute of Geography and Geomatics, China University of Geosciences. His research interest covers computer vision, pattern recognition, and their applications in remote sensing and geology.)
- 沈焕峰 武汉大学资源与环境科学学院副教授. 主要研究方向为图像超分辨率增强. E-mail: shenhf@whu.edu.cn  
(SHEN Huan-Feng Associate professor at the School of Resource and Environmental Science, Wuhan University. His main research interest is image superresolution enhancement.)