

非线性微分-代数系统的输出 反馈镇定控制

臧强¹ 戴先中¹

摘要 对满足线性增长条件的非线性微分-代数系统,研究了其输出反馈镇定控制问题. 通过将状态观测器与控制器耦合在一起设计,构造出一种非初始化的线性高增益状态观测器,具有良好的鲁棒性. 基于反推设计方法构造出一个线性的动态输出补偿器,使得整个闭环系统是渐近稳定的. 仿真结果验证了本文所提控制方法的有效性.

关键词 微分-代数系统, 非线性系统, 输出反馈, 渐近镇定, 反推
中图分类号 TP13

Output Feedback Stabilization Control for Nonlinear Differential-algebraic Equation Systems

ZANG Qiang¹ DAI Xian-Zhong¹

Abstract For nonlinear differential-algebraic equation systems satisfying linear growth conditions, the problem of output feedback stabilization control is considered in this paper. The design of the state observer is coupled with that of the controller. The proposed observer is non-initialized and linear which makes the observer robust. Based on the backstepping approach, a linear dynamic output compensator is constructed, through which the whole closed-loop systems are asymptotically stable. The simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed control scheme.

Key words Differential-algebraic equations (DAE) systems, nonlinear systems, output feedback, asymptotical stabilization, backstepping

许多物理系统(如带运动约束的机器人系统^[1]、电力系统^[2]以及生化过程^[3-4]等)自然地由微分方程和代数方程(Differential-algebraic equations, DAE)来共同描述,微分-代数系统无论在理论研究上还是实际应用上都是一类非常重要的系统. 目前线性 DAE 系统的控制问题已经得到了广泛研究并初步形成了与线性常微分方程(Ordinary differential equations, ODE)系统相平行的理论体系^[5]. 近年来对非线性 DAE 系统控制问题的研究也取得了很大进展. 文献 [2] 将非线性 ODE 系统的 Lyapunov 稳定性理论进行了扩展. 文献 [6] 将非线性 ODE 系统的受控不变分布概念引入到了非线性 DAE 系统. 文献 [7-8] 则分别研究了非线性 DAE 系统的逆系统控制问题和渐近镇定控制问题.

在各种结构性条件和增长性条件的假设下,非线性 ODE 系统的输出反馈镇定控制问题已经取得了丰富的成果^[9],但对于非线性 DAE 系统而言,输出反馈镇定控制问题的研究

收稿日期 2008-04-28 收修改稿日期 2008-09-25

Received April 28, 2008; in revised form September 25, 2008

国家自然科学基金(50507002, 60174004, 59925718)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (50507002, 60174004, 59925718)

1. 东南大学自动化学院复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室 南京 210096

1. Key Laboratory of Measurement and Control of Complex System Engineering (Ministry of Education), School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01244

还不多见. 针对一类仿射非线性 DAE 系统, 文献 [4, 10] 将非线性 ODE 系统的高增益观测器方法进行了扩展, 但其需要受控系统 (或其等价系统) 的非线性项精确已知, 且满足两个关键的限制条件: 下三角结构和全局 Lipschitz 条件. 然而一方面许多受控系统不具有下三角结构, 也不具备可等价转化为下三角结构的几何条件; 另一方面由于干扰或者量测噪声的存在, 系统往往也不满足全局 Lipschitz 条件. 对于不满足上述限制条件的非线性 DAE 系统, 其状态估计问题及输出反馈镇定控制问题还未见研究.

本文考虑这样一类非线性 DAE 系统的输出反馈镇定控制问题: 受控系统 (或其等价系统) 不满足上述限制条件, 而是满足线性增长条件. 本文的输出反馈控制器与状态观测器的设计是耦合的, 状态观测器不再是由等价系统的“复制”和误差校正项共同组成的非线性高增益状态观测器, 而是“非初始化”的线性高增益状态观测器, 观测器的初始状态不必受限于代数约束方程, 也不需要被控系统非线性项的信息精确已知, 这使得观测器具有良好的鲁棒性. 基于 Backstepping 设计方法得到一个线性的动态输出补偿器, 使得整个闭环系统是渐近稳定的, 系统状态估计误差是指数收敛的. 仿真结果验证了本文所提控制方案的有效性.

1 系统的描述和问题的提出

考虑如下非线性 DAE 系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, u) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ y &= h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为微分向量, $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 为代数向量, $u \in \mathbf{R}$ 为控制输入, $y \in \mathbf{R}$ 为控制输出, $\mathbf{f}_1, \mathbf{g} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{R}^m$ 为向量映射, 统称 (\mathbf{x}, \mathbf{z}) 为系统 (1) 的状态. 记 \mathbf{f}_2 的零集为 $\Omega = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^{n \times m} : \mathbf{0} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})\}$. 不失一般性, 设原点为系统 (1) 在 Ω 上的孤立平衡点. 注意到系统 (1) 对于控制输入 u 是非线性的, 与文献 [4, 10] 考虑的仿射形式的非线性 DAE 系统相比, 系统 (1) 显然更具一般性.

对系统 (1) 我们有如下假设.

假设 1. 系统 (1) 是指数 1 的^[8], 即代数约束方程 $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 关于代数向量 \mathbf{z} 的 Jacobian 矩阵在 Ω 上具有常满秩:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{z}} \right] = m \quad (2)$$

由式 (2) 可知 $\left[\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1}$ 在 Ω 上存在. 定义如下的非线性坐标变换:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \vdots \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{pmatrix} = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (3)$$

其中, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ \vdots \\ L_{Ff_1}^{n-1} h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{pmatrix}$, 定义 $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) =$

$$\begin{bmatrix} I_n \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}, \text{ 定义 } L_{Ff_1}^i h = \left(\frac{\partial L_{Ff_1}^{i-1} h}{\mathbf{x}} \frac{\partial L_{Ff_1}^{i-1} h}{\mathbf{z}} \right) Ff_1.$$

假设 2. Ψ 为 Ω 的管状邻域 $\Omega_\kappa = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Omega \mid \|\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})\| < \kappa, \kappa > 0\}$ 上的微分同胚, 满足 $\|\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1) - \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{z}_2)\| \geq \omega \|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)\|$, 这里 $\omega > 0$ 为已知正常数, 且 Ψ 将系统 (1) 等价转化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \phi_1(\xi, \chi, u) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n + \phi_{n-1}(\xi, \chi, u) \\ \dot{\xi}_n &= u + \phi_n(\xi, \chi, u) \\ \dot{\chi} &= \mathbf{0} \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \quad (4)$$

假设 3. 系统 (4) 满足线性增长条件, 即存在常数 $c > 0$ 使得

$$|\phi_i(\xi, \chi, u)| \leq c(|\xi_1| + \dots + |\xi_i|), \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

非线性 DAE 系统 (1) 的输出反馈镇定控制问题定义为: 在 Ω 上找到如下的动态输出补偿器

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma} &= \psi(\varsigma, y) \\ u &= \vartheta(\varsigma, y) \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $\psi(0) = \mathbf{0}$, 使得整个闭环系统 (1) 和 (6) 的状态 $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varsigma)^T$ 在零平衡点是渐近稳定的^[2].

2 输出反馈设计

下面给出本文的主要结果.

定理 1. 满足假设 1~3 的非线性 DAE 系统 (1), 其输出反馈镇定控制问题可解.

证明. 首先构造出系统 (1) 的非初始化线性高增益状态观测器.

2.1 非初始化线性高增益状态观测器的构造

对系统 (1) 构造如下形式的状态观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \theta k_1(\xi_1 - \hat{\xi}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{n-1} &= \hat{\xi}_n + \theta^{n-1} k_{n-1}(\xi_1 - \hat{\xi}_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_n &= u + \theta^n k_n(\xi_1 - \hat{\xi}_1) \\ \dot{\hat{\chi}} &= -\Lambda \hat{\chi} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\theta > 1$ 为待定的增益参数, $k_i > 0, i = 1, \dots, n$ 为 Hurwitz 多项式 $P(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_{n-1} s + k_n$ 的系数, Λ 为 $m \times m$ 维正定对称矩阵.

观测器 (7) 的优点在于: 1) 是线性的, 不包含非线性项 $\phi_i, i = 1, \dots, n$, 即不要求非线性项 $\phi_i, i = 1, \dots, n$ 的信息精确已知; 2) 不要求 $\hat{\chi}(0) = \mathbf{0}$, 只需 $\hat{\chi}(0) \in \Omega_{\kappa_0}$ (这里 Ω_{κ_0} 为原点的某个管状邻域, 将在后文定义). 或等价地, 不要求初始估计状态 $(\hat{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{z}}(0)) = \Psi^{-1}(\hat{\xi}(0), \hat{\chi}(0))$ 受限于 $\mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{z}}(0)) = \mathbf{0}$, 即观测器 (7) 是“非初始化”的^[10]. 以上

两点使得观测器 (7) 具有良好的鲁棒性. 可以证明, 观测器 (7) 是系统 (1) 的一个指数观测器 (见定理 2).

定义比例误差

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\Delta_\theta)^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \quad (8)$$

这里 $\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta^{n-1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$, $\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n)^T$. 简单计算可得误差动态为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \theta A \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{pmatrix} \phi_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi}, u) \\ \frac{1}{\theta} \phi_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi}, u) \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta^{n-1}} \phi_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi}, u) \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中, $A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n-1} & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. 由 $k_i > 0, i =$

$1, \dots, n$ 的选取, 显然 A 为 Hurwitz 矩阵, 因此存在正定对称矩阵 P 使得 $A^T P + PA = -I$.

定义 Lyapunov 函数 $V_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) = V(\boldsymbol{\varepsilon}) + W(\hat{\boldsymbol{\chi}})$, 其中, $V(\boldsymbol{\varepsilon}) = (n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T P \boldsymbol{\varepsilon}$, $W(\hat{\boldsymbol{\chi}}) = \hat{\boldsymbol{\chi}}^T \hat{\boldsymbol{\chi}}$. 由式 (7) 可得

$$\dot{W}(\hat{\boldsymbol{\chi}}) = -2\hat{\boldsymbol{\chi}}^T \Lambda \hat{\boldsymbol{\chi}} \leq -2\lambda_{\min}(\Lambda)W(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \quad (10)$$

这里 $\lambda_{\min}(\Lambda)$ 为 Λ 的最小特征根. 注意到假设 3, 可知存在一个与 θ 无关的正实数 $c_1 > 0$, 使得 $V_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\chi}})$ 对时间 t 的导数满足

$$\dot{V}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \leq -(n+1)\theta \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2\lambda_{\min}(\Lambda)W(\hat{\boldsymbol{\chi}}) + c_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \left(|\xi_1| + \frac{1}{\theta} |\xi_2| + \dots + \frac{1}{\theta^{n-1}} |\xi_n| \right) \quad (11)$$

另外, 由式 (8) 可得 $\xi_i = \hat{\xi}_i + \theta^{i-1} \varepsilon_i$, 因而有 $\left| \frac{1}{\theta^{i-1}} \xi_i \right| \leq \left| \frac{1}{\theta^{i-1}} \hat{\xi}_i \right| + |\varepsilon_i|, i = 1, \dots, n$, 同时注意到 $\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| \leq \sqrt{n} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|$, $\frac{1}{\theta^{i-1}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\| |\hat{\xi}_i| \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \frac{1}{2\theta^{2(i-1)}} |\hat{\xi}_i|^2$, 因此有

$$\dot{V}_0 \leq -\left((n+1)\theta - c_1 \sqrt{n} - \frac{n}{2} c_1 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2\lambda_{\min}(\Lambda)W(\hat{\boldsymbol{\chi}}) + \frac{1}{2} c_1 \left(\hat{\xi}_1^2 + \frac{1}{\theta^2} \hat{\xi}_2^2 + \dots + \frac{1}{\theta^{2(n-1)}} \hat{\xi}_n^2 \right) \quad (12)$$

2.2 输出反馈镇定控制器的构造

接下来我们将基于 Backstepping 设计方法, 构造出系统 (1) 的输出反馈镇定控制器. 限于篇幅, 这里仅给出一般性的第 k 步推导.

Inductive step $k(k = 1, \dots, n-1)$. 设直到第 k 步, 都已经定义了虚拟控制项 $\alpha_{j+1} = -\theta \sigma_j e_j$, 误差变量 $e_1 = \hat{\xi}_1, e_{j+1} = \hat{\xi}_{j+1} - \alpha_{j+1}$ 以及 Lyapunov 函数 $V_j = V_{j-1} +$

$\frac{1}{2\theta^{2(j-1)}} e_j^2, j = 1, \dots, k$, 使得 $V_k(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\chi}}, e_1, \dots, e_k)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\left((n+1-k)\theta - \left(\sqrt{n} + \frac{n}{2} \right) c_1 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - \\ & \sum_{j=1}^k \frac{1}{\theta^{2j-2}} \left((n+1-k)\theta - c_1 a_j^2 \right) e_j^2 + \\ & \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{1}{\theta^{2k+2}} \hat{\xi}_{k+2}^2 + \dots + \frac{1}{\theta^{2(n-1)}} \hat{\xi}_n^2 \right) + \\ & \frac{c_1}{\theta^{2k}} e_{k+1}^2 + \frac{1}{\theta^{2(k-1)}} e_k e_{k+1} - 2\lambda_{\min}(\Lambda)W(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \quad (13) \end{aligned}$$

这里 $\sigma_j > 0$ 是与 θ 无关的正常数.

定义新的误差变量 $e_{k+2} = \hat{\xi}_{k+2} - \alpha_{k+2}$, 这里 α_{k+2} 为待设计的虚拟控制项. 选取如下的 Lyapunov 函数

$$V_{k+1} = V_k + \frac{1}{2\theta^{2k}} e_{k+1}^2 \quad (14)$$

计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{e_{k+1}^2}{2\theta^{2k}} \right) = & \frac{1}{\theta^{2k}} e_{k+1} (\hat{\xi}_{k+2} + \theta^{k+1} \eta_{k,0} \varepsilon_1 + \\ & \theta^{k+1} \eta_{k,1} e_1 + \dots + \theta \eta_{k,k+1} e_{k+1}) \quad (15) \end{aligned}$$

其中, $\eta_{k,i} > 0, i = 0, \dots, k+1$ 是与 θ 无关的正常数. 由式 (13)~(15), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k+1} \leq & -\left((n+1-k)\theta - \left(\sqrt{n} + \frac{n}{2} \right) c_1 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - \\ & \sum_{j=1}^k \frac{1}{\theta^{2j-2}} \left((n+1-k)\theta - c_1 a_j^2 \right) e_j^2 + \\ & \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{1}{\theta^{2k+4}} \hat{\xi}_{k+3}^2 + \dots + \frac{1}{\theta^{2(n-1)}} \hat{\xi}_n^2 \right) + \\ & \frac{c_1}{\theta^{2k+2}} \hat{\xi}_{k+2}^2 + \frac{c_1}{\theta^{2k+2}} \alpha_{k+1}^2 + \frac{1}{\theta^{2k}} e_{k+1} e_{k+2} + \\ & \frac{1}{\theta^{2k}} e_{k+1} \alpha_{k+1} - 2\lambda_{\min}(\Lambda)W(\hat{\boldsymbol{\chi}}) + \\ & e_{k+1} \left(\frac{\eta_{k,0}}{\theta^{k-1}} \varepsilon_1 + \frac{\eta_{k,1}}{\theta^{k-1}} e_1 + \dots + \frac{\eta_{k,k-1}}{\theta^{2k-3}} e_{k-1} + \right. \\ & \left. \frac{1 + \eta_{k,k}}{\theta^{2k-2}} e_k + \frac{c_1}{\theta^{2k-1}} + \eta_{k,k+1} e_{k+1} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

由 $\theta > 1$ 和熟知的 Young's 不等式^[9], 不难验证下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{k,0}}{\theta^{k-1}} e_{k+1} \varepsilon_1 & \leq \frac{\eta_{k,0}^2}{4\theta^{2k-1}} e_{k+1}^2 + \theta \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \\ \frac{\eta_{k,1}}{\theta^{k-1}} e_{k+1} e_1 & \leq \frac{\eta_{k,1}^2}{4\theta^{2k-1}} e_{k+1}^2 + \theta e_1^2 \\ & \vdots \\ \frac{1 + \eta_{k,k}}{\theta^{2k-2}} e_{k+1} e_k & \leq \frac{(1 + \eta_{k,k})^2}{4\theta^{2k-1}} e_{k+1}^2 + \frac{1}{\theta^{2k-3}} e_k^2 \quad (17) \end{aligned}$$

选取虚拟控制项为

$$\alpha_{k+2} = -\theta \sigma_{k+1} e_{k+1} \quad (18)$$

这里 $\sigma_{k+1} = n - k + \frac{\eta_{k,0}^2}{4} + \frac{\eta_{k,1}^2}{4} + \dots + \frac{\eta_{k,k-1}^2}{4} + \frac{(1 + \eta_{k,k})^2}{4} + \eta_{k,k+1} + 1 > 0$ 仍然是与 θ 无关的正常数. 将式 (17) 和 (18)

代入式 (16) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k+1} \leq & - \left((n-k)\theta - \left(\sqrt{n} + \frac{n}{2} \right) c_1 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - \\ & \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\theta^{2j-2}} \left((n-k)\theta - c_1 \sigma_j^2 \right) e_j^2 + \\ & \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{1}{\theta^{2k+4}} \hat{\xi}_{k+3}^2 + \dots + \frac{1}{\theta^{2(n-1)}} \hat{\xi}_n^2 \right) + \\ & \frac{c_1}{\theta^{2k+2}} \hat{\xi}_{k+2}^2 + \frac{1}{\theta^{2k}} e_{k+1} e_{k+2} - 2\lambda_{\min}(\Lambda) W(\hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned} \quad (19)$$

如此继续直到最后第 n 步, 对整个闭环系统选取 Lyapunov 函数 $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2\theta^{2(n-1)}} e_n^2$, 控制器 u 选取为

$$\begin{aligned} u = & -\theta \sigma_n e_n = \\ & -\theta \sigma_n (\hat{\xi}_n + \theta \sigma_{n-1} (\hat{\xi}_{n-1} + \dots + \theta \sigma_2 (\hat{\xi}_2 + \theta \sigma_1 \hat{\xi}_1) + \dots)) \end{aligned} \quad (20)$$

这里 $\sigma_n = 1 + \frac{\eta_{n-1,0}^2}{4} + \frac{\eta_{n-1,1}^2}{4} + \dots + \frac{(1 + \eta_{n-1,n-1})^2}{4} + 1 + \eta_{n-1,n}$, $\sigma_i > 0, i = 1, \dots, n-1$ 均为与 θ 无关的正常数. 类似于式 (19), V_n 沿整个闭环误差系统对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \left(\theta - \left(\sqrt{n} + \frac{n}{2} \right) c_1 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2\lambda_{\min}(\Lambda) W(\hat{\boldsymbol{x}}) - \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\theta^{2j-2}} \left(\theta - c_1 \sigma_j^2 \right) e_j^2 - \frac{1}{\theta^{2n-2}} \theta e_n^2 \end{aligned} \quad (21)$$

显然若选取增益常数 θ 满足

$$\theta > \max \left\{ 1, \left(\sqrt{n} + \frac{n}{2} \right) c_1, c_1 \sigma_1^2, \dots, c_1 \sigma_{n-1}^2 \right\} \quad (22)$$

那么式 (21) 不等号的右边是负定的. 由文献 [2] 定理 3 可知整个闭环系统 (1) 和 (7) 是渐近稳定的. \square

在控制器 (20) 作用下, 系统 (7) 为系统 (1) 的一个指数观测器, 即状态观测误差是指数收敛的. 我们有如下定理.

定理 2. 定义系统 (1) 的状态估计为 $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\chi}})$, 并定义 $\Omega_{\kappa_0} = \{ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})^\top \Lambda \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) < \kappa_0, \kappa_0 > 0 \}$, 这里 $\kappa_0 > 0$ 使得 $\Omega_{\kappa_0} \subset \Omega_{\kappa}$, 那么对满足式 (22) 的任意增益 θ 以及 $\hat{\boldsymbol{\chi}}(0) \in \Omega_{\kappa_0}$, 存在正常数 $\beta_1, \beta_2 > 0$ 使得

$$\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) - (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}})\| \leq \beta_1 e^{-\beta_2 t} \|(\tilde{\boldsymbol{\xi}}(0), \hat{\boldsymbol{\chi}}(0))\| \quad (23)$$

这里 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = \boldsymbol{\xi}(0) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(0)$.

证明. 定理的证明与文献 [10] 类似. 由式 (10) 得到 $\dot{W}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq -2\lambda_{\min}(\Lambda) W(\hat{\boldsymbol{x}})$, 因而有 $\|\hat{\boldsymbol{x}}(t)\|^2 \leq e^{-\gamma t} \|\hat{\boldsymbol{x}}(0)\|^2$, 这里 $\gamma = 2\lambda_{\min}(\Lambda)$. 由式 (21) 可知存在正常数 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 使得 $\|\boldsymbol{\xi}(t) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(t)\|^2 \leq \tau_1 e^{-\tau_2 t} \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}(0)\|^2$. 由上述不等式以及假设 2 可知如下不等式成立

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) - (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{z}})\| = & \|\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi}) - \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\chi}})\| \leq \\ & \frac{1}{\omega} \|(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi}) - (\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\chi}})\| \leq \\ & \beta_1 e^{-\beta_2 t} \|(\tilde{\boldsymbol{\xi}}(0), \hat{\boldsymbol{\chi}}(0))\| \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\beta_1, \beta_2 > 0$ 是由 $\tau_1, \tau_2, \omega, \gamma$ 和 θ 共同确定的常数. \square

3 仿真算例

下面利用本文所提方法, 研究如下非线性 DAE 系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 \sin(u \cdot x_2) \\ \dot{x}_2 &= u + x_2 \sin((1-z)^{\frac{1}{3}}) \\ 0 &= f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = z^2 + x_1^2 + x_2^2 - r^2 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (25)$$

的输出反馈镇定问题. 这里 $r = 1$, 定义 $\Omega = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 + x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0, z > 0\}$. 注意到系统非零平衡点为 $(x_1, x_2, z) = (0, 0, 1) \in \Omega$.

坐标变换定义为

$$(\xi_1, \xi_2, \chi) = (x_1, x_2, z^2 + x_1^2 + x_2^2 - r^2) \quad (26)$$

容易验证式 (26) 为 Ω 上的一个微分同胚, 将系统 (25) 等价转化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \xi_1 \sin(u \cdot \xi_2) \\ \dot{\xi}_2 &= u + \xi_2 \sin\left((1-z)^{\frac{1}{3}}\right) \\ \dot{\chi} &= 0 \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \quad (27)$$

可以验证系统 (25) 满足假设 1 和假设 2, 并且显然有 $|\phi_1(\xi_1, \xi_2, \chi)| \leq |\xi_1|, |\phi_2(\xi_1, \xi_2, \chi)| \leq |\xi_2|$ (这里 $\phi_1(\xi_1, \xi_2, \chi) = \xi_1 \sin(u \cdot \xi_2), \phi_2(\xi_1, \xi_2, \chi) = \xi_2 \sin((1-z)^{\frac{1}{3}})$), 系统 (25) 满足假设 3. 由定理 1, 对系统 (25) 构造如下的非初始线性高增益状态观测器

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \theta(y - \hat{\xi}_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= u + \theta^2(y - \hat{\xi}_1) \\ \dot{\hat{\chi}} &= -\hat{\chi} \end{aligned} \quad (28)$$

由式 (20) 对系统 (25) 选取输出反馈镇定控制器为

$$u = -\theta \sigma_2 (\hat{\xi}_2 + \theta \sigma_1 \hat{\xi}_1) \quad (29)$$

适当选取参数 θ, σ_1 和 σ_2 (例如, 分别取 $\sigma_1 = 11/4, \sigma_2 = 25, \theta = 10$), 控制器 (29) 渐近镇定系统 (25) 和 (28) (这里系统 (25) 和 (28) 的初始状态设定为 $(x_1(0), x_2(0), z(0), \hat{\xi}_1(0), \hat{\xi}_2(0), \hat{\chi}(0)) = (0, 1, 0, 0.1, 0.3, 0.5)$). 仿真结果如图 1 所示.

如图 1 所示, 整个闭环系统 (25) 和 (28) 是渐近稳定的, 系统状态渐近收敛于平衡点.

4 结论

本文研究了一类非线性 DAE 系统的输出反馈镇定控制问题. 所提出的状态观测器是线性的, 不需要系统非线性项的精确信息, 克服了文献 [4, 10] 的局限性, 同时保留了文献 [10] “非初始化”的优点. 基于反推设计方法得到了一个线性的动态输出反馈补偿器, 使得整个闭环系统是渐近稳定的.

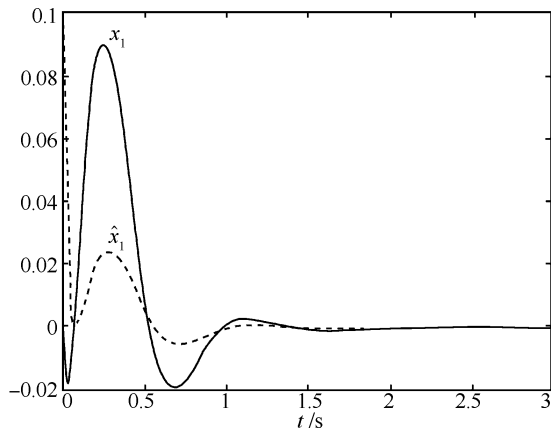
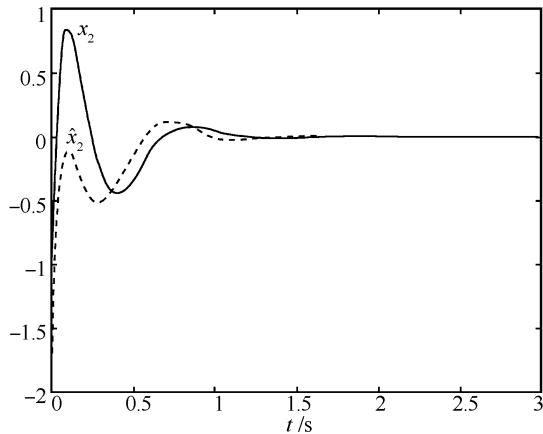
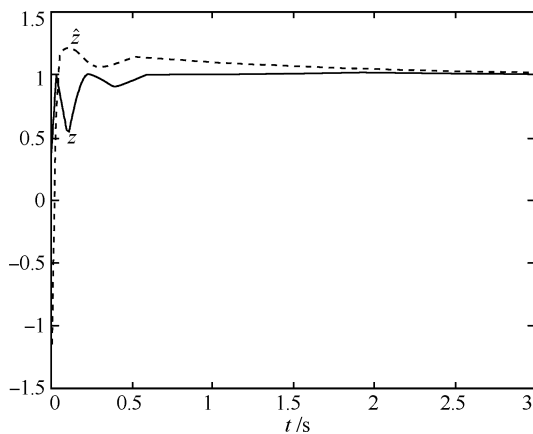
(a) 微分变量 x_1 和估计 \hat{x}_1 (a) Differential variable x_1 and its estimate \hat{x}_1 (b) 微分变量 x_2 和估计 \hat{x}_2 (b) Differential variable x_2 and its estimate \hat{x}_2 (c) 代数变量 z 和估计 \hat{z} (c) Algebraic variable z and its estimate \hat{z}

图 1 非线性 DAE 系统 (25) 和动态补偿器 (28) 的瞬时响应

Fig. 1 The instant responses of the nonlinear DAE system

(25) and dynamic compensator (28)

References

1 McClamroch N H. Singular systems of differential equations as dynamic models for constrained robot systems. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Washington D. C., USA: IEEE, 1986. 21–28

- 2 Hill D J, Mareels I M Y. Stability theory for differential/algebraic systems with application to power systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990, **37**(11): 1416–1423
- 3 Kumar A, Daoutidis P. Feedback control of nonlinear differential-algebraic-equation systems. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 1995, **41**(3): 619–636
- 4 Yaagoubi E H, Assouli A. Observer design for a class of differential-algebraic systems application to a bioprocess model. In: Proceedings of the International Symposium on Intelligent Control and Mediterranean Conference on Control and Automation. Cyprus, USA: IEEE, 2005. 1143–1149
- 5 Campbell S L, Nichols N K, Terrell W J. Duality observability and controllability for linear time-varying descriptor systems. *Circuits, Systems, and Signal Process*, 1991, **10**(4): 455–470
- 6 Wang Wen-Tao, Liu Xiao-Ping, Zhao Jun. Controlled invariant distributions of nonlinear singular systems and their invariant properties. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(6): 911–919
(王文涛, 刘晓平, 赵军. 非线性奇异系统的受控不变分布及其不变性. *自动化学报*, 2004, **30**(6): 911–919)
- 7 Wu Re-Bing, Li Chun-Wen, Liu Yan-Hong. Right invertibility of nonlinear singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(6): 927–931
(吴热冰, 李春文, 刘艳红. 非线性广义系统的右可逆性. *自动化学报*, 2003, **29**(6): 927–931)
- 8 Zang Q, Dai X Z, Zhang K F. Asymptotic stabilization for a class of nonlinear differential-algebraic sub-systems. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A-Mathematical Analysis*, 2006, 1434–1439
- 9 Qian C J, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1710–1715
- 10 Assouli A, Yaagoubi E, Hammouri H. A high gain observer for a class of implicit systems. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain: IEEE, 2005. 6359–6363

臧 强 东南大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性控制. 本文通信作者. E-mail: qzang@seu.edu.cn

(ZANG Qiang Ph.D. candidate at the School of Automation, Southeast University. His main research interest is nonlinear control. Corresponding author of this paper.)

戴先中 东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为非线性控制、电力系统控制. E-mail: xzdai@seu.edu.cn

(DAI Xian-Zhong Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear control and power systems control.)