

# 基于二维混合模型的重复控制系统稳定性 分析与控制器设计

兰永红<sup>1</sup> 吴敏<sup>1</sup> 余锦华<sup>2</sup>

**摘要** 针对一类线性不确定系统, 提出一种基于连续/离散二维混合模型的重复控制系统设计新方法. 首先建立重复控制系统的连续/离散二维混合模型, 将重复控制器设计问题转化为一类连续/离散二维系统的稳定性问题; 然后应用二维连续/离散系统方法, 给出了重复控制系统新的稳定性条件. 进一步, 利用线性矩阵不等式方法, 获得了重复控制系统稳定边界和重复控制器参数的计算方法. 与现有方法不同的是, 本文以二维混合模型来描述重复控制系统, 更加符合其本质特征, 实现了对重复控制过程中两种不同行为的独立调节. 最后, 数值仿真实例验证了本文所提方法的有效性.

**关键词** 线性系统, 重复控制, 二维系统, 鲁棒控制, 线性矩阵不等式  
**中图分类号** TP13

## Stability Analysis and Controller Design for Repetitive Control Systems Based on 2D Hybrid Model

LAN Yong-Hong<sup>1</sup> WU Min<sup>1</sup> SHE Jin-Hua<sup>2</sup>

**Abstract** This paper concerns stability analysis and controller design for repetitive control. First, a two-dimensional (2D) continuous-discrete hybrid model is derived to describe a repetitive control system. The problem of designing a repetitive controller is then converted to a stabilization problem for the model. Next, new criteria for the asymptotic stability of the system are presented based on the 2D system theory. Furthermore, these criteria are extended to calculate lower bounds on stability margins and design an appropriate controller. Unlike existing methods, this method describes a repetitive control system in terms of a 2D hybrid model so as to independently handle two completely different actions within the system. Finally, a numerical example demonstrates that this approach can provide good performance.

**Key words** Linear systems, repetitive control, 2D systems, robust control, linear matrix inequality (LMI)

重复控制是 1981 年提出的一种新型控制方法, 它将周期信号的动态模型植入系统的控制器内, 从而达到对周期性参考输入进行高精度跟踪或对周期性干扰信号进行有效抑制的目的<sup>[1]</sup>.

基本的重复控制系统如图 1 所示. 重复控制器  $C_R(s)$  是周期信号发生器的严密内部模型,  $L$  为时滞环节的延时时间, 与参考信号的周期一致. 虚线所示部分的传递函数为

$$C_R(s) = \frac{1}{1 - e^{-sL}}$$

因为

$$C_R(j\omega_k) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_k L}} = \infty$$

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{L}, \quad k = 0, 1, \dots$$

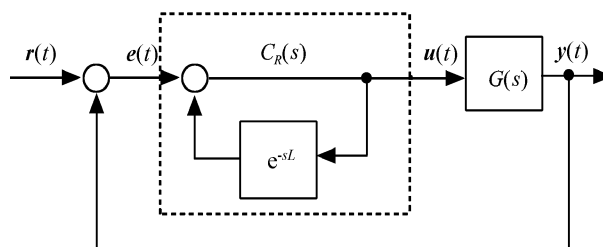


图 1 基本的重复控制系统

Fig. 1 Basic repetitive control system

当重复控制器中含有该内部模型时, 由于在周期信号的基波频率及高次谐波频率处的增益为无穷大, 从而对该周期信号能实现稳态无误差跟踪.

自重复控制提出以来, 不少学者对此展开了广

收稿日期 2008-01-07 收修改稿日期 2009-01-15  
Received January 7, 2008; in revised form January 15, 2009  
国家自然科学基金 (60674016), 国家杰出青年科学基金 (60425310)  
资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60674016) and National Science Fund for Distinguished Youth Scholars of China (60425310)

1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083 2. 东京工业大学计算机科学学部 东京 192-0982

1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, P. R. China 2. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01121

泛深入的研究<sup>[2-8]</sup>, 并且获得了成功的应用<sup>[5, 9-11]</sup>. 但由于重复控制器和低滤波器的参数相互影响, 需要反复调整才能获得比较理想的低通滤波器和重复控制器参数.

实际上, 重复控制系统中存在着两种完全不同的行为: 一个周期之内连续的控制行为和各个周期之间离散的学习行为. 一个周期之内的连续控制行为不受学习行为的影响, 而跟踪精度是通过离散的学习行为来获得提高的. 显然, 这里信息的传递既出现在连续时域中, 也出现在离散时域中. 但目前所提出的各种重复控制系统设计方法, 都是在时间轴上混合考虑这两种行为的综合效应, 忽视了两种行为的差别, 无法对重复控制中的这两种行为独立地进行设计, 不利于重复控制的稳定性、性能和鲁棒性分析与设计. 因此, 有必要把二维系统方法<sup>[12-14]</sup>应用于重复控制系统的分析和设计中.

系统的动态过程依赖于两个独立的变量进行变化的系统称为二维系统, 它在系统科学、数字信号及图像处理等领域具有广泛的应用<sup>[12-14]</sup>. 在二维系统中, 若动态过程依赖的两个变量一个是连续的, 而另一个是离散的, 则称该二维系统为连续/离散二维系统. 传统重复控制的主要困难是难于找到一个合理的数学模型同时表达控制系统连续的控制行为和离散的学习行为, 而在二维系统中存在两个相互独立的动态过程, 可用其一反映一个周期之内连续的控制行为, 用另一过程反映各个周期之间离散的学习行为. 从而, 二维系统模型能成为良好反映重复控制二维特性的一种数学模型.

本文提出一种基于二维混合模型的重复控制设计新方法. 通过建立重复控制系统的连续/离散二维混合模型, 将重复控制器设计问题转化为一类连续/离散二维系统的稳定化问题, 获得了重复控制系统稳定边界和重复控制器参数的计算方法.

如不作特殊说明, 则  $\mathbf{R}^n$  代表  $n$  维实空间,  $\mathbf{R}^{n \times m}$  代表所有  $n \times m$  实矩阵集,  $I$  代表合适维数的单位矩阵,  $*$  代表对称矩阵主对角线下对称部分. 另外,  $X > 0$  ( $X < 0$ ) 表示  $X$  是一个正定 (负定) 矩阵.  $\oplus$  代表直和, 即  $W_1 \oplus W_2 = \text{diag}\{W_1, W_2\}$ .

## 1 重复控制与连续/离散二维混合模型

### 1.1 连续/离散二维线性系统

常见的连续/离散二维系统模型具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 \\ C & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k-1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \mathbf{u}(k, \tau) \quad (1)$$

其中,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $0 \leq \tau \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{x}(k, \tau) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y}(k, \tau) \in \mathbf{R}^m$  为状态矢量,  $\mathbf{u}(k, \tau) \in \mathbf{R}^l$  为控制输入矢量,  $A, B_0, C, D_0, C, D$  为适当维数的常值矩阵.

**定义 1**<sup>[12]</sup>. 对于连续/离散二维系统 (1) 的零初始控制输入  $\mathbf{u}(k, \tau) = \mathbf{0}$ , 如果对于所有的  $\tau > 0$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k, \tau) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

则称该系统渐近稳定.

### 1.2 线性重复控制系统的连续/离散二维混合模型

Inoue 等<sup>[1]</sup>指出, 当控制对象输出中含有前馈直达项 (控制对象相对阶必须为 0) 时, 在系统中直接引入重复控制器能稳定系统, 而对于相对阶大于 0 的控制对象, 是不能稳定的. 为了稳定相对阶大于 0 的控制对象, Hara 等<sup>[15]</sup>通过在时滞环节中插入一个低通滤波器, 构造了改进型重复控制系统. 由于改进型重复控制系统仅仅包含的是周期信号产生器的近似模型, 即使稳定了闭环系统, 也存在稳态偏差. 换句话说, 改进型重复控制系统是通过牺牲对高频成分的跟踪性能来保证系统的稳定性<sup>[15]</sup>.

本文基于二维系统方法, 考虑控制对象输出包含前馈直达项时的重复控制系统设计问题.

考虑如图 2 所示的重复控制系统. 待定向量  $\mathbf{F} = [F_p \ F_e]$  为系统的控制增益. 设控制对象的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  为控制对象的状态,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  为控制输入,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$  为状态输出.

图 2 中, 整个控制规则为

$$\mathbf{u}(t) = F_e \mathbf{v}(t) + F_p \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{v}(t)$  是重复控制器的输出, 即

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{e}(t), & 0 < t < L \\ \mathbf{v}(t-L) + \mathbf{e}(t), & t \geq L \end{cases} \quad (4)$$

这里的设计问题是设计一形如式 (3) 所示的控制器, 使得闭环系统稳定; 同时, 对任意给定周期为  $L$  的参考信号  $\mathbf{r}(t)$ , 使闭环系统的跟踪误差  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)$  收敛于 0.

事实上, 对给定的参考输入, 当控制系统进入稳定状态后, 稳定的状态向量  $\mathbf{x}(t)$  和控制输入向量  $\mathbf{u}(t)$  并不收敛于 0, 但是相邻周期之间的状态向量之差  $\Delta \mathbf{x}(t)$  和控制输入向量之差  $\Delta \mathbf{u}(t)$  却会收敛于

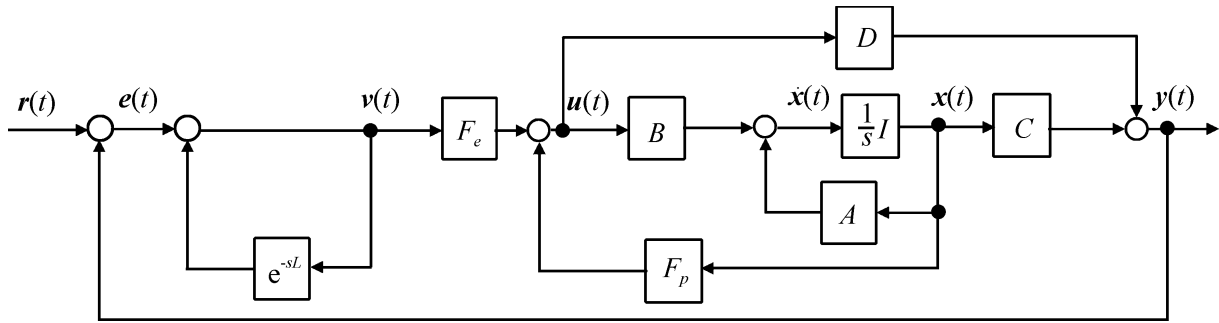


图 2 重复控制系统结构

Fig. 2 Configuration of repetitive control system

0. 为此, 考虑相邻周期之间各状态变化的量, 并对每个变量  $\xi(t)$ , 当  $t < 0$  时, 令  $\xi(t) = \mathbf{0}$ , 当  $t \geq 0$  时, 设  $\Delta\xi(t) = \xi(t) - \xi(t - L)$ .

从而, 由式 (2) ~ (4), 有

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = A\Delta\mathbf{x}(t) + B\Delta\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - L) = -C\Delta\mathbf{x}(t) - D\Delta\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta\mathbf{u}(t) = F_e\Delta\mathbf{v}(t) + F_p\Delta\mathbf{x}(t) = F_e\mathbf{e}(t) + F_p\Delta\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

另一方面, 由于重复控制系统中存在着一个周期之内连续的控制行为和各个周期之间离散的学习行为, 传统重复控制难于找到一个合理的数学模型同时表达重复控制的二维特性. 现分别用两个变量  $t$  和  $k$  来表示这两个动态过程的自变量, 其中  $t$  为一个周期内连续的时间变量, 用来反映一个周期之内连续的控制行为;  $k$  表示离散的学习次数变量, 用来反映各个周期之间离散的学习行为, 并进一步假定:  $\xi(t) = \xi(kL + \tau) = \xi(k, \tau)$ , 其中,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}, 0 \leq \tau \leq L$ . 从而式 (5) 化为:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(k, \tau) = A\Delta\mathbf{x}(k, \tau) + B\Delta\mathbf{u}(k, \tau) \quad (7)$$

$$\mathbf{e}(k, \tau) = \mathbf{e}(k-1, \tau) - C\Delta\mathbf{x}(k, \tau) - D\Delta\mathbf{u}(k, \tau) \quad (8)$$

式 (7) 和 (8) 写成向量形式, 组成了重复控制系统的连续/离散二维混合模型:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k-1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(k, \tau) \quad (9)$$

其中,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}, 0 \leq \tau \leq L$ .

根据连续/离散二维系统渐近稳定的定义, 如果能设计一个二维状态反馈控制器

$$\Delta\mathbf{u}(k, \tau) = [K_p \ K_e] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (10)$$

使连续/离散二维系统 (9) 渐近稳定, 则相应的重复控制系统 (2) 和 (3) 渐近稳定, 且跟踪误差收敛于 0. 具体地, 如果二维状态反馈控制器 (10) 使  $\Delta\mathbf{x}(k, \tau) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , 则相应的重复控制系统 (2) 和 (3) 相邻周期之间的状态向量之差  $\Delta\mathbf{x}(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ , 即沿时间方向, 重复控制系统 (2) 和 (3) 的状态向量渐近稳定; 同时, 如果二维状态反馈控制器 (10) 使  $\mathbf{e}(k, \tau) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , 则相应的重复控制系统 (2) 和 (3) 的跟踪误差渐近稳定, 且具有与连续/离散二维系统 (9) 同样的收敛性能. 可见重复控制设计问题与连续/离散二维系统 (9) 的状态反馈控制问题, 即二维状态反馈控制器 (10) 的设计问题是等价的.

由式 (3) 和 (5), 可得

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{u}(t) = K_e\mathbf{e}(t - L) + K_p\Delta\mathbf{x}(t) \\ K_e = \frac{F_e}{1 + F_eD}, \quad K_p = \frac{F_p - F_eC}{1 + F_eD} \end{cases} \quad (11)$$

由式 (11) 可得

$$F_e = \frac{K_e}{1 - DK_e}, \quad F_p = \frac{K_p + K_eC}{1 - DK_e} \quad (12)$$

显然, 如果存在一个二维状态反馈控制增益  $[K_p \ K_e]$ , 则由式 (12) 能获得图 2 相应的重复控制系统的反馈增益  $[F_p \ F_e]$ .

## 2 基于二维混合模型的线性重复控制系统稳定性分析

### 2.1 基于 LMI 的稳定性分析

为了得出稳定性条件, 先引用文献 [12–13] 的下列引理.

**引理 1**<sup>[12]</sup>. 连续/离散二维系统 (1) 的渐近稳定, 当且仅当多变量多项式

$$C(s, \lambda) = \det \begin{bmatrix} sI_n - A & -B_0 \\ -\lambda C & I_m - \lambda D_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

满足

$$C(s, \lambda) \neq 0, \quad \forall (s, \lambda) \in U_{s, \lambda}^2 \quad (14)$$

其中,  $U_{s, \lambda}^2 = \{(s, \lambda) : \operatorname{Re}(s) \geq 0, |\lambda| \leq 1\}$ .

**引理 2**<sup>[13]</sup>. 如果存在对称正定矩阵  $W_1, W_2$ , 以及任意合适维数对称矩阵  $W_3$ , 使得如下的线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 成立

$$\begin{bmatrix} -W^{11} & W^{11} \bar{A}_2 \\ * & -W^{01} + \bar{A}_1^T W^{10} + W^{10} \bar{A}_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

其中,

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A & B_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & D_0 \end{bmatrix}$$

$W^{11} = W_3 \oplus W_2, W_3 > 0 (W_3 \in \mathbf{R}^{n \times n}), W^{10} = W_1 \oplus 0_m, W^{01} = 0_n \oplus W_2$ , 则连续/离散二维系统 (1) 渐近稳定.

根据引理 1 和引理 2, 不难得到如下结果:

**引理 3.** 连续/离散二维系统 (9) 渐近稳定, 当且仅当多变量多项式

$$C'(s, \lambda) = \det \begin{bmatrix} sI_n - A & 0 \\ \lambda C & 1 - \lambda \end{bmatrix} \quad (16)$$

满足

$$C'(s, \lambda) \neq 0, \quad \forall (s, \lambda) \in U_{s, \lambda}^2 \quad (17)$$

其中,  $U_{s, \lambda}^2 = \{(s, \lambda) : \operatorname{Re}(s) \geq 0, |\lambda| \leq 1\}$ .

**引理 4.** 如果存在对称正定矩阵  $W_1, W_2$ , 以及任意合适维数对称正定矩阵  $W_3$ , 使得如下的 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} -W^{11} & W^{11} \hat{A}_2 \\ * & -W^{01} + \hat{A}_1^T W^{10} + W^{10} \hat{A}_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

其中,

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$W^{11} = W_3 \oplus W_2, W_3 > 0 (W_3 \in \mathbf{R}^{n \times n}), W^{10} = W_1 \oplus 0, W^{01} = 0_n \oplus W_2$ , 则连续/离散二维系统 (9) 渐近稳定.

对于图 2 所示的重复控制系统, 有如下定理:

**定理 1.** 如果存在对称正定矩阵  $W_1, W_2$ , 以及任意合适维数对称矩阵  $W_3$ , 使得

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ * & (1 - DK_e)^T W_2 (1 - DK_e) - W_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

成立, 其中,

$$\Pi_{11} = W_1(A + BK_p) + (A + BK_p)^T W_1 + (C + DK_p)^T W_2 (C + DK_p) - W_3$$

$$\Pi_{12} = W_1 BK_e + (C + DK_p)^T W_2 (DK_e - 1)$$

则重复控制律 (3) 和 (12) 保证图 2 所示的重复控制系统稳定.

**证明.** 在状态反馈控制器 (10) 的作用下, 连续/离散二维系统 (9) 转化为

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_p & BK_e \\ -C - DK_p & 1 - DK_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (21)$$

根据引理 4, 如果存在对称正定矩阵  $W_1, W_2$ , 以及任意合适维数对称矩阵  $W_3$ , 使得

$$\begin{bmatrix} -W^{11} & W^{11} \hat{A}'_2 \\ * & -W^{01} + \hat{A}'_1{}^T W^{10} + W^{10} \hat{A}'_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

成立, 其中,

$$\hat{A}'_1 = \begin{bmatrix} A + BK_p & BK_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C - DK_p & 1 - DK_e \end{bmatrix} \quad (23)$$

$W^{11}, W^{10}$ , 以及  $W^{01}$  与引理 4 中定义一致, 则连续/离散二维系统 (21) 渐近稳定. 不等式 (22) 展开即为不等式 (18).  $\square$

### 2.2 稳定边界

首先给出如下关于稳定边界的定义.

**定义 2.** 连续/离散二维系统 (9) 的稳定边界定义为使

$$C'(s, \lambda) \neq 0, \quad \forall (s, \lambda) \in \hat{U}_{s, \lambda}^2 \quad (24)$$

成立的最大值  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 其中,  $\hat{U}_{s,\lambda}^2 = \{(s, \lambda) : \operatorname{Re}(s) > -\sigma_1, |\lambda| \leq 1 + \sigma_2\}$ .

便于问题的优化, 对给定  $\eta > 0$ , 使得  $0 \leq \eta \leq 1$ , 并定义

$$\sigma_1 = \eta\sigma, \quad \sigma_2 = (1 - \eta)\sigma \quad (25)$$

则稳定边界的计算问题可以转化为寻求  $\sigma$  的最大值问题.

下面的定理给出了一个寻求  $\sigma$  的最大值的 LMI.

**定理 2.**  $\sigma$  的最大值可以通过如下优化问题获得: 对给定的  $0 \leq \eta \leq 1$ , 最大化  $\sigma$ , 使得

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11} & [1 + (1 - \eta)\sigma]\hat{A}_2^T W^{11} \\ * & -W^1 \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

成立, 其中,  $\hat{\Pi}_{11} = 2\eta\sigma W^{10} - W^{01} + \hat{A}_1^T W^{10} + W^{10} \hat{A}_1$ ;  $\sigma > 0$ ,  $W^{10}$ ,  $W^{01}$ ,  $W^{11}$ ,  $\hat{A}_1$  以及  $\hat{A}_2$  与引理 4 中的定义一致.

**证明.** 事实上, 式 (24) 等价于

$$C'(s', \lambda') \neq 0, \quad \forall (s', \lambda') \in \bar{U}_{s',\lambda'}^2 \quad (27)$$

其中,  $\bar{U}_{s',\lambda'}^2 = \{(s', \lambda') : \operatorname{Re}(s') > 0, |\lambda'| \leq 1\}$ ,  $s' = s - \sigma_1$ ,  $\lambda' = \lambda - \sigma_2$ . 由式 (25) 和 (27), 从而可以将  $\eta\sigma I_n + A$  和  $1 + (1 - \eta)\sigma$  分别代替引理 4 式 (19) 中的  $A$  和 1. 经过简单的代数运算, 替代后的式 (18) 即转化为式 (26).  $\square$

### 3 基于 LMI 的重复控制器设计

给出主要结果之前, 先引用如下引理.

**引理 5**<sup>[13]</sup>. 如果存在对称矩阵  $Y > 0$ ,  $Z > 0$  以及任意合适维数矩阵  $M$  和  $N$ , 使得如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi & B_0 Z + BM & YC^T + N^T D^T \\ * & -Z & ZD_0^T + M^T D^T \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

成立, 其中,  $\Phi = AY + Y^T A + BN + N^T B^T$ , 则连续/离散二维系统 (1) 在控制律

$$\mathbf{u}(k, \tau) = [K \ L] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (29)$$

作用下闭环过程稳定. 进一步, 如果 LMI (28) 有解, 则一个能稳的控制律参数为:

$$K = NY^{-1}, \quad L = MZ^{-1} \quad (30)$$

将引理 5 应用于连续/离散二维系统 (9), 得到如下定理:

**定理 3.** 如果存在对称矩阵  $Y > 0$ ,  $Z > 0$  以及任意合适维数矩阵  $M$  和  $N$ , 使得如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi & BM & -YC^T - N^T D^T \\ * & -Z & Z - M^T D^T \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

成立, 其中,  $\Phi = AY + Y^T A + BN + N^T B^T$ , 则连续/离散二维系统 (9) 在状态反馈控制器 (10) 的作用下闭环过程稳定. 进一步, 如果 LMI (31) 有解, 则一个能稳的控制律参数为:

$$K_p = NY^{-1}, \quad K_e = MZ^{-1} \quad (32)$$

特别地, 如果已知稳定边界  $\sigma_1^*$  和  $\sigma_2^*$  的值, 则有如下定理:

**定理 4.** 如果存在对称矩阵  $Y > 0$ ,  $Z > 0$ , 以及合适维数的矩阵  $N$ ,  $M$ , 使得如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi & BM & (1 + \sigma_2^*)(-YC^T - N^T D^T) \\ * & -Z & (1 + \sigma_2^*)(Z - M^T D^T) \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

成立, 其中,  $\Phi = 2\sigma_1^* Y + AY + Y^T A + BN + N^T B^T$ , 则连续/离散二维系统 (9) 在状态反馈控制器 (10) 的作用下闭环过程稳定. 进一步, 如果 LMI (33) 有解, 则一个能稳的控制律参数为:

$$K_p = NY^{-1}, \quad K_e = MZ^{-1}$$

### 4 数值仿真

对控制对象 (2), 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 1$$

考虑如下参考输入信号的跟踪问题:

$$r(t) = \sin \frac{2\pi t}{10} + 0.5 \sin \frac{4\pi t}{10} + 0.5 \sin \frac{6\pi t}{10}$$

应用 Matlab 中的 LMI 工具箱, 求解定理 2 中的优化问题 (26), 得重复控制系统的稳定边界如表 1 所示.

现设计重复控制律 (3), 在不考虑稳定边界限定的情形下, 应用定理 3, 求得重复控制器参数为:

$$F_p = [-0.6443 \quad -0.7532], \quad F_e = 4.0 \quad (34)$$

另一方面, 如果给定稳定边界, 例如,  $\sigma_1 = 0.014$ ,  $\sigma_2 = 0.13$ , 解定理 4 中的可行性问题

(33), 得

$$F_p = [-0.8998 \quad -0.7447], \quad F_e = 4.1747 \quad (35)$$

系统仿真结果示于图 3 和图 4. 图 5 是在不考虑稳定边界限定的情形下, 采用传统的重复控制设计方法, 即采用线性二次型调节 (Linear quadratic regulator, LQR) 方法设计的重复控制器的仿真结果. 采用传统的重复控制设计方法, 经过 5 个周期后, 系统仍然存在一定的稳态误差, 而采用本文提出

表 1 稳定边界  
Table 1 Stability margins

$\eta$	$\sigma$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
0.0	0.142	0.0000	0.1450
0.1	0.142	0.0142	0.1278
0.2	0.141	0.0282	0.1128
0.3	0.142	0.0426	0.0994
0.4	0.141	0.0564	0.0846
0.5	0.139	0.0695	0.0695
0.6	0.138	0.0828	0.0552
0.7	0.136	0.0952	0.0408
0.8	0.134	0.1072	0.0268
0.9	0.132	0.1188	0.0132
1.0	0.130	0.1300	0.0000

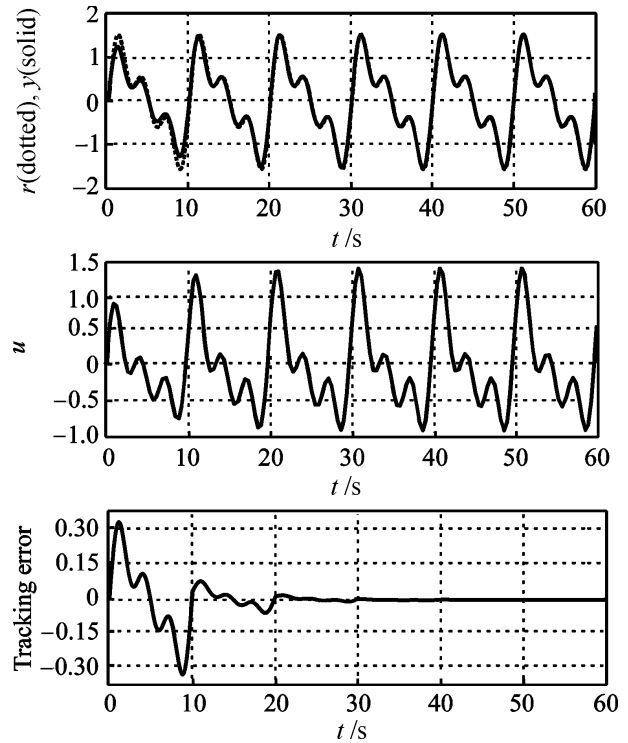


图 4 重复控制律 (3) 作用下的仿真结果  
( $\sigma_1 = 0.014, \sigma_2 = 0.13$ )

Fig. 4 Simulation results for the repetitive control law (3)  
( $\sigma_1 = 0.014, \sigma_2 = 0.13$ )

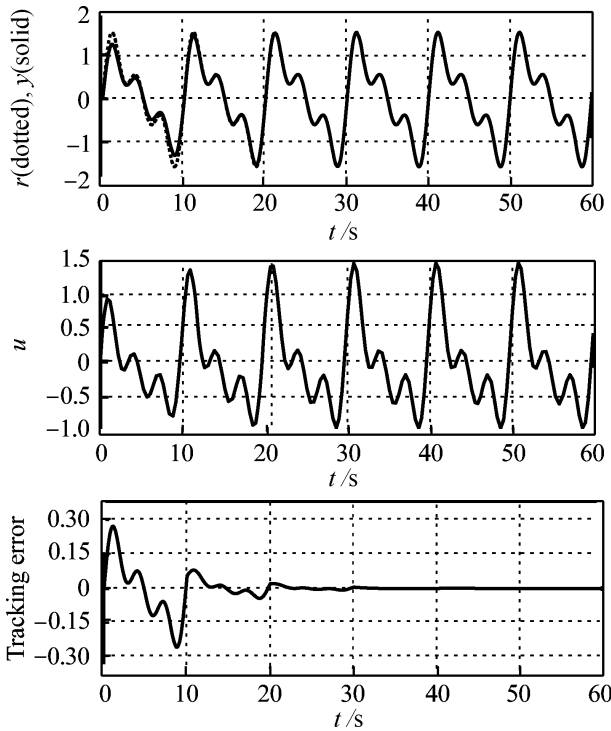


图 3 重复控制律 (3) 作用下的仿真结果 ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )

Fig. 3 Simulation results for the repetitive control law (3)  
( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )

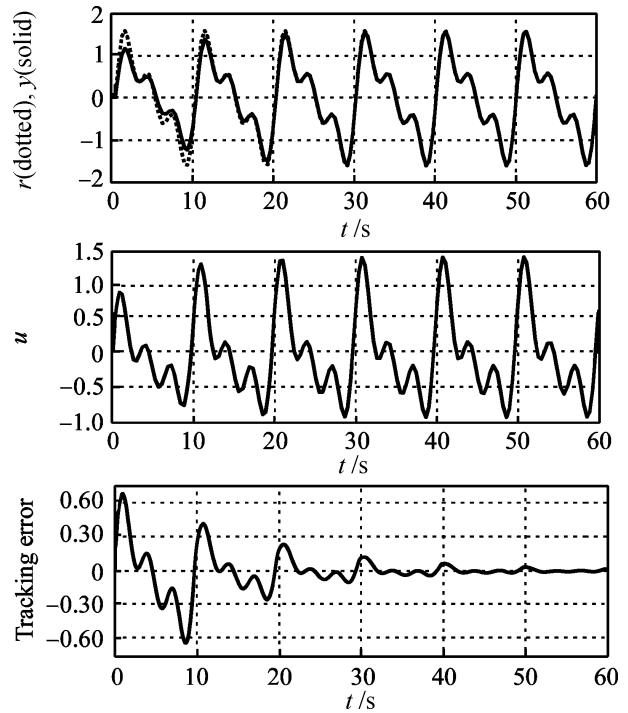


图 5 基于 LQR 方法的重复控制器作用下的仿真结果  
( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )

Fig. 5 Simulation results for the repetitive controller based on LQR ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )

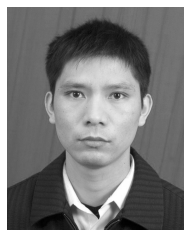
的设计方法, 经过约 3 个周期后, 系统输出便基本进入了稳定状态, 且相对稳态跟踪误差收敛于 0. 可见, 与传统的设计方法相比, 本文提出的设计方法, 提高了系统的跟踪精度和响应速度.

## 5 结语

本文将二维系统方法引入到重复控制系统设计中, 提出了一种基于连续/离散二维混合模型的重复控制设计新方法. 该方法建立了重复控制系统的连续/离散二维混合模型, 并给出了系统稳定的充分条件. 在此基础上, 给出了重复控制系统稳定边界的计算方法, 并推导出基于 LMI 的重复控制器. 最后, 以数值实例说明了所提方法的有效性. 所得结果以本文给出的重复控制设计方法 LMI 形式给出, 可以方便地利用 Matlab 中的 LMI 求解. 仿真研究表明, 仅需几个学习周期就可达到很高的控制精度, 说明二维系统理论在重复控制设计和分析中具有广泛的应用前景.

## References

- Inoue T, Iwai S, Nakano M. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply. In: Proceedings of the 8th IFAC World Congress. Oxford, UK: Pergamon Press, 1981. 3137–3142
- She J H, Pan Y, Nakano M. Repetitive control system with variable structure controller. In: Proceedings of the 6th International Workshop on Variable Structure Systems. Gold Coast, Australia: World Scientific, 2000. 273–282
- Owens D H, Li L M, Banks S P. Multi-periodic repetitive control system: a Lyapunov stability analysis for MIMO systems. *International Journal of Control*, 2004, **77**(5): 504–515
- Park S W, Jeong J Y, Yang H S, Park Y P, Park N C. Repetitive controller design for minimum track misregistration in hard disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, **41**(9): 2522–2528
- Chang K, Shim I, Park G. Adaptive repetitive control for an eccentricity compensation of optical disk drives. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 2006, **52**(2): 445–450
- Li J W, Tsao T C. Robust performance repetitive control systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, **123**(3): 330–337
- Chen J W, Liu T S.  $H_\infty$  repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, **41**(2): 1067–1069
- Ramrath L, Singh T. A minimax approach to robust repetitive learning control. In: Proceedings of the International Conference on Control and Automation. Budapest, Hungary: IEEE, 2005. 397–402
- Doh T Y, Ryoo J, Chung M J. Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 2006, **153**(3): 323–330
- Zhou K L, Low K S, Wang D, Luo F L, Zhang B, Wang Y. Zero-phase odd-harmonic repetitive controller for a single-phase PWM inverter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2006, **21**(1): 193–201
- Ye Y Q, Zhou K L, Zhang B, Wang D W, Wang J C. High-performance repetitive control of PWM DC-AC converters with real-time phase-lead FIR filter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2006, **53**(8): 768–773
- Xie L H, Du C L.  $H_\infty$  Control and Filter of Two-dimensional System. Berlin: Springer, 2002. 5–25
- Galkowski K, Paszke W, Rogers E, Xu S, Lam J, Owens D H. Stability and control of differential linear repetitive processes using an LMI setting. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Processing*, 2003, **50**(9): 662–666
- Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 136–183
- Hara S, Yamamoto Y, Omata T, Nakano M. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(7): 659–668



兰永红 博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制和学习控制.  
E-mail: lyhcsu@yahoo.com.cn  
(LAN Yong-Hong Ph.D. candidate. His research interest covers robust control and learning control.)



吴敏 博士, 教授. 主要研究方向为鲁棒控制、过程控制和智能系统. 本文通信作者. E-mail: min@csu.edu.cn  
(WU Min Ph.D., professor. His research interest covers robust control, process control, and intelligent systems. Corresponding author of this paper.)



余锦华 博士, 教授. 主要研究方向为控制理论与应用、专家控制和智能机器人.  
E-mail: she@cc.teu.ac.jp  
(SHE Jin-Hua Ph.D., professor. His research interest covers applications of control theory, expert control and robotics.)