

不完全量测下 Cramer-Rao 下界与数据丢失位置的关系

许志刚^{1,2} 陈黎¹ 穆育强¹ 盛安冬¹

摘要 随机探测/丢失序列的引入使得状态估计中的 Cramer-Rao 下界 (Cramer-Rao lower bound, CRLB) 具有随机性; 在探测概率小于 1 的不完全量测系统中, 针对 CRLB 与数据丢失位置 (Location of missing data, LMD) 之间呈现出的某种关联现象, 讨论了离散随机系统中 LMD 对 CRLB 的影响; 利用 Lyapunov 不等式, 给出了一定条件下变形 CRLB 与 LMD 满足单调递减函数关系这一新结论; 同时在给定探测率下, 给出了一组 CRLB 上下界计算方法, 数字仿真表明探测率越高, 上下界越接近理论 CRLB.

关键词 估计, 不完全量测, Cramer-Rao 下界, Lyapunov 稳定性
中图分类号 TP120.30

Research on the Relationship between Cramer-Rao Lower Bound and Location of Missing Data with Incomplete Measurements

XU Zhi-Gang^{1,2} CHEN Li¹ MU Yu-Qiang¹ SHENG An-Dong¹

Abstract Since the stochastic detection/miss sequences are introduced, Cramer-Rao lower bound (CRLB) for state estimation becomes stochastic. Considering a correlation phenomenon between CRLB and location of missing data (LMD) for incomplete measurements systems in the case where the probability of detection is less than unity, the influence of LMD upon the CRLB is discussed for discrete-time random system. It is a novel result that under certain conditions the modified CRLB is a monotonically decreasing function of LMD by use of Lyapunov inequality. Moreover, a pairs of upper and lower bounds of CRLB are also presented for a deterministic probability of detection. The numeral simulations reveal that the upper and lower bounds of CRLB approach the theoretic CRLB as the probability of detection increases.

Key words Estimation, incomplete measurements, Cramer-Rao lower bound (CRLB), Lyapunov stability

在参数估计问题中, 基于某一性能指标的最优滤波器往往不容易建立, 人们就去寻找一些次优的滤波方法. 在众多滤波方法中选用合适次优方法就会遇到如何评价滤波效果问题. 评价滤波性能是很困难的一件事, 常用的方法是进行大量实验仿真, 或与理想最优性能的下界进行比较. 最优性能下界给出了滤波性能的最优极限, 它还可用来判别事先所要求的性能指标是否可行.

在二阶误差性能指标意义下, 最优线性/非线性滤波均方误差可以用理论的 CRLB (Cramer-Rao lower bound)^[1] 表示. CRLB 在滤波中的应用已经被广泛研究. 传统上, CRLB 主要被用来估计次优线性/非线性滤波的误差性能, 由于 CRLB 在系统构建前能预测可达到的最优理论性能指标, 因此也可以利用它来进行系统设计. 例如, CRLB 已经被用在

纯方位跟踪 (Bearing-only tracking, BOT) 中的性能分析^[2] 和声纳网的设计中^[3]. 以往计算 CRLB 需要取高阶矩阵的逆, 随着采样时间的延长, 使得计算复杂度越来越高. 1998 年, Tichavsky 等^[4] 推导出了离散系统滤波后验 CRLB (Posterior Cramer-Rao lower bound, PCRLB) 的一个递推计算公式, 该式适合运用在线性/非线性状态空间模型中, 结果也被推广到多维状态空间模型的一般情况, 并且模型可不必是高斯型假设.

前期的研究工作对滤波中 CRLB 研究大都假设量测数据 (输出) 是无丢失的, 即探测概率等于 1, 而在很多实际应用领域中, 一个较为普遍现象是传感器 (声纳、激光等) 探测能力的有限性使得探测概率往往小于 1. 这种量测数据丢失使得输出不完全的估计问题被称为不完全量测的估计问题. 在不完全量测下的估计模型、算法都将发生不同的变化. 同样也带来了估计精度的波动; 由于随机丢失/探测序列的引入, 相应的估计性能评价指标 Cramer-Rao 阵和 Riccati 方程具有了随机性, 性质也有了新的变化, 较早的 Nahi^[5] 基于最小均方差给出了不完全量测下的一个递归估计器; 随后一些学者加入到这类问题的研究中, 有的利用跳变线性系统 (Jump linear system, JLS) 来研究这类问题, 或基于方差

收稿日期 2008-07-08 收修改稿日期 2009-01-09
Received July 8, 2008; in revised form January 1, 2009
国家自然科学基金 (60804019) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60804019)
1. 南京理工大学自动化学院 南京 210094 2. 淮海工学院理学院 连云港 222005
1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. School of Sciences, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01080

性能指标研究了滤波增益集和控制增益满意集, 还有的研究了不完全量测下的时滞 H_∞ 控制等. 近期一种所谓信息缩减因子 (Information reduction factor, IRF) 方法^[6] 被提出, IRF 法是利用探测率作为信息比例系数, 形式简洁, 但保守性较高; 文献 [7] 则给出了不完全量测下, CRLB 在非线性滤波中的穷举算法和应用, 这种穷举法也给出了理想 CRLB, 但计算量随采样时间呈指数型增长; 2004 年 Hernandez 等^[8] 比较了 IRF 法的 CRLB 和枚举 CRLB, 得出了 IRF 总是不超过枚举 CRLB 的结论; 另外 Sinopoli 等^[9] 给出了一系列间歇量测下的 Kalman 滤波相关结果, 讨论了滤波收敛的临界探测率和估计误差协方差的上下界; 这类问题也被延伸到多包丢失情形^[10]. 这些成果都为进一步研究提供了良好的基础.

从上述文献分析中可以发现 CRLB 与 LMD (Location of missing data) 有很大的关系, IRF 法过于保守的原因就是没有考虑 LMD, 以至于当探测精度提高时, 估计相对误差反而变大^[11]. 就我们所知, 目前还没有文献对此问题进行研究. 本文基于不完全量测下, 对 CRLB 与 LMD 关系进行理论上的探讨, 在一定条件下给出 CRLB 与 LMD 的变化规律. 由于理论 CRLB 计算量随着采样数据增加呈指数型增大 (计算复杂度为 $O(2^k)$), 很多情况下理论 CRLB 的求解是不可行的, 虽然利用 Monte Carlo 法能给出逼近理论 CRLB 的近似值, 但也存在计算量巨大的问题, 且近似值不统一, 即不能给出可靠的 CRLB 真值上下界. 这里利用 CRLB 与 LMD 的关系给出理论 CRLB 的一组上下界估计式, 计算复杂度为 $O(k^2)$.

1 不完全量测下的 CRLB

1.1 状态和量测模型

考虑下列系统方程

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + G\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = d_k H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$, λ 为探测率, 噪声 $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 服从零均值高斯分布, 协方差分别为 Q 和 R , 非奇异阵; 二元随机变量 $d_k \in \{0, 1\}$ 服从 Bernoulli 分布, 它的概率分布为 $p\{d_k = 1\} = \lambda$, 表示目标被探测到的概率; 控制量 \mathbf{u}_k 、系数 G 为已知阵; 输出噪声 \mathbf{v}_k 与 d_k 满足

$$p(\mathbf{v}_k | d_k) = \begin{cases} N(\mathbf{v}_k : 0, R), & d_k = 1 \\ N(\mathbf{v}_k : 0, \sigma^2 I), & d_k = 0 \end{cases}$$

其中, $N(x : a, b)$ 表示变量 x 服从均值为 a , 方差为

b 的高斯分布. $d_k = 0$, 即量测数据丢失时, 对应的 σ 取极限形式: $\sigma \rightarrow \infty$.

1.2 状态估计的 CRLB 递推法

设 \mathbf{z} 是量测向量, 向量 $\hat{\mathbf{x}}_k(\mathbf{z})$ 是状态向量 \mathbf{x}_k 的一个无偏估计, 则估计误差协方差阵满足

$$P_k \triangleq E[(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T] \geq J_k^{-1} \quad (3)$$

其中, J_k 为 Fisher 信息矩阵 (Fisher information matrix, FIM); 不等式表示 $P_k - J_k^{-1}$ 是一个半正定矩阵. CRLB 是 FIM 的逆, 即 $C_k \triangleq J_k^{-1}$.

通过式 (3) 求逆计算 CRLB 是非常困难的, Tichavsky 等^[4] 给出了离散型滤波信息阵 J_k 的一个递推计算公式

$$J_{k+1} = D_k^{33} - D_k^{21}(J_k + D_k^{11})^{-1}D_k^{12} + J_{k+1,Z} \quad (4)$$

这里

$$D_k^{11} = E[-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_k} \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)] \quad (5)$$

$$D_k^{12} = E[-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)] \quad (6)$$

$$D_k^{21} = E[-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_k} \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)] = [D_k^{12}]^T \quad (7)$$

$$D_k^{33} = E[-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \ln p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)] \quad (8)$$

$$J_{k+1,Z} = E[-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{z}_{k+1}} \ln p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})] \quad (9)$$

初始信息阵可以通过先验信息 $p(\mathbf{x}_0)$ 得到

$$J_0 = E[-\Delta_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_0} \ln p(\mathbf{x}_0)]$$

1.3 不完全量测下的 CRLB 递推法

考虑某个量测/丢失序列

$$S_k : d_1, d_2, \dots, d_k$$

其中, $d_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots$. 在加性噪声系统情况下 (即 $Q > 0$), 与量测信息有关的式 (9) 可写为^[7]

$$J_{k+1,z}(S_{k+1}) = d_{k+1}(S_{k+1})H^T R^{-1}H \quad (10)$$

相应的 FIM 递推式 (4) 为

$$J_{k+1}(S_{k+1}) = Q^{-1} + d_{k+1}(S_{k+1})H^T R^{-1}H - Q^{-1}F[J_k(S_k) + F^T Q^{-1}F]^{-1}F^T Q^{-1} \quad (11)$$

在不含过程噪声情况下 ($Q = 0$), 有

$$J_{k+1}(S_{k+1}) = (F^{-1})^T J_k(S_k) F^{-1} + d_{k+1}(S_{k+1})(H^T R^{-1}H) \quad (12)$$

对应量测/丢失序列 S_k 的 CRLB 为

$$C_k(S_k) = [J_k(S_k)]^{-1} \quad (13)$$

2 CRLB 与 LMD 的关系

从式 (11) 和 (12) 可以看出, CRLB 与丢失数据位置有关, 下面 3 个关于正定矩阵性质的引理, 在证明 CRLB 与数据丢失位置关系时将会用到.

引理 1. 设方阵 A, B, C , 如果 $A > B$ 且 $|C| \neq 0$, 则

$$C^T A C > C^T B C$$

引理 2. 设可逆对称矩阵 A 和 B , 如果 $A > B > 0$, 则

$$B^{-1} > A^{-1}$$

引理 3. 设方阵 A, B, C, D , 若 A 和 B 可逆, 则

$$(A + DBE)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}D(B^{-1} + EA^{-1}D)^{-1}EA^{-1}$$

首先针对某个量测序列, 只研究一个丢失量测位置发生变化对 CRLB 的影响. 考虑与文献 [12] 一样的过程噪声为零 ($Q = 0$) 时的系统, FIM 计算式为式 (12).

定理 1. 假设离散系统 (1) 和 (2) 中矩阵 F 可逆、可稳; 不含过程噪声; 设采样序列中只有一次数据丢失, τ 表示丢失数据的位置 ($\tau = 1, 2, \dots$); 则 $C_t(\tau)$ 是 τ 的单调递减函数. 其中, $C_t(\tau)$ 是关于 τ 的函数, 表示 t 时刻 CRLB, 这里 $\tau < t$.

证明. 由于 $C_t(\tau)$ 是 τ 的离散函数, 只需证明对任意 τ , 有 $C_t(\tau + 1) \leq C_t(\tau)$ 即可, 一般情况可递推得出. 为了方便, 不妨将 τ 取不同数值看作两个探测序列: $\{S_{k+1}^A\}$ 组和 $\{S_{k+1}^B\}$ 组.

$\{S_{k+1}^A\}$ 组: k 时刻数据丢失, 即 $d_k^A = 0$ ($\tau = k$), $k+1$ 时刻探测到数据, 即 $d_{k+1}^A = 1$;

$\{S_{k+1}^B\}$ 组: k 时刻探测到数据, 即 $d_k^B = 1$, $k+1$ 时刻数据丢失, 即 $d_{k+1}^B = 0$ ($\tau = k+1$).

不妨设两组序列在 $k-1$ 时刻有相同的信息阵 J_{k-1} , 两组序列其余探测信息完全相同.

对 $\{S_{k+1}^A\}$ 组:

$$J_k^A = (F^{-1})^T J_{k-1} F^{-1} \quad (14)$$

$$J_{k+1}^A = (F^{-1})^T J_k^A F^{-1} + H^T R^{-1} H \quad (15)$$

对 $\{S_{k+1}^B\}$ 组:

$$J_k^B = (F^{-1})^T J_{k-1} F^{-1} + H^T R^{-1} H \quad (16)$$

$$J_{k+1}^B = (F^{-1})^T J_k^B F^{-1} \quad (17)$$

式 (14) 和 (16) 相减, 利用引理 1 可得

$$J_k^B - J_k^A = H^T R^{-1} H > 0 \quad (18)$$

式 (15) 和 (17) 相减, 得

$$\begin{aligned} J_{k+1}^A - J_{k+1}^B &= -(F^{-1})^T H^T R^{-1} H F^{-1} + \\ &H^T R^{-1} H = \\ &\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \ln p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{k+1}) - \\ &\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \ln p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \end{aligned} \quad (19)$$

因系统矩阵 F 可稳, 由 Lyapunov 稳定性理论, 对任意正定阵 ϕ 下列不等式成立

$$F^T \phi F - \phi < 0$$

取 $\phi = H^T R^{-1} H$, 由式 (19) 易得

$$J_{k+1}^A - J_{k+1}^B < 0$$

依据引理 2, 所以

$$C_{k+1}^A = [J_{k+1}^A]^{-1} > [J_{k+1}^B]^{-1} = C_{k+1}^B \quad (20)$$

□

注 1. 定理 1 也可重述为: 在量测数据数量 (采样时间) 相同的两组量测序列中, 如果 $\{S_k^A\}$ 组量测序列第 i 时刻数据丢失 ($d_i^A = 0$), 第 j 时刻量测到数据 ($d_j^A = 1$), 而 $\{S_k^B\}$ 组量测序列第 i 时刻量测到数据 ($d_i^B = 1$), 第 j 时刻数据丢失 ($d_j^B = 0$), 若 $j > i$, 两组其他量测数据信息相同, 则 $\{S_k^A\}$ 组的 CRLB 大于 $\{S_k^B\}$ 组的 CRLB.

注 2. 从定理 1 及证明可以看出, 若某个量测序列中某个量测数据被去掉 (丢失), 则 CRLB 将变大; 定理 1 含义也可以理解为量测数据丢失越早, 一般来说 CRLB 越大.

将上述单个数据结论推广到多个丢失数据情形可得推论 1.

推论 1. 对离散系统 (1) 和 (2), F 可逆、可稳; 不含过程噪声; k 个采样组成的量测序列 $\{S_k^B\}$ 中包含 m 个丢失数据.

1) 记丢失位置最小值为 τ_1 , 若将 m 个丢失位置换到前面位置 $\tau_1, \tau_1+1, \dots, \tau_1+m-1$, ($\tau_1+m-1 \leq k$), 其他数据信息不变, 形成新量测序列 $\{S_k^A\}$, 则有 $C_k^A \geq C_k^B$.

2) 记丢失位置最大值为 τ_2 , 若将 m 个丢失位置换到后面位置 $\tau_2-m+1, \dots, \tau_2-1, \tau_2$, ($\tau_2-m \geq 0$), 其他数据信息不变, 形成新量测序列 $\{S_k^C\}$, 则有 $C_k^C \leq C_k^B$.

证明. 利用定理 1 及证明方法, 从第 τ_1 位置开始递推到第 τ_m 位置, 比较 C_k^A 和 C_k^B 大小, 即可证明 1). 同理可证 2). □

虽然 CRLB 数值会受到某个丢失数据位置变化的影响, 但随着采样时间越长, 这种影响将越来越小, 将这个结果归纳为如下定理.

定理 2. 离散系统 (1) 和 (2) 中系统矩阵 F 为稳定阵; 不含过程噪声; 对某个探测序列, 随着采样时间越长, $C_n(\tau)$ 受 τ 影响的程度越小, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(\tau) = c$$

或

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|C_n^A(S_n^A) - C_n^B(S_n^B)\| = 0$$

这里 $\{S_{k+1}^A\}$ 和 $\{S_{k+1}^B\}$ 含义同定理 1, c 为常数.

证明. 量测序列 $\{S_{k+1}^A\}$ 、 $\{S_{k+1}^B\}$ 仍采用定理 1 定义; 在采样时刻 n 时, 两量测序列的 FIM 为

$$J_n^A = (F^{-n+k-1})^T J_{k-1} (F^{-n+k-1}) + \sum_{i=0}^{n-k} (F^{-i})^T (H^T R^{-1} H) (F^{-i}) - (F^{-n+k})^T (H^T R^{-1} H) (F^{-n+k}) \quad (21)$$

$$J_n^B = (F^{-n+k-1})^T J_{k-1} (F^{-n+k-1}) + \sum_{i=0}^{n-k} (F^{-i})^T (H^T R^{-1} H) (F^{-i}) - (F^{-n+k+1})^T (H^T R^{-1} H) (F^{-n+k+1}) \quad (22)$$

其中, $F^{-i} \triangleq (F^{-1})^i$.

记 $\rho(F)$ 为 F 谱半径; 由于 F 为稳定矩阵, 则 $\rho(F) < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n = 0$, 又由于稳态 CRLB 存在且有限, 比较式 (21) 和 (22), 利用矩阵级数收敛性质不难推出

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^A = \lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n^A)^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n^B)^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^B \quad (23)$$

根据定理 1 和推论 1, 当丢失位置 τ 取其他不同数值形成另外一组量测序列, 等式 (23) 仍然成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(\tau) = c$. \square

在 $Q > 0$ 的随机系统中, CRLB 与 LMD 的关系比较复杂, 不再是严格单调关系, 这里限于篇幅仅做简单讨论. 随机系统 FIM 计算公式为式 (11), 由引理 3, 式 (11) 可化为

$$J_{k+1}(S_{k+1}) = [Q + F(J_k(S_k))^{-1} F^T]^{-1} + d_{k+1}(S_{k+1}) H^T R^{-1} H \quad (24)$$

量测序列 $\{S_{k+1}^A\}$ 、 $\{S_{k+1}^B\}$ 信息阵在 $k+1$ 时刻差为

$$J_{k+1}^A - J_{k+1}^B = H^T R^{-1} H + [Q + F(J_k^A)^{-1} F^T]^{-1} - [Q + F(J_k^B)^{-1} F^T]^{-1} =$$

$$(H^T R^{-1} H) - [J_k^A F^{-1} Q + F^T]^{-1} \times (H^T R^{-1} H) [Q (F^T)^{-1} J_k^B + F]^{-1} \quad (25)$$

不妨取 $J_0^{-1} > Q$, 若 $\sigma(A)$ 表示 A 特征值, 记

$$\sigma_{\min} = \min\{|\sigma[J_k^A F^{-1} Q + F^T]|, |\sigma[Q (F^T)^{-1} J_k^B + F]|\}$$

$$\sigma_{\max} = \max\{|\sigma[J_k^A F^{-1} Q + F^T]|, |\sigma[Q (F^T)^{-1} J_k^B + F]|\}$$

由式 (25), 类似定理 1 讨论, 有

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} < 1 &\Rightarrow C_{k+1}^A > C_{k+1}^B \\ \sigma_{\min} > 1 &\Rightarrow C_{k+1}^A < C_{k+1}^B \end{aligned}$$

随着采样时间 k 增大, 一般 J_k 也变大, CRLB 与 LMD 一般不再服从严格单调关系. 从上面讨论可以看出, 当 F, Q 不变, 有

$$\begin{aligned} C_{\tau_1}^A > C_{\tau_1}^B, \exists \tau_1 &\Rightarrow C_k^A \geq C_k^B, \forall k \leq \tau_1 \\ C_{\tau_2}^A < C_{\tau_2}^B, \exists \tau_2 &\Rightarrow C_k^A < C_k^B, \forall k \geq \tau_2 \end{aligned}$$

3 CRLB 的上下界

给定探测率 λ , 要用式 (12) 和 (13) 计算理想 CRLB 数值, 需知道探测序列中数据丢失位置, 可以用穷取法, 穷取所有量测/丢失序列, 分别计算 CRLB, 然后加权求和, 权重为探测序列概率.

在采样时刻 k , 所有可能的量测/丢失序列共有 2^k 个, 记为 $\{S_k^{(l)} | l = 1, 2, \dots, 2^k\}$; 取期望可得枚举法 CRLB 计算公式为^[7]

$$C_k(\text{ENUM}) \triangleq E_{S_k} [J_k(S_k)^{-1}] = \sum_{l=1}^{2^k} [J_k(S_k^{(l)})^{-1}] P\{S_k^{(l)}\} \quad (26)$$

式 (26) 是将所有可能的量测/丢失序列进行加权平均, 所以它是真实精确的 CRLB, 然而在采样时间为 k 时, 所有量测/丢失序列共有 2^k 个, 计算量随时间呈指数性增长的, 难以离线计算, 给应用带来了困难.

如果对式 (11) 和 (12) 取期望可得对应不同系统 CRLB 的缩减因子法 (IRF)^[8, 11]:

状态方程含过程噪声的 FIM 为

$$J_{k+1}(\text{IRF}) = Q^{-1} + \lambda H^{-1} R H - Q^{-1} \times F [J_k(\text{IRF}) + F^T Q^{-1} F]^{-1} F^T Q^{-1} \quad (27)$$

状态方程不含过程噪声 FIM^[8] 为

$$J_{k+1}(\text{IRF}) = (F^{-1})^T J_k(\text{IRF}) F^{-1} + \lambda(H^T R^{-1} H) \quad (28)$$

实际上 IRF 法是用 R/λ 代替量测协方差阵 R .

文献 [8] 给出下列关系式

$$C_{k|k}(\text{IRF}) \leq C_k(\text{ENUM}) \quad (29)$$

其中, $C_{k|k}(\text{IRF}) = J_{k|k}^{-1}(\text{IRF})$.

从文献 [11] 仿真中可以发现, 在 R 越小, 即量测精度越高的情形下, IRF 法与理论 CRLB 之间的相对差距反而越大.

下面在前面 CRLB 与量测/丢失数据位置关系基础上, 不考虑过程噪声, 给出一组 CRLB 上下界计算公式. 公式计算量小, 复杂度仅为 $O(k^2)$.

定理 3. 离散系统 (1) 和 (2) 中矩阵 F 可逆、可稳; 不考虑过程噪声; 探测率 λ 为常数, 采样时刻为 k , 记

$$\delta_{k,j}^{(i)} = \begin{cases} 0, & i \geq j \\ 1, & i < j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\tilde{\delta}_{k,j}^{(i)} = \begin{cases} 1, & i + j \leq k \\ 0, & i + j > k \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

构造两个量测/丢失序列集

$$S_k^{(i)} : \{\delta_{k,j}^{(i)}\}_{j=1}^k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

$$\tilde{S}_k^{(i)} : \{\tilde{\delta}_{k,j}^{(i)}\}_{j=1}^k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

每个序列集各包含 $k+1$ 个量测/丢失序列. 则

$$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (1-\lambda)^r \lambda^{k-r} C_k\{S_k^{(r)}\} \geq C_k(\text{ENUM}) \geq \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (1-\lambda)^r \lambda^{k-r} C_k\{\tilde{S}_k^{(r)}\} \quad (30)$$

证明. 在采样 k 时刻含有 r 个丢失数据的量测/丢失序列共有 $\binom{k}{r}$ 个, 将它们依次编号, 编号集记为 $\omega_{k,r} = \left\{1, 2, \dots, \binom{k}{r}\right\}$; 第 l 个序列记为 $S_{k,l}^{(r)}$, 每个序列的概率都是一样, 即

$$p(S_{k,l}^{(r)}) = (1-\lambda)^r \lambda^{k-r}$$

由式 (26) 可写出枚举法 CRLB 为

$$C_k(\text{ENUM}) = \sum_{r=0}^k \sum_{l \in \omega_{k,r}} p(S_{k,l}^{(r)}) C_k(S_{k,l}^{(r)}) \quad (31)$$

依据推论 1, 有

$$C_k(S_k^{(r)}) \geq C_k(S_{k,l}^{(r)}) \geq C_k(\tilde{S}_k^{(r)}) \quad (32)$$

由式 (31) 和 (32) 经简单数学运算可得式 (30). \square

注 3. 当采样数据数量较大 (海量) 时, 可以对 CRLB 上下界预估, 下面给出一个计算量较小预估上下界计算公式. 只需计算一个量测序列的 CRLB 即可.

记 k 为采样时刻, 探测率 λ 为常数, $l = (1-\lambda)k$, 构造如下两个探测序列,

$$S_k^{\text{up}} : d_1, d_2, \dots, d_k$$

其中, $d_1 = \dots = d_l = 0, d_{l+1} = \dots = d_k = 1$;

$$S_k^{\text{low}} : d'_1, d'_2, \dots, d'_k$$

其中, $d'_1 = \dots = d'_{k-l} = 1, d'_{k-l+1} = \dots = d'_k = 0$; 则 $C_k(S_k^{\text{low}})$ 、 $C_k(S_k^{\text{up}})$ 可作为 $C_k(\text{ENUM})$ 上下界预估近似值.

4 数值算例

考虑下列离散时不变完全量测系统^[13]

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{z}_k = d_k H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中,

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_w^2, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_v^2$$

$\sigma_w^2 = 0.1, \sigma_v^2 = 0.5$; 传感器探测率 $\lambda = 0.9$, 采样时刻 $k = 1, 2, 3, \dots$; 不妨, 这里取 CRLB 为: $C_k \triangleq \text{tr}[(J_k)^{-1}]$.

图 1~3 系统不含过程噪声; 图 1 表示对应不同丢失位置的 CRLB 数值, 其中横轴刻度表示 LMD, 纵轴表示对应不同丢失位置在 $k = 10$ 时刻的 CRLB 数值, 这里设数据丢失一次. 图形反映 CRLB 与丢失位置成单调递减的关系.

图 2 中给出定理 3 中上下界与理想 CRLB 的比较, 其中传感器探测率为 $\lambda = 0.9$, 横轴代表采样时刻, 纵轴代表 k 时刻的 CRLB 数值. 从图中可以看出, 随着采样时间的增加, 提出的上下界逐渐逼近理论 CRLB.

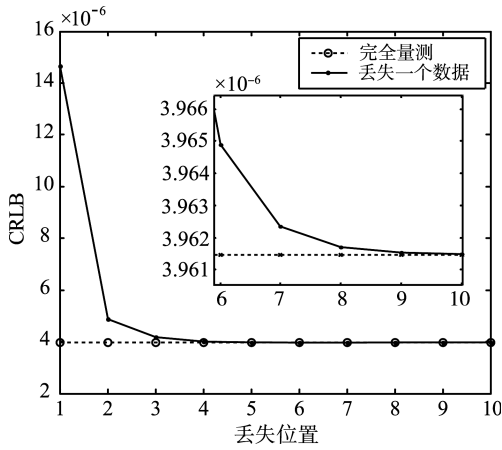


图 1 C_{10} 与 LMD 的关系

Fig. 1 The relation between CRLB and LMD

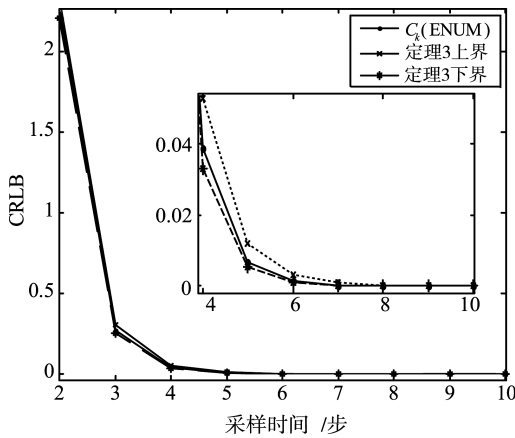


图 2 C_k (ENUM) 与定理 3 上下界的关系

Fig. 2 The relation between C_k (ENUM) and the upper and lower bounds given in Theorem 3

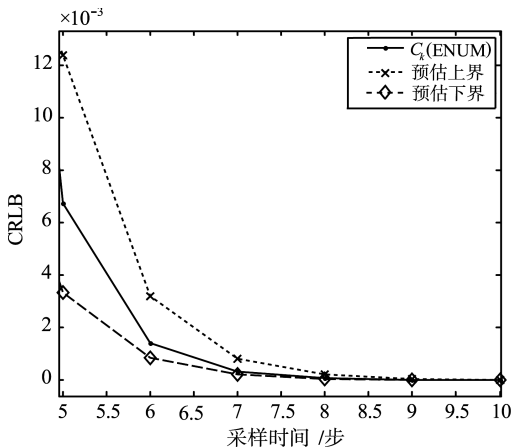


图 3 C_k (ENUM) 与预估上下界的关系

Fig. 3 The relation between C_k (ENUM) and the predictive upper and lower bounds

图 3 也是在传感器探测率为 $\lambda = 0.9$ 下, 利用注 3 中方法计算的预估上下界与理想 CRLB 的比较, 横轴代表采样时刻, 纵轴代表 k 时刻的 CRLB

数值. 这里可以看出图 3 的上下界与图 2 中比较开始时偏差较大, 随着采样时间增加, 上下界也能较好的向理想 CRLB 靠近.

图 4 表示系统包含过程噪声 Q 时 CRLB 与 LMD 的关系, 从图中可以看出, CRLB 与 LMD 不再是单调关系, 与 F, H, Q 有关, 这里暂不详细讨论.

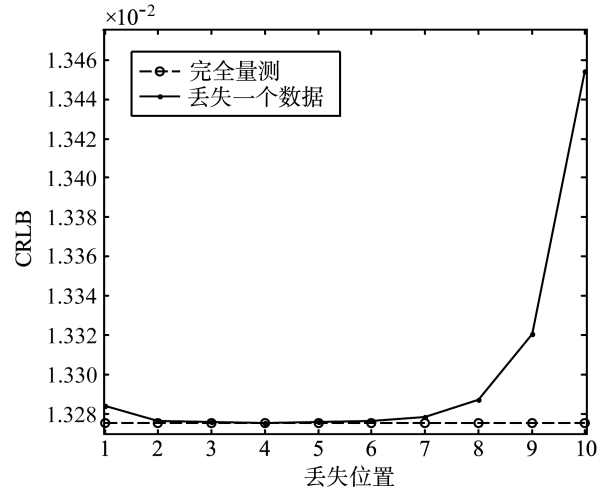


图 4 随机系统 C_{10} 与 LMD 的关系

Fig. 4 The relation between CRLB and LMD in stochastic system

5 结束语

不完全量测下的理想 CRLB 计算量随时间呈指数增长; IRF 法计算简便, 但探测率越高, IRF 法相对估计误差越大. 本文基于不完全量测对过程噪声为零的系统给出了丢失数据位置变化与 CRLB 的关系, 对噪声大于零的系统讨论了丢失位置对 CRLB 的影响, 结果也说明了 IRF 法不是理想的 CRLB, 因为 IRF 法没有考虑 LMD; 基于 CRLB 与 LMD 的关系, 文中给出了两组计算量较小的 CRLB 上下界计算公式, 在大部分工程问题中, 由于探测率不能低于一定的数值^[4], 这两组上下界公式一般情况下能符合工程精度要求且计算量很小, 量测精度越高, 上下界越接近真值. 这里的研究结果为进一步探索利用 CRLB 的变化对探测器性能进行评估, 或用来估计信号传输通道的故障位置和网络节点配置^[15]提供了新的思路. 量化量测^[16]中 CRLB 与时序之间内在关系也是值得研究的问题.

References

- 1 Kay S, Xu C C. CRLB via the characteristic function with application to the K-distribution. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 1161-1168
- 2 Xu B L, Chen Q L, Wu Z Y, Wang Z Q. Analysis and approximation of performance bound for two-observer

bearings-only tracking. *Information Sciences: an International Journal*, 2008, **178**(8): 2059–2078

- 3 Hernandez M L, Kirubarajan T, Bar-Shalom Y. Multisensor resource deployment using posterior Cramer-Rao bounds. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, **40**(2): 399–416
- 4 Tichavsky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(5): 1386–1396
- 5 Nahi N E. Optimal recursive estimation with uncertain observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, **15**(7): 457–462
- 6 Niu R X, Willett P, Bar-Shalom Y. Matrix CRLB scaling due to measurements of uncertain origin. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(7): 1325–1335
- 7 Farina A, Ristic B, Timmoneri L. Cramer-Rao bound for nonlinear filtering with $P_d < 1$ and its application to target tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(8): 1916–1924
- 8 Hernandez M, Ristic B, Farina A, Timmoneri L. A comparison of two Cramer-Rao bounds for nonlinear filtering with $P_d < 1$. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, **52**(9): 2361–2370
- 9 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Jordan M I, Sastry S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1453–1464
- 10 Sun S L, Xie L H, Xiao W D, Xiao N. Optimal filtering for systems with multiple packet dropouts. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2008, **55**(7): 695–699
- 11 Boers Y, Driessen H. Results on the modified Riccati equation: target tracking applications. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, **42**(1): 379–384
- 12 Taylor J H. The Cramer-Rao estimation error lower bound computation for deterministic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(2): 343–344
- 13 Wang Z D, Daniel W C, Liu X H. Variance-constrained filtering for uncertain stochastic systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(7): 1254–1258
- 14 Bar-Shalom Y, Li X R, Kirubarajan T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. New York: Wiley, 2001
- 15 Hu Jin-Wen, Liang Yan, Wang Rui, Pan Quan, Zhang Hong-Cai. Node deployment with arbitrary coverage percentage in wireless sensor networks. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1497–1507
(胡劲文, 梁彦, 王睿, 潘泉, 张洪才. 无线传感器网络的任意覆盖率节点配置. *自动化学报*, 2008, **34**(12): 1497–1507)
- 16 Duan Z S, Jilkov V P, Li X R. Posterior Cramer-Rao bounds for state estimation with quantized measurement. In: Proceedings of the 40th Southeastern Symposium on System Theory. New Orleans, USA: IEEE, 2008. 376–380



许志刚 淮海工学院理学院副教授. 1988 年获得南京大学数学学士学位, 2009 年获得南京理工大学控制工程博士学位. 主要研究方向为信号处理、目标运动分析、控制理论与应用的研究. 本文通信作者. E-mail: xuzhigang@126.com
(**XU Zhi-Gang** Associate professor at the School of Sciences, Huaihai Institute of Technology. He received the bachelor degree in mathematics from the University of Nanjing in 1988 and the Ph. D. degree in control engineering from Nanjing University of Science and Technology in 2009. His research interest covers signal processing, target motion analysis, control theory and applications. Corresponding author of this paper.)



陈黎 南京理工大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为目标跟踪与多传感器数据融合.
E-mail: hncschenli@126.com
(**CHEN Li** Ph. D. candidate at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers target tracking and multi-sensor data fusion.)



穆育强 南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为飞行器制导、控制与仿真.
E-mail: muyuqiang@126.com
(**MU Yu-Qiang** Ph. D. candidate at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers guidance, control and simulation for vehicles.)



盛安冬 南京理工大学自动化学院研究员. 主要研究方向为非线性估计与应用、多源信息融合理论及应用. E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn
(**SHENG An-Dong** Professor at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers nonlinear estimation and applications, multi-source information fusion theory and applications.)