

# 模糊相关机会规划的蚁群优化算法及收敛性分析

薛 晗<sup>1</sup> 李 迅<sup>1</sup> 马宏绪<sup>1</sup>

**摘 要** 模糊相关机会规划 (Fuzzy dependent-chance programming, FDCP) 因其非线性、非凸性及模糊性, 对经典的优化理论提出了极大的挑战. 本文为解决复杂的模糊相关机会规划问题设计了一种基于模糊模拟的蚁群优化算法, 证明了该算法的收敛性, 并通过估算期望收敛时间以分析蚁群优化算法的收敛速度. 数值案例研究验证了该算法的有效性、稳定性及准确性.

**关键词** 模糊相关机会规划, 不确定规划, 蚁群优化算法, 模糊模拟

**中图分类号** TP18; O22

## Fuzzy Dependent-chance Programming Using Ant Colony Optimization Algorithm and Its Convergence

XUE Han<sup>1</sup> LI Xun<sup>1</sup> MA Hong-Xu<sup>1</sup>

**Abstract** The mathematical problems of fuzzy dependent-chance programming (FDCP) pose significant computational challenges due to their non-linear, non-convex, and fuzzy nature. A fuzzy simulation based algorithm is designed for solving the random FDCP problem. The proof of convergence is developed. The convergence speed of the ant colony optimization (ACO) algorithm is analyzed by estimating the expected convergence time. A numerical example is presented to show the potential applications of the random programming as well as the efficiency, stability and accuracy of the proposed algorithm.

**Key words** Fuzzy dependent-chance programming (FDCP), uncertain programming, ant colony optimization (ACO) algorithm, fuzzy simulation

模糊规划理论和方法的研究起源于 20 世纪 70 年代 Bellman 和 Zadeh 提出的模糊决策的概念和模糊环境下的决策模型<sup>[1]</sup>. 之后许多学者, 如 Ostasiewicz<sup>[2]</sup> 和 Zimmermann<sup>[3]</sup>, 用不同的方法对模糊规划进行研究. 基于 1978 年 Zadeh 提出的可能性理论的可能性分布方法是研究模糊系数型线性规划的重要方法. 1983 年 Luhandjula<sup>[4-5]</sup> 和 1986 年 Yazenin<sup>[6]</sup> 等用可能性分布方法研究了模糊线性规划以及模糊多目标线性规划问题, 并根据可能性理论, 提出了一系列把模糊系数约束转化为清晰等价类的思想.

2000 年 Liu 提出的模糊相关机会规划 (Fuzzy dependent-chance programming, FDCP), 即在选决策时使得事件得到满足的可能性在不确定环境下达到最大<sup>[7]</sup>. 在确定性规划以及期望值模型和机会约束规划中, 对实际问题建模后可行集本质是确定的, 这就可能导致所给出的最优解在实际中无法执行. 而相关机会规划并不假定可行解是确定的, 其可行集被描述为所谓不确定环境, 虽然也给出一个确定的解, 但这个解只是要求在实际问题中尽可能地执行.

蚁群优化 (Ant colony optimization, ACO) 算法是 1991 年意大利学者 Dorigo 等提出的一种模拟自然界蚁群行为的模拟进化算法<sup>[8-12]</sup>, 具有分布计算、信息正反馈和启发式搜索的特征, 本质是进化算法中的一种新型启发式优化算法. 本文针对 FDCP 进行研究, 提出了一种基于模糊模拟的蚁群优化算法, 使得复杂的 FDCP 不必通过转化为确定性数学规划而直接得到解决, 并证明了算法的收敛性, 分析了其收敛速度, 实验结果优于传统算法.

### 1 模糊相关机会规划

相关机会规划在不确定环境下通过极大化事件成立的机会给出事件的最优决策. 相关机会规划打破了可行集的概念, 代之以不确定环境. 在确定性模型以及期望值模型和机会约束规划模型中, 当对实

收稿日期 2008-05-21 收修改稿日期 2008-12-25  
Received May 21, 2008; in revised form December 25, 2008  
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA041603), 国家自然科学基金 (60475035), 湖南省科学技术厅重大科技专项 (2007FJ1806), 国防科学技术大学预研项目 (CX07-03-01), 国防科学技术大学优秀研究生创新项目 (B070302) 资助  
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA041603), National Natural Science Foundation of China (60475035), Key Technologies Research and Development Program Foundation of Hunan Province (2007FJ1806), Science and Technology Research Plan of National University of Defense Technology (CX07-03-01), and Top Class Graduate Student Innovation Sustainment Fund of National University of Defense Technology (B070302)  
1. 国防科学技术大学机电工程与自动化学院 长沙 410073  
1. College of Electromechanical Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00959

际问题建模以后,可行集实质上已经确定.这就可能导致所给定的最优解在实际执行时根本无法实现,相反,相关机会规划并不假定可行集是确定的.在模糊环境下,为使事件的机会函数在不确定环境下达到最大值从而给出最优决策,可建立如下模糊相关机会规划

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Cr}\{h_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, k = 1, 2, \dots, q\} \\ \text{s.t.} \quad & g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

式中, Cr 表示事件的可信性测度,  $\mathbf{x}$  为决策向量,  $\boldsymbol{\xi}$  为模糊向量参数,  $h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$  为事件,  $g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$  为约束含模糊变量的不确定环境.

若决策问题含多个目标,可建立如下多目标相关机会规划 (Dependent-chance programming, DCP) 模型

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{bmatrix} \text{Cr}\{h_{1k}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, k = 1, 2, \dots, q_1\} \\ \text{Cr}\{h_{2k}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, k = 1, 2, \dots, q_2\} \\ \vdots \\ \text{Cr}\{h_{mk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, k = 1, 2, \dots, q_m\} \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2)$$

根据决策者给定的优先结构和目标值,可建立模糊决策系统的如下相关机会目标规划模型,其主要思想是在决策者给定管理目标以后,在给定的优先级下极小化与此目标的正负偏差.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^l P_j \sum_{i=1}^m (u_{ij}d_i^+ + v_{ij}d_i^-) \\ \text{s.t.} \quad & \text{Cr} \left\{ \begin{array}{l} h_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \\ k = 1, 2, \dots, q_i \end{array} \right\} + d_i^+ - d_i^- = b_i, \\ & i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $P_j$  为优先因子,  $u_{ij}$  和  $v_{ij}$  分别为对应优先级  $j$  的第  $i$  个目标正偏差和目标负偏差的权重因子,  $d_i^+$  和  $d_i^-$  分别为目标  $i$  偏离目标值的正偏差和负偏差,  $b_i$  为目标  $i$  的目标值.

## 2 模糊模拟

对于具有多维性、多样性、多功能性和多准则性并且带随机、模糊或粗糙参数的复杂规划,直接利用解析方法往往无法得到解析结果,而模拟技术是有效工具.模糊模拟是一种从模糊系统模型中抽样

实验的技术,可从可能性测度、可信性测度、必要性测度等不同角度进行,分别计算模糊事件的可能性、可信性和必要性等.下面是模糊模拟的理论基础.

设  $\boldsymbol{\xi}_F$  为定义在可能性空间上的模糊向量,  $\mu$  为  $\boldsymbol{\xi}_F$  的隶属函数,  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  为带有模糊参数的函数,用模糊模拟求事件  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$  发生可能性  $\text{Pos}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0\}$  的算法如下:

算法 1 (求模糊事件可能性的模糊模拟算法).

- 步骤 1. 置  $G = \alpha_0$ ,  $\alpha_0$  为  $G$  的一个较低估计;
- 步骤 2. 从模糊向量  $\boldsymbol{\xi}$  的  $\alpha_0$  水平集中随机地生成清晰向量  $\boldsymbol{\xi}_F^0$ ;
- 步骤 3. 若  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0$ , 并且  $G < \mu(\boldsymbol{\xi}_F^0)$ , 则置  $G = \mu(\boldsymbol{\xi}_F^0)$ ;
- 步骤 4. 重复步骤 2 和步骤 3 共  $N$  次;
- 步骤 5. 返回  $G$ .

在求出模糊事件  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$  的必要性  $\text{Nec}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0\}$  之后,可以由下式计算出

$$\begin{aligned} \text{Nec}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} &= 1 - \text{Pr}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \geq 0\} = \\ &= 1 - \text{Pr}\{-f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, Pr 表示事件的概率测度.

模糊事件  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$  的可信性  $\text{Cr}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0\}$  可由下式计算出

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} &= \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Pr}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} + \text{Nec}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Pr}\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} + 1 - \text{Pr}\{-f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_F) \leq 0\} \} \end{aligned} \quad (5)$$

## 3 求解 FDCP 的蚁群优化算法

### 3.1 蚁群算法概述

蚁群优化算法是一种群集智能算法,利用个体极值和群体极值来修正自身进行寻优搜索:个体极值具有随机性,保持搜索方向多样性,避免过早收敛而陷于局部最优;群体极值从整体上把握寻优方向,保证收敛性.将搜索和优化过程模拟成个体的进化或觅食过程,用搜索空间中的点模拟自然界中的个体,将目标函数度量成个体对环境的适应能力,将个体的优胜劣汰过程或觅食过程比为用好的可行解取代较差可行解的迭代过程.群集智能采用概率搜索算法,与梯度方法等相比有着显著优点,是求解极值问题的自适应人工智能技术.基于蚁群优化算法的多约束优化问题求解框架如图 1 (见下页) 所示.

### 3.2 求解 DCP 的 ACO 算法

适应性很强的蚁群算法的提出,使得含有模糊

变量的复杂 DCP 不必通过转化为确定性数学规划模型, 而直接采用基于模糊模拟的蚁群算法即可求解.

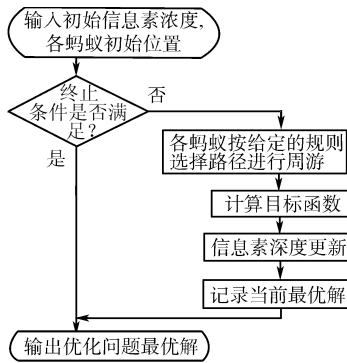


图 1 ACO 算法流程图

Fig.1 Framework of ACO algorithm

**算法 2 (求解模糊相关机会规划的蚁群优化算法).**

**步骤 1.** 系统初始化, 初始化时间、迭代次数和信息素.

**步骤 2.** 对各维分量  $x_{il} \leq x_i \leq x_{iu}$  进行  $N$  等分, 将  $m$  只蚂蚁分配到第一个分量  $x_1$  的  $N$  个子区间中. 蚂蚁经过第  $i$  维分量的第  $k$  个子区间时, 有

$$x_i = x_{il} + \frac{x_{iu} - x_{il}}{N} \times k \quad (6)$$

**步骤 3.** 每一个蚂蚁根据如下规则选择经过第  $i$  维分量的第  $j$  个子区间

$$p_{i,j}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{i,j}^{\alpha}(t)}{\sum_{r \in S_i^k} (\tau_{i,r}^{\alpha}(t))}, & j \in S_i^k \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (7)$$

式中  $S_i^k$  为第  $i$  维分量中蚂蚁  $k$  未访问的所有子空间集合.

**步骤 4.** 当  $m$  只蚂蚁选择完分量  $i$  后, 开始选择下一个分量, 直到所有蚂蚁完成一次周游为止.

**步骤 5.** 检验每一个解的可行性, 采用模糊模拟方法检验其是否满足相关机会:

$$\text{Cr}\{h_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, k=1, 2, \dots, q; g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, j \in J\} \quad (8)$$

如果用模糊模拟检验出该解不可行, 那么让该蚂蚁重新完成一次周游, 直到找到可行解为止.

**步骤 6.** 计算符合约束的每只蚂蚁的目标函数, 记录算法的当前最优点  $f_k$  与局部最优路径  $x_k$ .

**步骤 7.** 如果  $f_k \leq \hat{f}$ , 则令  $\hat{f} = f_k$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_k$ , 式中  $\hat{f}$  为全局最优目标函数,  $\hat{\mathbf{x}}$  为全局最优解, 更新信息素如下

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} (1 - \rho)\tau_{ij}(k-1) + \rho, & e_{ij} \in s_k \\ (1 - \rho)\tau_{ij}(k-1), & \text{否则} \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $\rho$  是信息素挥发因子,  $0 < \rho < 1$ ,  $s_k$  为全局最优解构成的路径.

**步骤 8.** 限定信息素浓度的上下限

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} \tau_{\max}, & \tau_{ij}(k) > \tau_{\max} \\ \tau_{\min}, & \tau_{ij}(k) < \tau_{\min} \end{cases} \quad (10)$$

取  $\tau_{\max} = (n^2 - 1)/n^2$ ,  $\tau_{\min} = 1/n^2$ ,  $n$  为所构造有向图的节点数.

**步骤 9.** 检查终止条件: 如果循环次数比预设的最大次数小或者未达到优化目标, 转向步骤 3.

**步骤 10.** 输出优化解并终止程序.

## 4 算法收敛性分析

### 4.1 收敛性证明

下面证明蚁群算法的收敛性, 先给出两个引理<sup>[13]</sup>.

**引理 1.** 对于  $\forall \tau_{ij}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}(t) \leq 1$ .

**证明.** 最优路径上的信息素更新为  $\tau_{ij}(k) = (1 - \rho)\tau_{ij}(k-1) + \rho$ ,  $t$  次迭代后, 有

$$\tau_{ij}(t) = \tau_0(1 - \rho)^t + \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} \rho = 1 - (1 - \rho)^t(1 - \tau_0)$$

故对于  $\forall \tau_{ij}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}(t) \leq 1$ .  $\square$

**引理 2.**  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}^*(t) = 1$ , 其中  $\tau_{ij}^*$  为最优路径上的信息素.

**证明.**  $\tau_{ij}^*(t) \geq \tau_{\min}$ , 找到最优解后使用全局信息素更新规则, 故  $\tau_{ij}^*(t)$  单调增加. 令  $t^*$  为首次找到最优解时的迭代次数,  $t$  次迭代后, 有

$$\tau_{ij}^*(t) = \tau_{ij}^*(t^*)(1 - \rho)^t + \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} \rho = 1 - (1 - \rho)^t(1 - \tau_{ij}^*(t^*))$$

故  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}^*(t) = 1$ .  $\square$

**定理 1.** 设  $\hat{P}^*(t)$  为  $t$  次迭代内至少找到一次最优解的概率,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists t$ , 使得  $\hat{P}^*(t) = 1 - \varepsilon$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}^*(t) = 1$ .

**证明.** 在最坏情况下, 被选择路径上的信息素为  $\tau_{\min}$ , 其余路径上的信息素为  $\tau_{\max}$ , 此时选择概率为

$$\hat{p}_{\min} = \frac{\tau_{\min}}{(N-1)\tau_{\max} + \tau_{\min}}$$

若在  $i$  次迭代中信息素浓度均未加强, 则由  $\tau_{\max}$  降为  $(1 - \rho)^i \tau_{\max}$ , 此时选择概率为

$$\hat{p}_{\min}^r = \frac{\tau_{\min}}{N-2 + \sum_{i=0}^{N-2} (1 - \rho)^i \tau_{\max} + \tau_{\min}}$$

对任意选择概率, 有  $p_{\min} \geq \hat{p}_{\min}^r$ . 任意解包括最优解, 可以由概率  $\hat{p} \geq (\hat{p}_{\min}^r)^{N_{\max}}$  得到, 其中  $N_{\max}$  为蚂蚁找到最优解的最大迭代次数. 故  $\hat{P}^*(t) = 1 - (1 - \hat{p})^t$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 当  $t \geq \log_{(1-\hat{p})} \varepsilon$  时, 有  $\hat{P}^*(t) \geq 1 - \varepsilon$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}^*(t) = 1$ .  $\square$

4.2 收敛速度分析

通过估算期望收敛时间来分析蚁群算法的收敛速度, 推出全局最优解需要的总迭代次数的期望值.

**定理 2.** 找到全局最优解需要的总迭代次数的期望值为  $O(\frac{1}{\rho} N n^2 \ln n)$ .

**证明.** 每条以  $u$  为起点、以  $v$  为终点的边  $e_{uv}$  被选中的概率为

$$p_{uv} = \frac{\tau_{uv}}{\sum_{v \in S_u} \tau_{uv}} \geq \frac{\tau_{\min}}{\deg_o(u) \tau_{\max}} = \frac{1/n^2}{N(n^2 - 1)/n^2} = \frac{1}{N(n^2 - 1)}$$

当找到局部最优解后, 非最优路径上的信息素按  $(1 - \rho)$  的比例减少. 当原信息素为  $\tau_0$ , 经过  $l = \frac{1}{\rho} \times \ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$  次挥发后, 路径上的信息素量降为

$$\tau = \tau_0(1 - \rho)^l \leq \tau_{\max}(1 - \rho)^l = \tau_{\max}(1 - \rho)^{\frac{1}{\rho} \ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \leq \tau_{\max}(e^{-\rho})^{\frac{1}{\rho} \ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} = \tau_{\min}$$

故找到最优解的次数不多于  $\frac{1}{\rho} \ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$ .

以  $u$  为起点的各路径的初始信息素为  $\tau_0 = 1/\deg_o(u)$ , 其和为  $s_0 = \tau_0 \deg_o(u) = 1$ .

每次迭代后, 若更新后的信息素在  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  范围内, 最优解路径的信息素增加  $\rho - \rho\tau_0$ , 其余路径减少  $\rho\tau_0$ , 以  $u$  为起点的所有路径信息素之和为

$$s = s_0 + (\rho - \rho\tau_0) - [\deg_o(u) - 1]\rho\tau_0 = s_0 + \rho - \deg_o(u)\rho\tau_0 = s_0 + \rho - \rho = s_0 = 1$$

当  $\tau_{uv} < \tau_{\min}$ , 执行  $\tau_{uv} = \tau_{\min}$ , 路径  $(u, v)$  上的信息素增加  $(\tau_{uv} - \tau_{\min})$ , 信息素之和  $s$  增加  $(\tau_{uv} - \tau_{\min})$ , 故  $s > 1$ . 当  $\tau_{uv} > \tau_{\max}$ , 执行  $\tau_{uv} = \tau_{\max}$ . 由于  $\deg_o(u) > 1$ , 至少还有另一路径, 信息素之和为:  $s \geq \tau_{uv} + \tau_{\min} = \tau_{\max} + \tau_{\min} = n^2 - 1/n^2 + 1/n^2 = 1$ . 综上所述, 有  $\sum_{v \in S_u} \tau_{uv} \geq 1$ .

由定理 2 知, 找到全局最优解需要的次数不多于  $\frac{1}{\rho} \ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \frac{1}{\rho} \ln(n^2 - 1) = O(\frac{1}{\rho} \ln n)$ .

当非最优解的路径上的信息素降至  $\tau_{\min}$  后, 选择非最优解的概率为

$$p \leq \frac{[\deg_o(u) - 1]\tau_{\min}}{\sum_{v \in S^*} \tau_{uv}} \leq \frac{n \cdot (1/n^2)}{1} = \frac{1}{n}$$

则选择最优解的概率为

$$p^* \geq (1 - \frac{1}{n})^{n-1} \frac{1}{n^2 \deg_o(u)} \geq e^{-1} \cdot \frac{1}{n^2 N}$$

期望迭代次数为  $O(Nn^2)$ . 故算法的时间复杂度为  $O(\frac{1}{\rho} N n^2 \ln n)$ . □

5 数值实例

**例 1.** 考虑如下 FDCP 模型

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Pos}\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq \tilde{a} \\ & \tilde{b}(x_1 + x_2)x_3 \geq \tilde{c} \\ & x_1, x_2, x_3 > 0 \end{aligned}$$

其中,  $\tilde{a}, \tilde{b}$  的隶属函数为  $\mu_{\tilde{a}}(\xi) = \exp(-|\xi - 1|)$ ,  $\mu_{\tilde{b}}(\xi) = \frac{1}{1 + (\xi - 10)^2}$ , 为梯形模糊变量  $(0, 1, 2, 3)$ . 通过本文的算法计算, 得到最优解  $\mathbf{x}^* = (0.08656, 0.00331, 0.99624)$ .

**例 2.** 考虑如下多目标 FDCP 问题

$$\begin{aligned} \text{lex min} \quad & \{d_1^-, d_2^-, d_3^-\} \\ \text{s. t.} \quad & \text{Cr}\{x_1 + x_3^2 = 3\} + d_1^- - d_1^+ = \alpha_1 \\ & \text{Cr}\{x_2 + x_5^2 = 2\} + d_2^- - d_2^+ = \alpha_2 \\ & \text{Cr}\{x_4 + x_6^2 = 1\} + d_3^- - d_3^+ = \alpha_3 \\ & x_1 + x_2 \leq \tilde{a} \\ & x_3 + x_4 \leq \tilde{b} \\ & x_5 \leq \tilde{c} \\ & x_6 \leq \tilde{d} \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \\ & d_i^+, d_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

其中含有 6 个决策变量和 4 个模糊变量. 模糊变量  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  分别为三角模糊变量  $(3, 4, 5)$ ,  $(2, 3, 4)$  和  $(1, 2, 3)$ , 模糊变量  $\tilde{d}$  的隶属函数为  $\mu_{\tilde{d}}(\xi) = 1/[1 + (\xi - 1)^2]$ . lexmin 表示按字母顺序最小化目标向量, 第一个目标的优先权最大, 第二个目标其次, 第三个目标的优先权最小. 本文对 lexmin 采用加权法, 依次给各子目标函数赋予不同的权重.

5.1 算法收敛性研究

通过本文的算法计算, 得到如下最优解

$$\mathbf{x}^* = (1.8600, 0.6095, 1.0677, 1.0000, 1.1792, 0.0001) \quad (d_1^-, d_2^-, d_3^-) = (0.0000, 0.0000, 0.2516)$$

第三个目标偏差非零, 但这已经是令人满意的解. 如果是用期望值模型或机会约束规划来求解该问题, 则可能不存在问题的解, 可见相关机会规划更适用于现实的情况, 能够更好地解决问题.

图 2 为目标函数随迭代次数变化的收敛曲线. 由图 2 可以看出在不同的迭代次数之后目标函数的值. 该收敛曲线图验证了蚁群算法的收敛性.

对多目标相关机会规划模型, 模型的目标值体现了各个目标在整体系统中的权重, 其追寻的是整体最优. 为考虑在不同  $\alpha$  水平下的最优解, 图 3 显示了目标函数值与置信水平参数  $\alpha_1$  的关系曲线图. 由图 3 可以看出随着置信水平的提高, 目标函数值递增.  $\alpha_1$  增大时, 约束条件成立的置信水平增大, 因而收敛后得到的最优目标函数值增大, 即目标偏差增大.

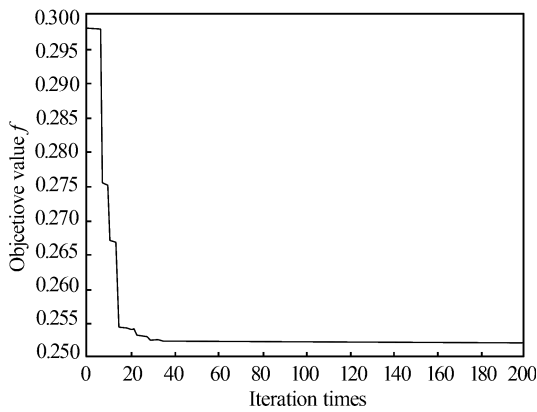


图 2 目标函数值收敛曲线

Fig. 2 Experimental results for iterative times analysis

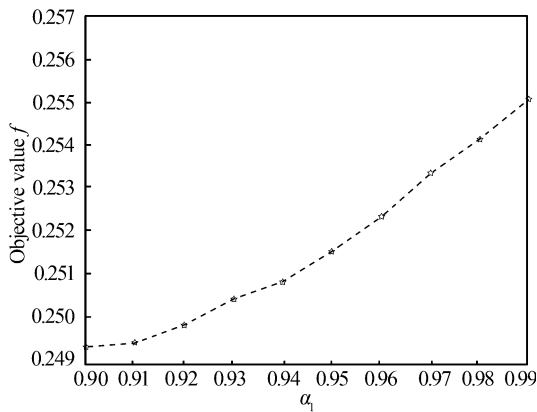


图 3 目标函数值与  $\alpha_1$  的关系曲线 ( $\alpha_2 = 0.90, \alpha_3 = 0.85$ )

Fig. 3 Relationship between objective value and  $\alpha_1$

### 5.2 参数选择对算法性能的影响

图 4 为蚂蚁数目  $m$  与迭代次数  $N_c$  的对应关系, 其中每组进行 30 次计算求取平均值. 由图 4 可以看出,  $N_c$  大致随  $m$  的增加而增大, 但当  $m$  增大到一定程度后, 若继续增大  $m$ , 虽然搜索的稳定性和全局性能得到进一步提高而改善算法性能, 但  $N_c$  也随之增大. 这是由于大量曾被搜索过路径上的信息素变化趋于平均, 信息素正反馈作用不明显, 搜索的随机性虽然得到了加强, 但收敛速度减慢. 反之如果  $m$

过少, 搜索随机性减弱, 虽然收敛速度加快, 但全局收敛性能降低, 容易导致收敛过早停滞.

图 5 为  $\rho$  与  $N_c$  的对应关系, 每组进行 30 次计算求取平均值. 由图 5 可以看出, 当  $\rho$  过小时, 路径上残留信息素占主导地位, 信息素正反馈作用相对较弱, 搜索随机性增强, 信息素保持时间较长, 解空间对问题空间的反馈信息较弱, 因而收敛速度较慢. 当  $\rho$  较大时, 虽然收敛速度加快, 信息素的正反馈作用占主导地位, 未被搜索到的路径上的信息量减少快, 已搜索过的路径被再次选择的可能性大, 搜索的随机性减弱, 降低了全局搜索能力, 计算结果易于陷入局部最优.

由定理 3 知, 找到全局最优解需要的总迭代次数的期望值为  $O(\frac{1}{\rho} N n^2 \ln n)$ , 代入  $N, n, \rho$  后, 算法的运行迭代次数小于  $\frac{1}{\rho} N n^2 \ln n$ , 验证了定理 3 的准确性. 同时, 由图 5 可知, 迭代次数随着  $\rho$  的增加

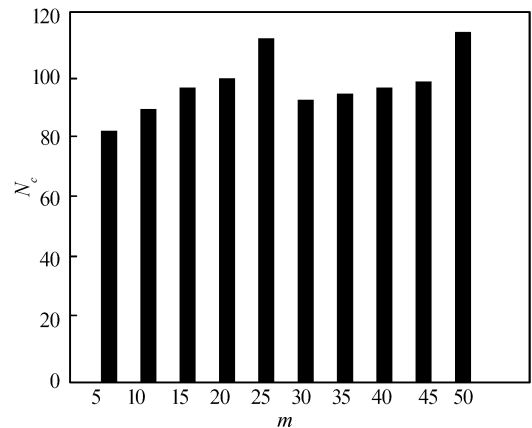


图 4 蚂蚁数目  $m$  与迭代次数  $N_c$  的对应关系

Fig. 4 Relationship between iterative times and number of ants

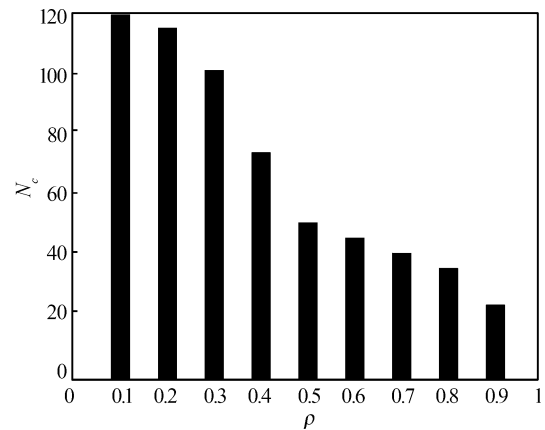


图 5 信息素挥发因子  $\rho$  与迭代次数  $N_c$  的对应关系

Fig. 5 Relationship between iterative times and volatile factor of pheromone

而减少, 这与定理 3 中  $O(\frac{1}{\rho} 1Nn^2 \ln n)$  相吻合.

### 5.3 与传统算法比较

为了测试本文算法的性能, 将其与 GA 算法进行比较. 表 1 中的  $T$  为首次求得最优解的计算机工作时间. 为避免一次运行结果的偶然性, 将程序运行 30 次, 表 1 中的工作时间  $T$  与迭代次数均为所得的平均值. 计算机的工作环境为 Intel Pentium Dual T2370 1.73 GHz, 1.00 GB 内存. GA 算法的变异概率设为 0.2, 交叉概率设为 0.3. 从表 1 中的对比数据可看出, 本文算法结果明显优于 GA 算法. 本文算法不仅收敛速度快而且精度高, 比 GA 算法能求得更好的最优值.

表 1 与 GA 算法的求解结果对比

Table 1 Performance comparison between GA and ACO

	GA	ACO
$f^*$	0.2521	0.2516
$N_c$	55	35
$T$	0.859 s	0.704 s
$d_1^-$	0.0000	0.0000
$d_2^-$	0.0000	0.0000
$d_3^-$	0.2521	0.2516

综上, 该实例说明了蚁群优化算法求解 FDCP 问题的可行性和有效性.

## 6 结论

为解决复杂的模糊相关机会规划问题, 本文设计了一种基于模糊模拟的蚁群优化算法, 证明了该算法的收敛性, 并估算期望收敛时间以分析该算法的收敛速度. 通过数值实例, 验证了该算法的有效性、稳定性及准确性, 促进了建立和完善不确定环境下的优化理论与方法.

## References

- 1 Belhnan R E, Zadeh L A. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 1970, **17**(4): 141–164
- 2 Ostasiewicz W. A new approach to fuzzy programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 1982, **7**(2): 139–152
- 3 Zimmermann H J. Applications of fuzzy set theory to mathematical programming. *Information Sciences*, 1985, **36**(1-2): 29–58
- 4 Luhandjula M K. Linear programming under randomness and fuzziness. *Fuzzy Sets and Systems*, 1983, **10**(1-3): 45–55
- 5 Luhandjula M K. On possibilistic linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **18**(1): 15–30
- 6 Yazenin A V. On the problem of possibilistic optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, **81**(1): 133–140
- 7 Liu B D. Dependent-chance programming in fuzzy environments. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **109**(1): 97–106
- 8 Colorni A, Dorigo M, Maniezzo V. Distributed optimization by ant colonies. In: *Proceedings of the 1st European Conference on Artificial Life*. Paris, France: IEEE, 1992. 134–142

- 9 Dorigo M, Maniezzo V, Colorni A. The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1996, **26**(1): 29–41
- 10 Dorigo M, Gambardella L M. Ant colonies for the traveling salesman problem. *Biosystems*, 1997, **43**(2): 73–81
- 11 Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1997, **1**(1): 53–66
- 12 Dorigo M, Stjtzle T. *Ant Colony Optimization*. London: MIT Press, 2004. 128–130
- 13 Stjtzle T, Dorigo M. A short convergence proof for a class of ant colony optimization algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, **6**(4): 358–365



薛 晗 国防科学技术大学博士研究生. 2001 年获中国科学技术大学信息学院自动化系学士学位. 主要研究方向为智能控制. 本文通信作者.

E-mail: xdjxsdjs@gmail.com

(XUE Han Ph.D. candidate at the College of Electromechanical Engineering and Automation, National University of Defense Technology. She received her bachelor degree from University of Science and Technology of China in 2001. Her main research interest is intelligent control. Corresponding author of this paper.)

薛 晗 国防科学技术大学博士研究生. 2001 年获中国科学技术大学信息学院自动化系学士学位. 主要研究方向为智能控制. 本文通信作者.



李 迅 国防科学技术大学副教授. 2001 年获国防科学技术大学机电工程与自动化学院博士学位. 主要研究方向为嵌入式系统和无线传感器网络.

E-mail: cpld2002@sohu.com

(LI Xun Associate professor at the College of Electromechanical Engineering and Automation, National University of Defense Technology. He received his Ph.D. degree from National University of Defense Technology in 2001. His research interest covers embedded system and wireless sensor networks.)

李 迅 国防科学技术大学副教授. 2001 年获国防科学技术大学机电工程与自动化学院博士学位. 主要研究方向为嵌入式系统和无线传感器网络.



马宏绪 国防科学技术大学教授. 1995 年获国防科学技术大学机电工程与自动化学院博士学位. 主要研究方向为机器人和无人机.

E-mail: mhx1966@163.com

(MA Hong-Xu Professor at the College of Electromechanical Engineering and Automation, National University of Defense Technology. He received his Ph.D. degree from National University of Defense Technology in 1995. His research interest covers robot and unmanned aerial vehicle.)

马宏绪 国防科学技术大学教授. 1995 年获国防科学技术大学机电工程与自动化学院博士学位. 主要研究方向为机器人和无人机.