

基于二维混合模型和状态观测器的重复控制设计

吴敏¹ 周兰¹ 余锦华² 何勇¹

摘要 针对一类正则线性系统, 提出一种基于状态观测器和二维混合模型的重复控制系统设计方法. 首先, 通过构造一个状态观测器来重构系统的状态, 建立基于重构状态的线性控制律. 然后, 通过独立地考虑重复控制系统的连续控制过程与离散学习行为, 给出基于状态观测器和重构状态反馈的连续/离散二维混合模型. 针对这个混合模型, 运用二维 Lyapunov 泛函方法, 以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的形式给出重复控制系统存在重复控制器和状态观测器的充分条件, 所给条件可用 Matlab 工具箱方便地求解. 数值仿真验证了本文所提方法的有效性.

关键词 正则线性系统, 二维混合模型, 状态观测器, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

Repetitive Control Design Based on Two-dimensional Hybrid Model and State Observer

WU Min¹ ZHOU Lan¹ SHE Jin-Hua² HE Yong¹

Abstract This paper presents a method of designing a repetitive control system for a class of regular linear systems. The method is based on a state observer and a two-dimensional (2D) hybrid model. First, a state observer is constructed to reconstruct system states and a linear control law is established based on the reconstructed states. Next, by describing the continuous control and discrete learning actions of repetitive control system independently, a continuous-discrete 2D hybrid model is established based on the state observer and the reconstructed state feedback. In the light of the 2D Lyapunov function, a sufficient condition is given in the form of linear matrix inequality (LMI) for the existence of the state observer and the repetitive controller for the repetitive control system. The condition can be resolved conveniently by using the Matlab toolbox. A numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed controller design procedures.

Key words Regular linear systems, 2D hybrid model, state observer, linear matrix inequality (LMI)

重复控制理论是上世纪 80 年代提出的一种控制系统设计理论, 其目的是设计一种控制器, 使系统高精度地跟踪任意的周期参考信号. 它根据内模原理, 将周期信号的动态模型植入系统的控制器内, 从而实现对周期参考信号的高精度跟踪^[1]. 由于重复控制器的时滞特性, 重复控制系统的稳定性分析和控制器设计非常困难, 不少学者在改进它的稳定性和性能方面进行了广泛深入的研究^[2-7].

为了利用重复控制中存在的一个周期之内的连续控制行为和周期之间的离散学习行为, 从根本上改善重复控制系统的特性, 文献 [8] 首次将二维系统理论^[9-12] 应用于重复控制, 针对一类正则线性

系统, 提出了一种基于连续/离散二维混合模型的重复控制方法, 其基本思想是将重复控制器的设计问题转化为状态反馈增益设计问题, 这种设计方法可以有效地进行重复控制的稳定性分析和稳态跟踪特性设计. 然而, 在实际控制系统中, 控制对象的状态往往不易直接测量, 或者由于在经济上或安装上对测量设备的限制, 使得在许多应用中不可能获得系统的全部状态, 从而使该方法难以应用于实际的控制系统. 状态反馈在性能上的不可替代性和在物理上的不可实现性, 形成了一个尖锐的矛盾. 解决这个矛盾可以通过借助观测器来实现状态重构, 并利用重构的状态进行状态反馈.

本文针对一类正则线性系统, 构造一个同维状态观测器, 利用观测器的重构状态进行状态反馈, 基于重构状态反馈和重复控制器建立重复控制系统的线性控制律. 通过独立地考虑重复控制系统的连续控制行为与离散学习行为, 给出基于状态观测器和重构状态反馈的连续/离散二维混合模型, 将重复控制设计问题转化为一类连续/离散二维系统的状态反馈控制问题. 然后应用二维 Lyapunov 泛函方法, 获得二维混合系统的稳定性条件. 根据该稳定性条

收稿日期 2008-04-24 收修改稿日期 2009-01-04
Received April 24, 2008; in revised form January 4, 2009
国家自然科学基金 (60674016), 国家杰出青年基金 (60425310) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60674016), National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (60425310)
1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083 2. 东京工业大学计算机科学学院 东京 192-0928
1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, P.R. China 2. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00945

件, 利用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 方法, 通过 Matlab 工具箱求得状态观测器以及重复控制器参数. 基于重构状态反馈的重复控制系统的跟踪精度依赖于状态观测器的估计精度, 因为状态观测器是以被控系统的理想拟合线性模型为依据来设计的, 本文采用系数矩阵待定的状态观测器来重构系统状态, 增大状态观测器设计的自由度, 从而改善整个重复控制系统的跟踪性能.

在以下陈述中, 如不作特殊说明, 则 \mathbf{R}^n 代表 n 维实空间, $\mathbf{R}^{n \times m}$ 代表 $n \times m$ 实矩阵集, I 代表合适维数的单位矩阵, $X > 0$ ($X < 0$) 表示 X 是一个正定 (负定) 矩阵, 且简写为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

1 问题描述

考虑如图 1 所示的重复控制系统. 其中, e^{-sT} 为滞后环节, 滞后时间与周期信号的周期相同, $e(t) = r(t) - y(t)$ 为跟踪误差. 虚线所示部分 C_R 为重复控制器, 若设

$$v(t) = 0, \quad t < 0$$

则 C_R 的时域表达式为

$$v(t) = v(t - T) + e(t)$$

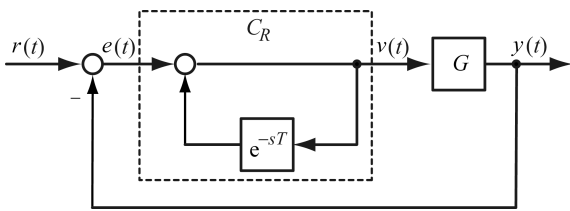


图 1 基本的重复控制系统

Fig. 1 Basic repetitive control system

同时, 图 1 中的控制对象 G 为如下—类单输入单输出正则线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_p(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\mathbf{x}_p(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, $u(t), y(t) \in \mathbf{R}$ 分别为控制输入和输出, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D$ 为实矩阵. 由系统的正则性知 $D \neq 0$.

对系统 (1), 本文构造一个满足如下形式状态方程的同维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_p(t) = \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}_p(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}[y(t) - \bar{y}(t)] \\ \bar{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_p(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2)$$

$\hat{\mathbf{x}}_p(t) \in \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{x}(t)$ 的估计变量, $\bar{y}(t) \in \mathbf{R}$ 是观测器输出, \mathbf{L} 是待设计的观测器增益. \mathbf{A}_c 是与 \mathbf{A} 同维的状态观测器系数矩阵, 且也是待设计的.

基于状态观测器和重复控制器, 本文采用如下线性控制律

$$u(t) = K_e v(t) + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{x}}_p(t) \quad (3)$$

构造如图 2 (见下页) 所示的重复控制系统, 它是一种基于同维状态观测器和重构状态反馈的重复控制系统结构.

重复控制系统的设计问题则为构造一个状态观测器重构系统的状态, 并寻找一个基于重构状态和重复控制器的线性控制律 (3), 使图 2 所示的重复控制系统稳定. 控制律 (3) 中引入控制增益 K_e , 有利于改善系统的跟踪响应特性, 采用重构状态反馈增益 \mathbf{K}_p , 可以提高系统的稳定性, 从而有效地解决重复控制的稳定性和稳态性能之间的折衷问题, 获得满意的过渡过程性能.

重复控制依赖于两个独立的动态过程, 即连续时间的动态过程和学习次数的动态过程. 但现有的各种重复控制系统设计将这两个独立的动态过程在一维空间上混合考虑, 不利于系统性能的分析与设计, 从而不可避免地存在着对控制对象要求较严、稳定条件难于验证等局限性. 为了充分地考虑两个动态过程各自的独有特点, 本文采用与文献 [8] 相同的二维重复控制理论, 分别用两个变量 τ 和 k 来表示这两个动态过程的自变量, 其中 τ 为一个周期内的时间连续变量, k 表示学习次数的离散变量.

对变量 $\xi(t)$, 假定

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi(k, \tau) = \xi(kT + \tau) \\ \xi(t - T) &= \xi(k - 1, \tau) = \xi((k - 1)T + \tau) \\ \Delta \xi(t) &= \xi(t + T) - \xi(t) \end{aligned}$$

令 $\mathbf{x}_\delta(t) = \mathbf{x}_p(t) - \hat{\mathbf{x}}_p(t)$ 为重构状态误差, 得到系统重构误差状态方程为

$$\frac{d(\mathbf{x}_\delta(t))}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{x}_\delta(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_c)\hat{\mathbf{x}}_p(t) \quad (4)$$

设 $\mathbf{x}^T(t) = [\hat{\mathbf{x}}_p^T(t) \quad \mathbf{x}_\delta^T(t)]$, 则由式 (2) 和 (4) 得到

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ e(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & 0 \\ \bar{\mathbf{C}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ e(k - 1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ -D \end{bmatrix} \Delta u(k, \tau) \quad (5)$$

$$\Delta u(k, \tau) = K_e e(k, \tau) + \mathbf{K}_p \Delta \hat{\mathbf{x}}_p(k, \tau) \quad (6)$$

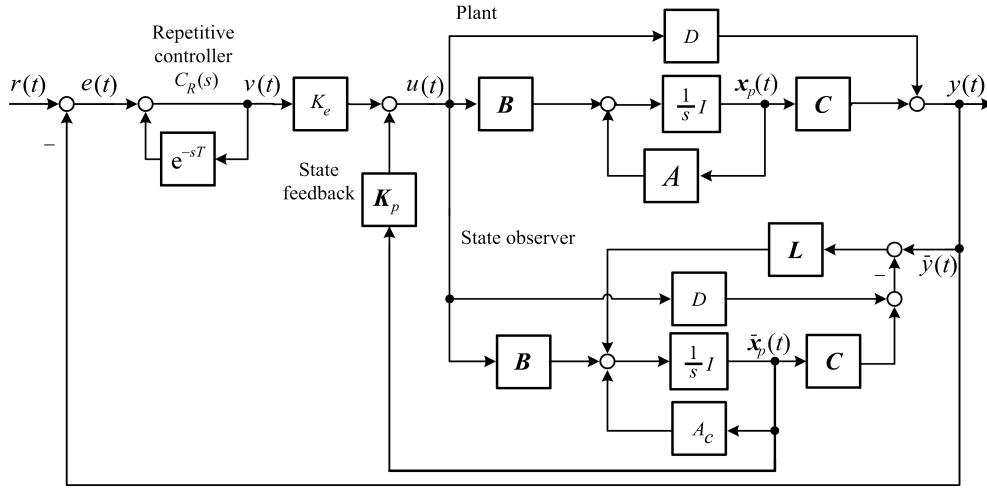


图 2 基于状态观测器的重复控制系统

Fig.2 Repetitive control system based on state observer

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_c & LC \\ A - A_c & A - LC \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} -C & -C \end{bmatrix}$$

将式 (5) 中的 $e(k, \tau)$ 代入式 (6), 得到

$$\Delta u(k, \tau) = F_p \Delta \bar{x}_p(k, \tau) - F_e C \Delta x_\delta(k, \tau) + F_e e(k-1, \tau) \quad (7)$$

且有

$$F_e = \frac{K_e}{1 + K_e D}, F_p = \frac{K_p - K_e C}{1 + K_e D} \quad (8)$$

设

$$F_x = \begin{bmatrix} F_p & -F_e C \end{bmatrix}$$

则有

$$\Delta u(k, \tau) = \begin{bmatrix} F_x & F_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k, \tau) \\ e(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (9)$$

将式 (5) 与式 (9) 结合起来即为由图 2 所示的重复控制系统结构所导出的基于状态观测器和重构状态反馈的连续/离散二维混合模型. 式 (3) 为传统的重复控制器中采用的状态反馈结构, 而式 (9) 为二维重复控制系统的状态反馈结构. 比较这两个式子可知, 二维重复控制系统可通过调节反馈增益 F_x 或 F_e 来独立地调节控制或学习过程, 而由于 F_x 和 F_e 混合包含在 K_e 和 K_p 中, 传统的重复控制无法实现这种调节. 这正是本方法优于传统重复控制方法之处.

基于这个二维混合模型进行重复控制系统设计. 若能求得连续/离散二维系统 (5) 的状态反馈控制增

益 F_x 和 F_e , 由式 (8) 即可得到线性控制律 (3) 中的控制增益

$$K_e = \frac{F_e}{1 - DF_e}, K_p = \frac{F_p + F_e C}{1 - DF_e} \quad (10)$$

2 基于状态观测器的重复控制设计

基于以上描述, 图 2 所示的基于状态观测器的重复控制系统设计问题转化成了连续/离散二维系统 (5) 的状态反馈镇定控制器设计问题, 为了确定线性控制律 (3) 中的控制增益 K_e 和 K_p , 只需求出连续/离散二维系统 (5) 的无记忆状态反馈控制增益 F_e 和 F_x . 为此, 本文应用二维 Lyapunov 泛函方法推导出二维系统 (5) 的稳定性条件. 根据该条件和 LMI 方法进行重复控制器和状态观测器的设计. 关于二维系统与图 2 所示的连续重复控制系统之间的稳定性关系参见附录.

设任意矩阵 Π 的结构奇异值分解式为

$$\Pi = U[S \ 0]V^T$$

式中 S 是半正定矩阵, U, V 是酉矩阵.

为了获得二维系统 (5) 的稳定性条件, 首先引入如下引理.

引理 1^[13]. 给定矩阵 $\Pi \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $\text{rank}(\Pi) = p$. 对任意矩阵 X , 存在 $\bar{X} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, 使得 $\Pi X = \bar{X} \Pi$ 的充要条件是 X 可以表示为

$$X = V \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{X}_{22} \end{bmatrix} V^T$$

这里 V 为上述酉矩阵, $\bar{X}_{11} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\bar{X}_{22} \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$.

引理 2 (Schur 补)^[14]. 对给定的对称矩阵 $\Sigma = \Sigma^T$, 以下三个条件等价:

- 1) $\Sigma = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix} < 0;$
- 2) $S_{11} < 0$ 且 $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0;$
- 3) $S_{22} < 0$ 且 $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0.$

结合系统 (5) 和控制律 (9), 得到图 2 所示的如下闭环系统

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ e(k, \tau) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ e(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_c + \mathbf{B}\mathbf{F}_p & \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F}_e\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{F}_e \\ A - A_c & A - \mathbf{L}\mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{F}_p & -\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{F}_e\mathbf{C} & 1 - \mathbf{D}\mathbf{F}_e \end{bmatrix}$$

根据假设和引理, 得到闭环系统 (11) 的如下稳定性条件.

定理 1. 如果存在正定对称矩阵 X_1, X_{11}, X_{22}, X_3 , 以及合适维数的 W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 使得 LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \mathbf{B}\mathbf{W}_4 & X_1\mathbf{C}^T + \mathbf{W}_2^T\mathbf{D}^T \\ * & \Phi_{22} & 0 & X_2\mathbf{C}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{W}_4^T\mathbf{D}^T \\ * & * & -X_3 & \mathbf{W}_5^T\mathbf{D}^T - X_3 \\ * & * & * & -X_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

成立, 其中输出矩阵 \mathbf{C} 的结构奇异值分解式为 $\mathbf{C} = U[S \ 0]V^T$,

$$X_2 = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= W_1 + W_1^T + \mathbf{B}\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_2^T\mathbf{B}^T \\ \Phi_{12} &= W_3\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{W}_4\mathbf{C} + X_1A^T - W_1^T \\ \Phi_{22} &= X_2A^T - \mathbf{C}^T\mathbf{W}_3^T + AX_2 - W_3\mathbf{C} \end{aligned}$$

则连续/离散二维系统 (5) 在无记忆状态反馈控制器 (9) 的作用下渐近稳定. 其中状态反馈增益

$$\mathbf{F}_e = W_5X_3^{-1}, \mathbf{F}_p = \mathbf{W}_2X_1^{-1}$$

方程 (2) 中的状态观测器系数矩阵和增益分别为

$$A_c = W_1X_1^{-1}, \mathbf{L} = W_3USX_{11}^{-1}S^{-1}U^T$$

证明. 这里

$$X_2 = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T$$

根据引理 1, 存在

$$\bar{X}_2 = USX_{11}S^{-1}U^T$$

使得

$$\mathbf{C}X_2 = \bar{X}_2\mathbf{C} \quad (13)$$

并且

$$\bar{X}_2^{-1} = USX_{11}^{-1}S^{-1}U^T$$

构造如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$V(k, \tau) = V_1(k, \tau) + V_2(k, \tau) \quad (14)$$

其中

$$V_1 = \Delta \mathbf{x}^T(k, \tau) \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau)$$

$$V_2 = e^T(k-1, \tau) P_3 e(k-1, \tau)$$

$$P_1 = X_1^{-1} > 0, P_2 = X_2^{-1} > 0$$

$$P_3 = X_3^{-1} > 0$$

设

$$\boldsymbol{\eta}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^T(k, \tau) & e^T(k-1, \tau) \end{bmatrix}$$

沿着闭环系统 (11), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & P_1\mathbf{B}\mathbf{F}_e \\ * & H_{22} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \Delta V_2 &= \boldsymbol{\eta}^T \left(\Psi^T P_3 \Psi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_3 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

泛函增量

$$\delta V(k, \tau) = \frac{dV_1(k, \tau)}{d\tau} + \Delta V_2(k, \tau) = \boldsymbol{\eta}^T \Theta \boldsymbol{\eta} \quad (15)$$

其中

$$\Theta = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & P_1\mathbf{B}\mathbf{F}_e \\ * & H_{22} & 0 \\ * & * & -P_3 \end{bmatrix} + \Psi^T P_3 \Psi \quad (16)$$

$$H_{11} = P_1A_c + A_c^T P_1 + P_1\mathbf{B}\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_p^T \mathbf{B}^T P_1$$

$$H_{12} = P_1\mathbf{L}\mathbf{C} - P_1\mathbf{B}\mathbf{F}_e\mathbf{C} + A^T P_2 - A_c^T P_2$$

$$H_{22} = P_2A + A^T P_2 - P_2\mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T P_2$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{F}_p & -\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{F}_e\mathbf{C} & 1 - \mathbf{D}\mathbf{F}_e \end{bmatrix}$$

由引理 2 和式 (13), $\Theta < 0$ 等价于 LMI

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & P_1\mathbf{B}\mathbf{F}_e & \mathbf{C}^T P_3 + \mathbf{F}_p^T \mathbf{D}^T P_3 \\ * & H_{22} & 0 & \mathbf{C}^T P_3 - \mathbf{C}^T \mathbf{F}_e^T \mathbf{D}^T P_3 \\ * & * & -P_3 & \mathbf{F}_e^T \mathbf{D}^T P_3 - P_3 \\ * & * & * & -P_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

用 $\text{diag}\{X_1, X_2, X_3, X_3\}$ 分别左乘、右乘式 (17), 且代入

$$\begin{aligned} A_c X_1 &= W_1, \quad F_p X_1 = W_2, \quad L \bar{X}_2 = W_3 \\ F_e \bar{X}_2 &= W_4, \quad F_e X_3 = W_5 \end{aligned}$$

即得到 LMI (12).

因此, 若 LMI (12) 成立, 对 $\forall \eta \neq 0$, 都有

$$\delta V(k, \tau) < 0 \quad (18)$$

□

注 1. 定理 1 以 LMI 的形式给出了图 2 所示的重复控制系统稳定的充分条件, 基于这个条件进行状态观测器和反馈控制器的设计. 状态观测器参数和控制增益可以方便地利用 Matlab 工具箱求解. 与文献 [15] 相比, 控制器存在条件不需要受到矩阵等式的约束. 文献 [4] 在系统中也直接引入重复控制器, 但仅能应用于严格正实的标称系统. 文献 [8] 是在被控对象的状态可测量的前提下进行的二维重复控制设计. 本文利用被控对象的输入和输出重构系统状态, 基于重构状态进行状态反馈的重复控制系统设计方法不仅能够解决状态反馈在物理实现上的困难, 而且适用范围更广.

注 2. 在重复控制过程中, 关注的是控制输入和稳态跟踪误差的收敛性. 定理 1 中状态观测器的系数矩阵 A_c 是 LMI ((12)) 的决策变量, 通过权矩阵 W_1 和 X_1 来确定, 增大了状态观测器设计的自由度, 这样有利于提高状态观测器的估计精度, 从而改善系统的稳态跟踪特性, 这在数值仿真中可以得到验证.

如果构造一般形式的同维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_p(t) = A\bar{x}_p(t) + Bu(t) + L[y(t) - \bar{y}(t)] \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}_p(t) + Du(t) \end{cases} \quad (19)$$

则由定理 1 得到如下推论.

推论 1. 如果存在正定对称矩阵 X_1, X_{11}, X_{22}, X_3 , 以及合适维数的矩阵 W_1, W_2, W_3, W 使得如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & BW_3 & X_1 C^T + W_1^T D^T \\ * & \Omega_{22} & 0 & X_2 C^T - C^T W^T D^T \\ * & * & -X_3 & W_3^T D^T - X_3 \\ * & * & * & -X_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

成立, 其中输出矩阵 C 的结构奇异值分解式为 $C = U[S \ 0]V^T$,

$$X_2 = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T$$

$$\Omega_{11} = AX_1^T + X_1 A + BW_1 + W_1^T B^T$$

$$\Omega_{12} = W_2 C - BWC$$

$$\Omega_{22} = X_2 A^T - C^T W_2^T + AX_2 - W_2 C$$

则图 2 所示的重复控制系统渐近稳定. 控制律 (9) 中的控制增益为

$$F_e = W_3 X_3^{-1}, \quad F_p = W_1 X_1^{-1}$$

方程 (19) 中的状态观测器增益矩阵为

$$L = W_2 U S X_{11}^{-1} S^{-1} U^T$$

证明. 在定理 1 及其证明中取 $A_c = A$, 设

$$F_p X_1 = W_1, \quad L \bar{X}_2 = W_2, \quad F_e \bar{X}_2 = W, \quad F_e X_3 = W_3$$

即可得到结论. □

注 3. 推论 1 给出了基于同维状态观测器 (19) 的重复控制系统稳态跟踪误差收敛的充分条件, 同时也给出了重复控制器参数和状态观测器增益的具体求解方式. 条件以 LMI 的形式给出, 可以方便地利用 Matlab 工具箱进行验证或求解控制器和状态观测器参数. 同时, 推论 1 包含了文献 [8] 定理 2 中直接应用受控系统状态进行状态反馈的重复控制系统设计方法. 即文献 [8] 定理 2 只是本文的如下推论.

推论 2. 对于控制对象 (1), 如果存在正定矩阵 $X_1 > 0, X_3 > 0$, 以及合适维数的矩阵 S, R , 使得 LMI

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & BR & \Lambda_{13} \\ * & -X_3 & R^T D^T - X_3 \\ * & * & -X_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

成立, 这里

$$\Lambda_{11} = AX_1^T + X_1 A + BS + S^T B^T$$

$$\Lambda_{13} = X_1 C^T + S^T D^T$$

二维状态反馈控制器

$$\Delta u(k, \tau) = \begin{bmatrix} F_p & F_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k, \tau) \\ e(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (22)$$

使得连续/离散二维系统

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}(k, \tau) \\ e(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k, \tau) \\ e(k-1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \Delta u(k, \tau) \quad (23)$$

渐近稳定. 其中反馈控制增益为

$$F_p = S X_1^{-1}, \quad F_e = R X_3^{-1}$$

3 数值仿真

在实际应用中,经常会遇到具有重复性的控制任务,例如,数控机床,磁盘和光盘驱动器等伺服机构,它们都需要控制系统对周期性外激励信号进行高精度跟踪.本文考虑典型的跟踪伺服系统,执行机构为由单位质量块-弹簧-阻尼器组成的二阶机械位移系统^[16],通过状态空间建模可以描述成控制对象(1)的形式.

设控制对象(1)具有如下参数:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}, D = 1$$

考虑图2所示的重复控制系统对周期参考输入

$$r(t) = \sin \frac{2\pi}{10}t + 0.5 \sin \frac{4\pi}{10}t + 0.5 \sin \frac{6\pi}{10}t$$

的跟踪问题.

定理1给出了图2所示的重复控制系统存在状态观测器和重复控制器的充分条件,基于这个条件进行重复控制系统设计.运用 Matlab 工具箱对 LMI(12) 求解,获得状态观测器结构矩阵和观测器增益矩阵分别为

$$A_c = \begin{bmatrix} -7.8706 & 4.6816 \\ 5.0726 & -2.3670 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1.1562 \\ 0.0599 \end{bmatrix}$$

式(8)中的控制增益为

$$F_p = \begin{bmatrix} -2.9779 & -0.8777 \end{bmatrix}, F_e = 0.5047$$

进而由式(10)得到基于重构状态反馈和重复控制器的线性控制律(3)中的控制增益为

$$K_p = \begin{bmatrix} -0.9171 & -1.7721 \end{bmatrix}, K_e = 1.0191$$

系统仿真结果示于图3.经过三个周期后,系统输出便进入了稳定状态,稳态误差以较快的速度趋于零.该控制对象非严格正实,从而文献[4]的方法失效.同时与文献[7]相比较,不需要在线调节前馈项来改善系统的快速性和稳定性,便有很好的稳态收敛特性.

推论1给出了基于一般状态观测器重构状态反馈的重复控制设计方法,对所设计的重复控制系统也进行了仿真.运用 Matlab 工具箱对 LMI(20) 求

解,得到状态观测器(19)的增益矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 6.6551 \\ 5.1675 \end{bmatrix}$$

线性控制律(3)中的控制增益为

$$K_p = \begin{bmatrix} -4.6242 & 1.2490 \end{bmatrix}, K_e = 0.4444$$

跟踪误差示于图4(见下页).

通过比较图3和图4可以看出,图3所对应的重复控制系统有更好的快速响应特性和跟踪误差收敛速度,验证了采用系数矩阵可调节的状态观测器能够提高系统的跟踪能力,使系统获得理想的过渡过程性能.

从以上仿真实例可见,本文提出的重复控制系统设计方法具有简单、直观等特点,因为根据控制对

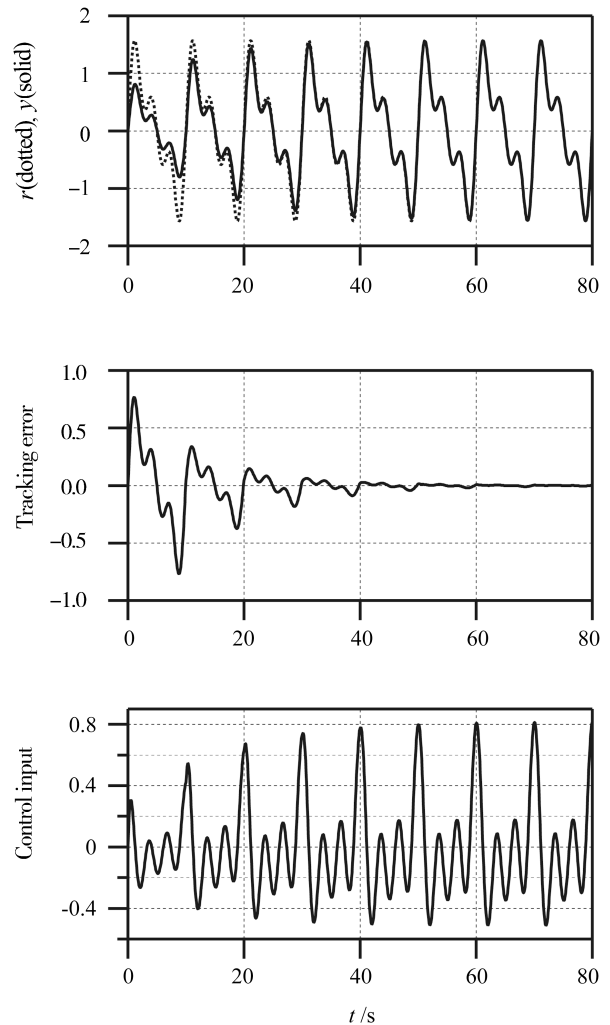


图3 基于状态观测器(2)的重复控制系统仿真图
Fig.3 Simulation results for repetitive control system based on state observer (2)

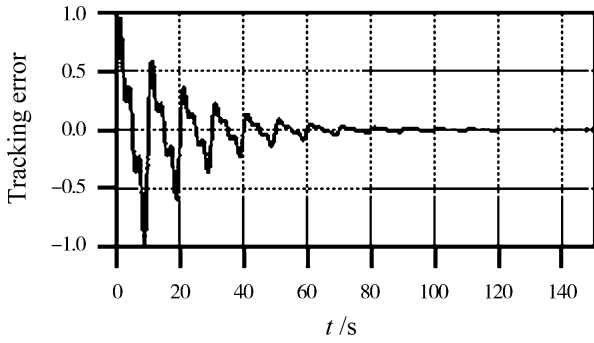


图 4 基于同维状态观测器 (19) 的重复控制系统仿真图
Fig. 4 Simulation results for repetitive control system based on state observer (19)

象的输出而设计反馈控制器, 从而拓宽了重复控制的应用领域.

4 结语

针对状态反馈在物理上的难以实现性, 本文提出了一种基于状态观测器重构状态反馈的重复控制设计新方法. 通过应用二维系统方法推导出重复控制系统存在状态观测器和重复控制器的充分条件, 条件以 LMI 的形式给出, 通过 Matlab 工具箱可以方便地获得状态观测器和控制器参数. 数值仿真说明了本文所提出的重复控制系统设计方法的有效性. 同时, 通过引入系数矩阵可变的观测器进行系统状态的重构, 增大了状态观测器设计的自由度, 提高了基于重构状态反馈的重复控制系统对参考信号的跟踪能力.

附录

针对闭环系统 (11)

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ e(k, \tau) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ e(k-1, \tau) \end{bmatrix}$$

设定二维 Lyapunov 泛函 (15):

$$\begin{aligned} V(k, \tau) &= V_1(k, \tau) + V_2(k, \tau) \\ V_1 &= \Delta \mathbf{x}^T(k, \tau) P \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ V_2 &= e^T(k-1, \tau) P_3 e(k-1, \tau) \end{aligned}$$

其中, $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$, P_3 为正定矩阵.

泛函增量 (15):

$$\delta V(k, \tau) = \frac{dV_1(k, \tau)}{d\tau} + \Delta V_2(k, \tau)$$

下面以命题形式给出由泛函增量 (15) 负定推导出图 2 所示的连续重复控制系统渐近稳定.

命题 1. 如果二维 Lyapunov 泛函 (14) 的增量

$$\delta V(k, \tau) < 0, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \tau \in [0, T)$$

则图 2 所示的连续重复控制系统渐近稳定.

证明. 根据文中假设, 时域变量 t 可表示为

$$t = kT + \tau$$

并且

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(k+1, \tau) - \mathbf{x}(k, \tau)$$

若 $\delta V(k, \tau) < 0$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\tau \in [0, T)$, 根据式 (15), 对任意固定的 $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, 有

$$\delta V(k, \tau) = \frac{dV_1(k, \tau)}{d\tau} < 0, \quad \tau \in [0, T)$$

即二次函数 $V_1(t)$ 在每个区间

$$[kT, (k+1)T), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

单调递减.

而 $V_1(t)$ 连续, $t \in [0, +\infty)$. 故 $V_1(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递减. 从而有

$$\Delta \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow +\infty \quad (\text{A1})$$

同理, 对任意固定的 $\tau \in [0, T)$, 有

$$\delta V(k, \tau) = \Delta V_2(k, \tau) < 0$$

即

$$V_2(t) = e^T(k-1, \tau) P_3 e(k-1, \tau)$$

关于 $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 单调递减. 从而有

$$e(kT + \tau) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (\text{A2})$$

综上所述, 当 $\delta V(k, \tau) < 0$ 时, 式 (A1) 和式 (A2) 同时成立, 从而图 2 所示的重复控制系统渐近稳定, 并且跟踪误差趋向于零. \square

References

- 1 Hara S, Yamamoto Y, Omata T, Nakano M. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(7): 659–668
- 2 Hillerstrom G, Walgama K. Repetitive control theory and applications — a survey. In: Proceedings of the 13th Triennial World Congress. California, USA: IFAC, 1996. 1–6
- 3 She J H, Pan Y, Nakano M. Repetitive control system with variable structure controller. In: Proceedings of the 6th International Workshop on Variable Structure Systems. Gold Coast, Australia: IEEE, 2000. 273–282
- 4 Owens D H, Li L M, Banks S P. Multi-periodic repetitive control system: a Lyapunov stability analysis for MIMO systems. *International Journal of Control*, 2004, **77**(5): 504–515
- 5 Zhang Li-Qiang, Yang Guo-Lai, Gong Hai-Feng. PID control for electrohydraulic position servo system with repetitive control compensation. *Machine Tool and Hydraulics*, 2005, (8): 112–113
(张立强, 杨国来, 龚海峰. 基于重复控制补偿的电液位置伺服系统 PID 控制. *机床与液压*, 2005, (8): 112–113)

- 6 Park S W, Jeong J, Yang H S, Park Y P, Park N C. Repetitive controller design for minimum track misregistration in hard disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, **41**(9): 2522–2528
- 7 Chen J W, Liu T S. H_∞ repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, **41**(2): 1067–1069
- 8 Wu Min, Lan Yong-Hong, She Jin-Hua. A new method of repetitive control designing based on 2D mixed model. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(9): 1208–1213
(吴敏, 兰永红, 余锦华. 基于二维混合模型的重复控制系统设计新方法. 自动化学报, 2008, **34**(9): 1208–1213)
- 9 Du C L, Xie L H. H_∞ Control and Filtering of Two-Dimensional Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 5–25
- 10 Li Yang, Zhu Jia-Yi, Li Shu-Min. A closed loop P-type iterative learning control for regular linear systems. *Tactical Missile Technology*, 2004, (6): 48–51
(李阳, 朱家仪, 李树民. 正则线性系统的闭环 P 型迭代学习控制. 战术导弹技术, 2004, (6): 48–51)
- 11 Paszke W, Galkowski K, Rogers E, Owens D H. Guaranteed cost control of uncertain differential linear repetitive processes. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2004, **51**(11): 629–634
- 12 Ding Wei-Dong, Sun Zhi-Yi, Wu Ju-Hua. Closed loop P-type iterative learning control based on the 2D linear continuous discrete system theory. *Electric Machines and Control*, 2003, **7**(1): 59–62
(丁伟东, 孙志毅, 吴聚华. 基于 2-D 线性连续-离散系统理论的 P 型闭环迭代学习控制. 电机与控制学报, 2003, **7**(1): 59–62)
- 13 Ho D W C, Lu G P. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach. *International Journal of Control*, 2003, **76**(2): 105–115
- 14 Khargonek P P, Petersen I R, Zhou K M. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(3): 356–361
- 15 Sulikowski B, Galkowski K, Rogers E. PI output feedback control of differential linear repetitive processes. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1442–1445
- 16 Hu Shou-Song. *Automatic Control Theory*. Beijing: Science Press, 2001
(胡寿松. 自动控制原理. 北京: 科学出版社, 2001)



吴敏 中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制. 本文通信作者.

E-mail: min@csu.edu.cn

(WU Min Professor at Central South University. His research interest covers robust control, process control, and intelligent systems. Corresponding author of this paper.)



周兰 中南大学信息科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制和重复控制. E-mail: zly98@yahoo.cn

(ZHOU Lan Ph.D. candidate at Central South University. Her research interest covers robust control and repetitive control.)



余锦华 东京工业大学计算机科学学部副教授. 主要研究方向为控制理论与应用、专家控制和智能机器人.

E-mail: she@cc.teu.ac.jp

(SHE Jin-Hua Associate professor at Tokyo University of Technology, Japan. His research interest covers control theory and application, repetitive control, and intelligent robot.)



何勇 中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制及其应用. E-mail: heyong08@mail.csu.edu.cn

(HE Yong Professor at Central South University. His research interest covers robust control and its applications.)