

一类基于观测器的非线性网络化控制系统的绝对稳定性

赵翔辉¹ 郝飞¹

摘要 主要考虑了基于观测器的 Lurie 网络化控制系统的绝对稳定性问题. 由于采用了基于观测器的反馈控制器, 传感器到控制器的网络诱导时延和控制器到执行器的网络诱导时延不再能合并到一起处理. 首先通过状态增广方法将 Lurie 网络化控制系统建模为一个多时滞的 Lurie 系统, 然后利用 Newton-Leibniz 公式和添加自由权矩阵的方法给出了时滞依赖的稳定性条件. 在此基础上, 给出三种求解控制器和观测器增益矩阵的方法. 此外, 还分别给出了被控对象存在范数有界不确定性和结构不确定性时系统的鲁棒稳定性条件及鲁棒控制器设计方法, 所有得到的结果都是以线性矩阵不等式的形式给出的. 便于利用线性矩阵不等式工具包进行求解. 最后, 通过两个仿真算例说明了方法的可行性和有效性.

关键词 网络化控制系统, 观测器, Lurie 系统, 线性矩阵不等式, 稳定性, 时延
中图分类号 TP13

Absolute Stability for a Class of Observer-based Nonlinear Networked Control Systems

ZHAO Xiang-Hui¹ HAO Fei¹

Abstract This paper is concerned with the absolute stability problem for observer-based Lurie networked control systems. Due to utilizing observer-based dynamic feedback controller, the network-induced delays can not be simply thought as the sum of the sensor-to-controller delay and the controller-to-actuator delay. First, the Lurie networked control system is modeled as a multiple delay Lurie system by the state augment approach. Then, a delay-dependent stability condition is established via Newton-Leibniz formulation and free weighting matrices. Based on the obtained result, three approaches to calculate the controller gain matrix and the observer gain matrix are proposed. We also present the robust stability condition and robust controller design approach for Lurie networked control systems with norm-bounded uncertainties and structured uncertainties. All the results are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs), which are easily solved via the LMI toolbox in Matlab. Finally, two examples are worked out to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed approaches.

Key words Networked control systems (NCSs), observer, Lurie system, linear matrix inequalities (LMIs), stability, delay

通过实时网络构成的闭环反馈控制系统称为网络化控制系统 (Networked control systems, NCSs). 这种分布式结构减少了连线, 降低了成本, 便于安装和维护, 在工业生产和日常生活中得到了广泛的应用, 如车辆控制^[1], 移动机器人控制^[2-3], 远程学习^[4] 等. 然而, 由于网络的介入, 不可避免地会出现网络诱导时延 (Network-induced delay)、数据丢包 (Data package dropout)、错序、多包传输等现象, 这些都将会降低系统性能, 甚至破坏系统的稳定性. 近年来, NCSs 的分析与综合受到了广泛的关注^[5-12]. Yu 等^[7] 同时考虑时延和数据丢包的影响, 将 NCSs 建模为时滞系统, 利用时滞系统理论分析

了 NCSs 的稳定性. 另外, 在文献 [8] 中将 NCSs 建模为切换系统, 分析了 NCSs 的稳定性. Yue 等^[9] 提出了 NCSs 的一个新模型, 基于此模型同时分析了时延, 数据丢包及错序的影响, 给出了时滞依赖的稳定性条件以及状态反馈控制器的设计方法. Gao 等^[10] 同时考虑了时延和量化的影响, 给出了 H_∞ 控制器的设计方法.

然而, 上述对 NCSs 的研究主要集中在被控对象为线性系统情况, 但非线性现象是本质的、普遍的, 研究基于非线性被控对象的 NCSs 具有更加重要的意义. Lurie 系统是一类典型的非线性系统, 许多非线性物理系统可以表示成 Lurie 系统的结构形式, 即一个线性系统和非线性单元的反馈连接, 而非线性部分满足一个扇区条件. 自从 1944 年 Lurie 系统的绝对稳定性问题提出以来, 受到了广泛的关注, 形成了相对独立的理论体系^[13-16]. 但对于 NCSs, 鲜有文献将其作为对象加以研究. 此外, 在 NCSs 中通常采用无记忆线性状态反馈^[7-10], 这样可以将传感器到控制器和控制器到执行器的时延, 合并到一起

收稿日期 2008-05-21 收修改稿日期 2008-09-04
Received May 21, 2008; in revised form September 4, 2008
国家自然科学基金 (60504018), 北京航空航天大学蓝天新星项目资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60504018) and "New Star of Blue Sky" of Beijing University of Aeronautics and Astronautics
1. 北京航空航天大学第七研究室 北京 100191
1. The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00933

处理, 但一般情况下, 对象的全状态信息是不容易被测量的, 因而基于观测器的反馈控制是一个可行的方法. 文献 [11] 在考虑前向通道和反向通道同时存在数据丢包, 时延小于一个采样周期的情况下, 将 NCSs 建模为具有四个子系统的切换系统, 利用异步动态系统和平均驻留时间的方法给出了基于观测器的输出反馈控制器的设计方法. 文献 [12] 以一类 Lipschitz 非线性系统为对象, 研究了 NCSs 的基于观测器的 H_∞ 控制问题, 但文中的 NCSs 只考虑了传感器和控制器之间存在网络的情况.

受到以上分析的启发, 本文主要以 Lurie 系统作为被控对象, 采用基于观测器的状态反馈控制器, 考虑在传感器到控制器和控制器到执行器同时存在网络的情况下, Lurie 网络化控制系统的绝对稳定性问题. 文中考虑的网络诱导时延是随机时变的. 通过状态增广方法将 Lurie 网络化控制系统建模为一个多时滞的 Lurie 系统, 然后利用 Newton-Leibniz 公式和添加自由权矩阵的方法给出时滞依赖的稳定性条件, 并给出三种控制器和观测器增益矩阵的求解方法. 此外, 给出了被控对象存在范数有界不确定性和结构不确定性时系统的鲁棒稳定性条件及鲁棒控制器的设计方法. 基于观测器的 Lurie 网络化控制系统的结构如图 1 所示.

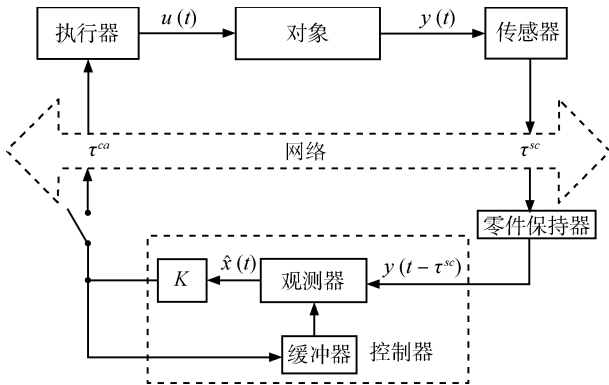


图 1 基于观测器的 Lurie 网络化控制系统

Fig. 1 Observer-based Lurie networked control system

本文中用到的符号如下: A^T 和 A^+ 分别表示矩阵 A 的转置和 M-P 逆; 如果矩阵 A 可逆, A^{-1} 表示 A 的逆; $\|\cdot\|$ 表示矩阵的诱导 2-范数; 在任意的对称矩阵中, 符号 “*” 表示矩阵对称块的部分.

1 问题描述

考虑如下的 Lurie 系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) = -\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为合适维数的实常矩阵; $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ 为无记忆非线性函数, 满足局部 Lipschitz 条件, $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}$, 且对于任意的 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ 满足如下扇形区条件

$$\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{y})[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) - \Theta\mathbf{y}] \leq 0 \quad (2)$$

其中, Θ 为实对角矩阵. 通常称这样的非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ 属于扇形区域 $[0, \Theta]$, 记为 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \in \mathcal{F}[0, \Theta]$.

注 1. 对于更一般的情况 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \in \mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$, 总可以通过环路变换转化为 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \in \mathcal{F}[0, \Theta]$ 的情况^[17], 故本文只考虑 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \in \mathcal{F}[0, \Theta]$ 的情况.

对于系统 (1), 假设 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可控, (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 可观, 矩阵 \mathbf{C} 行满秩. 对于图 1 所示的 NCS, 假设传感器采用时间驱动, 控制器和执行器采用事件驱动, 数据采用单包传输. τ^{sc} 表示从传感器到控制器的时延, τ^{ca} 表示从控制器到执行器的时延. 不失一般性地假设 τ^{sc} 和 τ^{ca} 都是有界的, 即对任意的 $t \geq 0$ 均有

$$0 \leq \tau^{ca} \leq \tau_{1M} < \infty, \quad 0 \leq \tau^{sc} \leq \tau_{2M} < \infty \quad (3)$$

注 2. 时延 τ^{sc} 和 τ^{ca} 分别表示从传感器采样时刻到保持器更新时刻所经历的时间和从采样开关采样时刻到执行器发出动作时刻所经历的时间, 既包含等待时延和传输时延, 也包含数据丢包产生的时延.

对象测量输出 $\mathbf{y}(t)$ 经网络传输, 再经过零阶保持器后, 在控制器端得到的信号为 $\mathbf{y}(t - \tau^{sc})$; 同时在观测器端引入一个长度为 τ^{ca} 的缓冲器, 使得观测器输入 $\hat{\mathbf{u}}(t)$ 与对象输入 $\mathbf{u}(t)$ 保持同步. 利用 $\mathbf{y}(t - \tau^{sc})$ 和 $\hat{\mathbf{u}}(t)$ 构造观测器如下

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t - \tau^{sc}) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t - \tau^{sc})) \quad (4)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\hat{\mathbf{u}}(t) \in \mathbf{R}^p$ 分别为观测器的状态向量和输入向量; \mathbf{L} 为观测器增益矩阵. 控制信号经过网络传输后到达执行器, 作用于被控对象的控制量为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t - \tau^{ca}) \quad (5)$$

式中 \mathbf{K} 为控制器增益矩阵. 将式 (5) 代入式 (1) 得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t - \tau^{ca}) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t) \quad (6)$$

定义误差向量 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, 则有

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{e}(t - \tau^{sc}) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t) \quad (7)$$

定义增广状态向量 $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{e}^T(t)]^T$, 由式 (6) 和 (7) 可得闭环系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}z(t) + \bar{B}\bar{K}z(t - \tau^{ca}) + \\ &\quad \bar{L}\bar{C}z(t - \tau^{sc}) + \bar{D}w(t) \\ z(t) &= \phi(t), \quad \forall t \in [t_0 - \max_{i=1,2} \tau_{iM}, t_0) \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\phi(t)$ 为系统的初始函数,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & -C \end{bmatrix} \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} K & -K \end{bmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

此时, 条件 (2) 变为

$$w^T(t)w(t) + w^T(t)\bar{\Theta}z(t) \leq 0 \quad (10)$$

其中, $\bar{\Theta} = \Theta C [I \ 0]$.

注 3. 闭环系统方程 (8) 渐近稳定的必要条件为 $\bar{A} + \bar{B}\bar{K} + \bar{L}\bar{C}$ 是 Hurwitz 的, 而

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{K} + \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

所以, $A + BK$ 和 $A - LC$ 的特征值恰好是 $\bar{A} + \bar{B}\bar{K} + \bar{L}\bar{C}$ 的特征值, 故要求 (A, B) 可控, (A, C) 可观。

2 主要结果

2.1 稳定性分析

首先给出文中将要用到的两个引理。

引理 1 (Schur 补引理)^[18]. 给定对称分块矩阵

$$S \in \mathbf{R}^{n \times n}, \text{ 则 } S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \text{ 当且仅当以下两个条件之一成立:}$$

- 1) $S_{11} < 0$ 且 $S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$;
- 2) $S_{22} < 0$ 且 $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0$.

引理 2^[15]. 给定对称矩阵 Σ_1 和任意合适维数的实矩阵 Σ_2 和 Σ_3 , 如果对于所有 $\Delta \in \Omega$ 有

$$\Sigma_1 + \Sigma_2\Delta\Sigma_3 + \Sigma_3^T\Delta^T\Sigma_2^T < 0$$

其中 Ω 如式 (11) (见本页下方) 所示, 当且仅当存在 $Q \in \mathcal{L}$ 满足

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 + \Sigma_3^T Q \Sigma_3 & \Sigma_2 \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0$$

其中 \mathcal{L} 如式 (12) (见本页下方). 特别地, 当 $k = 1, l = 0$ 时, 有 $\Sigma_1 + \Sigma_2\Delta_1\Sigma_3 + \Sigma_3^T\Delta_1^T\Sigma_2^T < 0$ 等价于 $\Sigma_1 + s_1\Sigma_3^T\Sigma_3 + s_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_2^T < 0$.

定义 1. 如果对于所有的 $\varphi(\cdot) \in \mathcal{F}[0, \Theta]$, Lurie 系统 (8) 都是全局渐近稳定的, 则称其在 $\mathcal{F}[0, \Theta]$ 内是绝对稳定的。

定理 1. 考虑图 1 所示的系统, 给定 K 和 L , 如果存在合适维数的矩阵 $P > 0, R_i > 0, M_i, N_i, i = 1, 2$, 满足式 (13) (见本页下方), 其中

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \bar{A}^T P + P\bar{A} + M_1 + M_1^T + M_2 + M_2^T \\ \Phi_{12} &= P\bar{B}\bar{K} - M_1 + N_1^T \\ \Phi_{13} &= P\bar{L}\bar{C} - M_2 + N_2^T \\ \Phi_{22} &= -N_1 - N_1^T \\ \Phi_{33} &= -N_2 - N_2^T \end{aligned} \quad (14)$$

则图 1 所示的系统是绝对稳定的。

证明. 对于存在的对称正定矩阵 P, R_1, R_2 , 选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} V(t, z(t)) &= V_1(t, z(t)) + V_2(t, z(t)) + V_3(t, z(t)) \\ V_1(t, z(t)) &= z^T(t)Pz(t) \\ V_2(t, z(t)) &= \int_{-\tau_{1M}}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{z}^T(\alpha)R_1\dot{z}(\alpha)d\alpha d\beta \end{aligned}$$

$$\Omega = \{ \Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_k, \delta_1 I, \dots, \delta_l I\} : \|\Delta\| \leq 1, \Delta_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}, i = 1, \dots, k, \delta_j \in \mathbf{R}, j = 1, \dots, l, k, l \in \mathbf{Z}^+ \} \quad (11)$$

$$\mathcal{L} = \{ \text{diag}\{s_1 I, \dots, s_k I, S_1, \dots, S_l\} : 0 < s_i \in \mathbf{R}, 0 < S_j \in \mathbf{R}^{n_j \times n_j}, k, l \in \mathbf{Z}^+ \} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & P\bar{D} - \bar{\Theta}^T & M_1 & M_2 & \bar{A}^T R_1 & \bar{A}^T R_2 \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & N_1 & 0 & \bar{K}^T \bar{B}^T R_1 & \bar{K}^T \bar{B}^T R_2 \\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0 & N_2 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_1 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_2 \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T R_1 & \bar{D}^T R_2 \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$V_3(t, \mathbf{z}(t)) = \int_{-\tau_{2M}}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\alpha) R_2 \dot{\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha d\beta$$

$V(t, \mathbf{z}(t))$ 沿系统 (8) 的解轨迹求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \mathbf{z}(t)) &= \dot{V}_1(t, \mathbf{z}(t)) + \dot{V}_2(t, \mathbf{z}(t)) + \dot{V}_3(t, \mathbf{z}(t)) = \\ &= 2\mathbf{z}^T(t) P \dot{\mathbf{z}}(t) + \tau_{1M} \dot{\mathbf{z}}^T(t) R_1 \dot{\mathbf{z}}(t) + \\ &+ \tau_{2M} \dot{\mathbf{z}}^T(t) R_2 \dot{\mathbf{z}}(t) - \\ &\int_{t-\tau_{1M}}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\alpha) R_1 \dot{\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha - \\ &\int_{t-\tau_{2M}}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\alpha) R_2 \dot{\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

根据 Newton-Leibniz 公式, 对于任意矩阵 M_i, N_i , 必有

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(t - \tau^{ca}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ N_1 \end{bmatrix} \times \\ &\left[\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t - \tau^{ca}) - \int_{t-\tau^{ca}}^t \dot{\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Xi_2 &= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(t - \tau^{sc}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \times \\ &\left[\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t - \tau^{sc}) - \int_{t-\tau^{sc}}^t \dot{\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

此外, 对于任意矩阵 $\begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2$, 有

$$\Xi_3 = \tau_{1M} \Xi_5 - \int_{t-\tau^{ca}}^t \Xi_5 d\alpha \geq 0 \quad (18)$$

$$\Xi_4 = \tau_{2M} \Xi_6 - \int_{t-\tau^{sc}}^t \Xi_6 d\alpha \geq 0 \quad (19)$$

这里

$$\begin{aligned} \Xi_5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(t - \tau^{ca}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(t - \tau^{ca}) \end{bmatrix} \\ \Xi_6 &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(t - \tau^{sc}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_2 & Y_2 \\ * & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(t - \tau^{sc}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由扇区条件 (10) 知

$$-2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) - 2\mathbf{w}^T(t)\bar{\Theta}\mathbf{z}(t) \geq 0 \quad (20)$$

由式 (15) ~ (20), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \mathbf{z}(t)) &\leq \dot{V}_1(t, \mathbf{z}(t)) + \dot{V}_2(t, \mathbf{z}(t)) + \dot{V}_3(t, \mathbf{z}(t)) - \\ &2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) - 2\mathbf{w}^T(t)\bar{\Theta}\mathbf{z}(t) + \sum_{i=1}^4 \Xi_i = \\ &\xi^T(t)\Phi\xi(t) + \int_{t-\tau^{ca}}^t \xi_1^T(t, \alpha)\Phi_1\xi_1(t, \alpha)d\alpha + \\ &\int_{t-\tau^{sc}}^t \xi_2^T(t, \alpha)\Phi_2\xi_2(t, \alpha)d\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

其中, Φ 如式 (22) (见本页下方) 所示, $\Upsilon^T = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}\bar{K} & \bar{L}\bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}$, $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{22}, \Phi_{33}$ 由式 (14) 给出,

$$\xi^T(t) = [\mathbf{z}^T(t) \quad \mathbf{z}^T(t - \tau^{ca}) \quad \mathbf{z}^T(t - \tau^{sc}) \quad \mathbf{w}^T(t)]$$

$$\xi_1^T(t, \alpha) = [\mathbf{z}^T(t) \quad \mathbf{z}^T(t - \tau^{ca}) \quad \dot{\mathbf{z}}^T(\alpha)]$$

$$\xi_2^T(t, \alpha) = [\mathbf{z}^T(t) \quad \mathbf{z}^T(t - \tau^{sc}) \quad \dot{\mathbf{z}}^T(\alpha)]$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} -X_i & -Y_i & -M_i \\ * & -Z_i & -N_i \\ * & * & -R_i \end{bmatrix}$$

由式 (21) 知, 如果 $\Phi < 0, \Phi_i < 0$, 则对于充分小的 ε 有 $\dot{V}(t, \mathbf{z}(t)) < -\varepsilon\|\mathbf{z}(t)\|^2$, 故系统 (8) 是渐近稳定的. 又因为如果存在矩阵 $P > 0, R_i > 0, M_i, N_i, i = 1, 2$ 满足式 (13), 则由 Schur 补引理知

$$\begin{aligned} &\Psi + \tau_{1M} \begin{bmatrix} M_1 R_1^{-1} M_1^T & M_1 R_1^{-1} N_1^T & 0 & 0 \\ * & N_1 R_1^{-1} N_1^T & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} + \\ &\tau_{2M} \begin{bmatrix} M_2 R_2^{-1} M_2^T & 0 & M_2 R_2^{-1} N_2^T & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & N_2 R_2^{-1} N_2^T & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} + \tau_{1M} X_1 + \tau_{2M} X_2 & \Phi_{12} + \tau_{1M} Y_1 & \Phi_{13} + \tau_{2M} Y_2 & P\bar{D} - \bar{\Theta}^T \\ * & \Phi_{22} + \tau_{1M} Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} + \tau_{2M} Z_2 & 0 \\ * & * & * & -2I \end{bmatrix} + \tau_{1M} \Upsilon R_1 \Upsilon^T + \tau_{2M} \Upsilon R_2 \Upsilon^T \quad (22)$$

其中

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & P\bar{D} - \bar{\Theta}^T \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & 0 \\ * & * & * & -2I \end{bmatrix} + \tau_{1M} \Upsilon R_1 \Upsilon^T + \tau_{2M} \Upsilon R_2 \Upsilon^T$$

所以, 一定存在矩阵 $P > 0, R_i > 0, M_i, N_i,$

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2 \text{ 满足}$$

$$\Psi + \tau_{1M} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 0 & 0 \\ * & Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} + \tau_{2M} \begin{bmatrix} X_2 & 0 & Y_2 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & Z_2 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} M_i R_i^{-1} M_i^T & M_i R_i^{-1} N_i^T \\ * & N_i R_i^{-1} N_i^T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

由式 (23) 成立知 $\Phi < 0$, 由 Schur 补引理知式 (24) 成立等价于 $\Phi_i < 0$. 因此, 系统 (8) 对任意的 $\varphi(\cdot) \in \mathcal{F}[0, \Theta]$ 都是全局渐近稳定的, 因而是绝对稳定的. \square

注 4. 对于给定的 K 和 L , 式 (13) 是一个关于 $P, R_i, M_i, N_i, i = 1, 2$ 的线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI), 容易利用 LMI 工具包进行求解.

注 5. 在定理 1 中, 没有使用任何的模型变换和不等式缩放, 可以降低结果的保守程度.

2.2 控制器设计

定理 2. 考虑图 1 所示的系统, 如果存在合适维数的矩阵 $X > 0, \bar{R}_i > 0, \bar{M}_i, \bar{N}_i, Y_i, i = 1, 2$ 满足式 (25), 其中

$$\bar{X} = \text{diag}\{X, X\}, \bar{Y}_1 = [Y_1 \quad -Y_1]$$

$$\bar{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \bar{X} \bar{A}^T + \bar{A} \bar{X} + \bar{M}_1 + \bar{M}_1^T + \bar{M}_2 + \bar{M}_2^T$$

$$\bar{\Phi}_{12} = \bar{B} \bar{Y}_1 - \bar{M}_1 + \bar{N}_1^T$$

$$\bar{\Phi}_{13} = \bar{Y}_2 - \bar{M}_2 + \bar{N}_2^T$$

$$\bar{\Phi}_{22} = -\bar{N}_1 - \bar{N}_1^T$$

$$\bar{\Phi}_{33} = -\bar{N}_2 - \bar{N}_2^T \quad (26)$$

则图 1 所示的系统是绝对稳定的, 控制器增益阵和观测器增益阵可由下式求取

$$K = Y_1 X^{-1}, L = Y_2 X^{-1} C^+ \quad (27)$$

证明. 取 $P = \text{diag}\{\bar{P}, \bar{P}\}$, 这里 $\bar{P} > 0$. 令 $X = \bar{P}^{-1}, \bar{X} = P^{-1} = \text{diag}\{X, X\}$, 式 (13) 分别左乘和右乘 $\text{diag}\{\bar{X}, \bar{X}, \bar{X}, I, \bar{X}, \bar{X}, R_1^{-1}, R_2^{-1}\}$, 并设 $\bar{M}_1 = \bar{X} M_1 \bar{X}, \bar{M}_2 = \bar{X} M_2 \bar{X}, \bar{N}_1 = \bar{X} N_1 \bar{X}, \bar{N}_2 = \bar{X} N_2 \bar{X}, \bar{R}_1 = \bar{X} R_1 \bar{X}, \bar{R}_2 = \bar{X} R_2 \bar{X}, Y_1 = KX, Y_2 = LCX$, 便得式 (13) 与 (25) 等价, 由定理 1 知闭环 NCSs (8) 是绝对稳定的. 再由 $Y_1 = KX$ 得 $K = Y_1 X^{-1}$; 由于 C 行满秩, 必存在右逆, 由 $Y_2 = LCX$ 得 $L = Y_2 X^{-1} C^+$. \square

在定理 2 的条件 (25) 中, 由于非线性项 $-\tau_{1M}^{-1} \bar{X} \bar{R}_1^{-1} \bar{X}$ 和 $-\tau_{2M}^{-1} \bar{X} \bar{R}_2^{-1} \bar{X}$ 的存在, 无法直接用软件求解. 但注意到由于 $\bar{R}_1 > 0$ 和 $\bar{R}_2 > 0$, 必有

$$(\bar{R}_1 - \bar{X}) \bar{R}_1^{-1} (\bar{R}_1 - \bar{X}) \geq 0$$

$$(\bar{R}_2 - \bar{X}) \bar{R}_2^{-1} (\bar{R}_2 - \bar{X}) \geq 0 \quad (28)$$

式 (28) 等价于

$$-\bar{X} \bar{R}_1^{-1} \bar{X} \leq \bar{R}_1 - 2\bar{X}$$

$$-\bar{X} \bar{R}_2^{-1} \bar{X} \leq \bar{R}_2 - 2\bar{X} \quad (29)$$

这样, 由式 (25) 和 (29) 就可以得到定理 3.

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & \bar{D} - \bar{X} \bar{\Theta}^T & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & \bar{X} \bar{A}^T & \bar{X} \bar{A}^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{Y}_1^T \bar{B}^T & \bar{Y}_1^T \bar{B}^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & 0 & 0 & \bar{N}_2 & \bar{Y}_2^T & \bar{Y}_2^T \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T & \bar{D}^T \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} \bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} \bar{R}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} \bar{X} \bar{R}_1^{-1} \bar{X} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} \bar{X} \bar{R}_2^{-1} \bar{X} \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

定理 3. 考虑图 1 所示的系统, 如果存在合适维数的矩阵 $X > 0, \bar{R}_i > 0, \bar{M}_i, \bar{N}_i, Y_i, i = 1, 2$ 满足式 (30) (见本页下方), 其中 $\bar{\Phi}_{11}, \bar{\Phi}_{12}, \bar{\Phi}_{13}, \bar{\Phi}_{22}, \bar{\Phi}_{23}, \bar{X}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ 由式 (26) 给出, 则图 1 所示的系统是绝对稳定的, K 和 L 可由式 (27) 求取.

定理 3 给出的条件 (30) 是 LMI 的形式, 便于求解. 下面给出另外一种求解方法. 引入新的矩阵变量 $W_1 > 0$ 和 $W_2 > 0$, 满足

$$W_1 - \bar{X}\bar{R}_1^{-1}\bar{X} \leq 0, W_2 - \bar{X}\bar{R}_2^{-1}\bar{X} \leq 0 \quad (31)$$

由 Schur 补引理知, 式 (31) 等价于

$$\begin{bmatrix} -W_1^{-1} & \bar{X}^{-1} \\ * & -\bar{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \begin{bmatrix} -W_2^{-1} & \bar{X}^{-1} \\ * & -\bar{R}_2^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (32)$$

这样可以得到定理 4.

定理 4. 考虑图 1 所示的系统, 如果存在合适维数的矩阵 $X > 0, \hat{X} > 0, W_i > 0, \hat{W}_i > 0, \hat{R}_i > 0, \hat{R}_i > 0, \hat{M}_i, \hat{N}_i, Y_i, i = 1, 2$ 满足式 (33) (见本页下方)

$$\begin{bmatrix} -\hat{W}_1 & T \\ * & -\hat{R}_1 \end{bmatrix} \leq 0, \begin{bmatrix} -\hat{W}_2 & T \\ * & -\hat{R}_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} W_1\hat{W}_1 &= I, W_2\hat{W}_2 = I \\ \bar{R}_1\hat{R}_1 &= I, \bar{R}_2\hat{R}_2 = I, X\hat{X} = I \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $\bar{\Phi}_{11}, \bar{\Phi}_{12}, \bar{\Phi}_{13}, \bar{\Phi}_{22}, \bar{\Phi}_{33}, \bar{X}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ 由式 (26) 给出, $T = \text{diag}\{\hat{X}, \hat{X}\}$, 则图 1 所示的系统是绝对稳定的, K 和 L 可由式 (27) 求取.

由于等式约束 (35) 的存在, 定理 4 给出的条件不是一个凸优化问题, 但可以利用文献 [19] 中提出的锥补线性化 (Cone complementary linear, CCL) 的方法来求解, 即定理 4 中基于观测器的状态反馈控制器的设计问题可以转化为下面的优化问题

$$\begin{aligned} \min & \left\{ \text{tr}(X\hat{X}) + \text{tr} \left(\sum_{i=1,2} W_i\hat{W}_i + \bar{R}_i\hat{R}_i \right) \right\} \\ \text{s.t.} & \text{式 (33) 和 (34), 以及} \\ & \begin{bmatrix} W_i & I \\ I & \hat{W}_i \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \bar{R}_i & I \\ I & \hat{R}_i \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} X & I \\ I & \hat{X} \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (36)$$

根据上述思想给出如下算法.

算法 1.

步骤 1. 寻找一组可行解 $\{W_{10}, \hat{W}_{10}, W_{20}, \hat{W}_{20}, \bar{R}_{10}, \hat{R}_{10}, \bar{R}_{20}, \hat{R}_{20}, X_0, \hat{X}_0, Y_{10}, Y_{20}\}$, 使得式 (33), (34) 和 (36) 成立; 如果可行解不存在, 则退出; 设 $k = 0$.

步骤 2. 求解关于 $\{W_1, \hat{W}_1, W_2, \hat{W}_2, \bar{R}_1, \hat{R}_1, \bar{R}_2, \hat{R}_2, X, \hat{X}, Y_1, Y_2\}$ 的优化问题

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & \bar{D} - \bar{X}\bar{\Theta}^T & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & \bar{X}\bar{A}^T & \bar{X}\bar{A}^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{Y}_1^T\bar{B}^T & \bar{Y}_1^T\bar{B}^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & 0 & 0 & \bar{N}_2 & \bar{Y}_2^T & \bar{Y}_2^T \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T & \bar{D}^T \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1}\bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1}\bar{R}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \tau_{1M}^{-1}(\bar{R}_1 - 2\bar{X}) & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \tau_{2M}^{-1}(\bar{R}_2 - 2\bar{X}) \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & \bar{D} - \bar{X}\bar{\Theta}^T & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & \bar{X}\bar{A}^T & \bar{X}\bar{A}^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{Y}_1^T\bar{B}^T & \bar{Y}_1^T\bar{B}^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & 0 & 0 & \bar{N}_2 & \bar{Y}_2^T & \bar{Y}_2^T \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T & \bar{D}^T \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1}\bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1}\bar{R}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1}W_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1}W_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

$$\min \left\{ \begin{aligned} & \text{tr}(X\hat{X}_k + X_k\hat{X}) + \\ & \text{tr} \left(\sum_{i=1,2} W_i \hat{W}_{ik} + W_{ik} \hat{W}_i + \bar{R}_i \hat{R}_{ik} + \bar{R}_{ik} \hat{R}_i \right) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}_0 + \bar{U}_1 \bar{\Delta}(t) \bar{H}_1 \\ \bar{B} &= \bar{B}_0 + \bar{U}_1 \bar{\Delta}(t) \bar{H}_2 \\ \bar{D} &= \bar{D}_0 + \bar{U}_1 \bar{\Delta}(t) \bar{H}_3 \end{aligned} \quad (40)$$

s.t. 式 (33), (34) 和 (36)

步骤 3. 如果 $W_1 - \bar{X}\bar{R}_1^{-1}\bar{X} \leq 0$, $W_2 - \bar{X}\bar{R}_2^{-1}\bar{X} \leq 0$, 输出 $\{X, Y_1, Y_2\}$, 退出.

步骤 4. 如果 $k > N$, N 为指定的迭代次数, 退出; 否则, 令 $k = k + 1$, 设 $X_k = X$, $\hat{X}_k = \hat{X}$, $W_{ik} = W_i$, $\hat{W}_{ik} = \hat{W}_i$, $\bar{R}_{ik} = \bar{R}_i$, $\hat{R}_{ik} = \hat{R}_i$, 返回步骤 2.

如果取 $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \bar{X}$, 由定理 2 可得如下推论:

推论 1. 考虑图 1 所示的系统, 如果存在合适维数的矩阵 $X > 0$, $\bar{M}_i, \bar{N}_i, Y_i, i = 1, 2$ 满足式 (37) (见本页下方), 其中 $\bar{\Phi}_{11}, \bar{\Phi}_{12}, \bar{\Phi}_{13}, \bar{\Phi}_{22}, \bar{\Phi}_{33}, \bar{X}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ 由式 (26) 给出, 则图 1 所示的系统是绝对稳定的, K 和 L 可由式 (27) 求取.

2.3 鲁棒性分析

本节主要考虑系统 (1) 存在两类参数不确定性的情况: 范数有界不确定性和结构不确定性.

2.3.1 范数有界不确定性

假设系统 (1) 的系数矩阵 A, B, D 具有如下形式

$$A = A_0 + \Delta A, B = B_0 + \Delta B, D = D_0 + \Delta D \quad (38)$$

其中 A_0, B_0, D_0 为已知常数矩阵, $\Delta A, \Delta B$ 和 ΔD 是表示参数不确定性的未知矩阵, 具有以下形式

$$[\Delta A \quad \Delta B \quad \Delta D] = U_1 \Delta(t) [H_1 \quad H_2 \quad H_3] \quad (39)$$

上式中的 $\Delta(t)$ 是满足 $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I$ 的不确定矩阵, U_1, H_1, H_2 和 H_3 是已知的常数矩阵. 观测器和控制器的形式仍如式 (4) 和 (5) 所示, 则图 1 所示的 NCS 仍可用式 (8) 描述.

将式 (38) 代入系数矩阵 (9) 中, 得

这里,

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_0 = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_0 \end{bmatrix} \\ \bar{\Delta}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta(t) & 0 \\ 0 & \Delta(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{U}_1 = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \\ \bar{H}_1 &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_3 = \begin{bmatrix} H_3 \\ H_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定理 5. 考虑图 1 所示的系统, 假设系统 (1) 中存在形如式 (39) 的不确定性, 给定 K 和 L , 如果存在标量 $\varepsilon > 0$ 及合适维数的矩阵 $P > 0, R_i > 0, M_i, N_i, i = 1, 2$ 满足式 (41) (见下页上方), 其中 $\bar{\Phi}_{13}, \bar{\Phi}_{22}, \bar{\Phi}_{33}$ 由式 (14) 给出, $\bar{\Phi}_{11} = \bar{A}_0^T P + P \bar{A}_0^T + M_1 + M_1^T + M_2 + M_2^T$, $\bar{\Phi}_{12} = P \bar{B}_0 \bar{K} - M_1 + N_1^T$, $\bar{\Phi}_{14} = P \bar{D}_0 - \bar{\Theta}^T$, 则图 1 所示的系统是鲁棒绝对稳定的.

证明. 将式 (40) 代入式 (13), 并将其改写为

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \bar{\Delta} \Sigma_3 + \Sigma_3^T \bar{\Delta}^T \Sigma_2^T < 0 \quad (42)$$

其中, Σ_1 如式 (43) (见下页上方) 所示,

$$\begin{aligned} \Sigma_2^T &= [(P \bar{U}_1)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (R_1 \bar{U}_1)^T \quad (R_2 \bar{U}_1)^T] \\ \Sigma_3 &= [\bar{H}_1 \quad \bar{H}_2 \bar{K} \quad 0 \quad \bar{H}_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

由引理 2 知, 式 (42) 成立等价于存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\Sigma_1 + \varepsilon \Sigma_3^T \Sigma_3 + \varepsilon^{-1} \Sigma_2 \Sigma_2^T < 0 \quad (44)$$

所以, 由 Schur 补引理知, 式 (41) 成立等价于式 (13) 成立. 由定理 1 知, 图 1 所示的系统是绝对稳定的. \square

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & \bar{D} - \bar{X} \bar{\Theta}^T & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & \bar{X} \bar{A}^T & \bar{X} \bar{A}^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{Y}_1^T \bar{B}^T & \bar{Y}_1^T \bar{B}^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & 0 & 0 & \bar{N}_2 & \bar{Y}_2^T & \bar{Y}_2^T \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T & \bar{D}^T \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} \bar{X} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} \bar{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} \bar{X} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} \bar{X} \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} + \varepsilon \bar{H}_1^T \bar{H}_1 & \tilde{\Phi}_{12} + \varepsilon \bar{H}_1^T \bar{H}_2 \bar{K} & \Phi_{13} & \tilde{\Phi}_{14} + \varepsilon \bar{H}_1^T \bar{H}_3 & M_1 & M_2 & \bar{A}_0^T R_1 & \bar{A}_0^T R_2 & P\bar{U}_1 \\ * & \Phi_{22} + \varepsilon \bar{K}^T \bar{H}_2^T \bar{H}_2 \bar{K} & 0 & \varepsilon \bar{K}^T \bar{H}_2^T \bar{H}_3 & N_1 & 0 & \bar{K}^T \bar{B}_0^T R_1 & \bar{K}^T \bar{B}_0^T R_2 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \varepsilon \bar{H}_4^T \bar{H}_3 & 0 & N_2 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_1 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_2 & 0 \\ * & * & * & -2I + \varepsilon \bar{H}_3^T \bar{H}_3 & 0 & 0 & \bar{D}_0^T R_1 & \bar{D}_0^T R_2 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 & R_1 \bar{U}_1 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 & R_2 \bar{U}_1 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} & P\bar{L}\bar{C} - M_2 + N_2^T & \tilde{\Phi}_{14} & M_1 & M_2 & \bar{A}_0^T R_1 & \bar{A}_0^T R_2 \\ * & -N_1 - N_1^T & 0 & 0 & N_1 & 0 & \bar{K}^T \bar{B}_0^T R_1 & \bar{K}^T \bar{B}_0^T R_2 \\ * & * & -N_2 - N_2^T & 0 & 0 & N_2 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_1 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_2 \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}_0^T R_1 & \bar{D}_0^T R_2 \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} & \Phi_{13} & \tilde{\Phi}_{14} & M_1 & M_2 & \bar{A}_0^T R_1 & \bar{A}_0^T R_2 & P\bar{U}_1 & \bar{H}_1^T \bar{Q} \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & N_1 & 0 & \bar{K}^T \bar{B}_0^T R_1 & \bar{K}^T \bar{B}_0^T R_2 & 0 & \bar{K}^T \bar{H}_2^T \bar{Q} \\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0 & N_2 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_1 & \bar{C}^T \bar{L}^T R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}_0^T R_1 & \bar{D}_0^T R_2 & 0 & \bar{H}_3^T \bar{Q} \\ * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1} R_1 & 0 & R_1 \bar{U}_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1} R_2 & R_2 \bar{U}_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{Q} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

2.3.2 结构不确定性

本节讨论不确定性矩阵 $\Delta \in \Omega$ 的情况, 这里 Ω 的定义已经在引理 2 中给出.

定理 6. 考虑图 1 所示的系统, 假设系统 (1) 中存在形如式 (39) 的不确定性且 $\Delta \in \Omega$, 给定 K 和 L , 如果存在合适维数的矩阵 $Q \in \mathcal{L}$ 及 $P > 0$, $R_i > 0$, $M_i, N_i, i = 1, 2$ 满足式 (45) (见本页上方), 其中 $\Phi_{13}, \Phi_{22}, \Phi_{33}$ 由式 (14) 给出, $\tilde{\Phi}_{11}, \tilde{\Phi}_{12}, \tilde{\Phi}_{14}$ 同定理 5 中的定义, $\bar{Q} = \text{diag}\{Q, Q\}$, 则图 1 所示的系统是鲁棒绝对稳定的.

证明. 类似定理 5 的证明, 利用引理 2 和 Schur 补引理, 由定理 1 便可得到结论. \square

注 6. 在定理 6 中, 由于利用了 Δ 的结构信息, 引入了附加矩阵 $Q \in \mathcal{L}$, 从而可以降低结果的保守

性.

2.4 鲁棒控制器设计

本节将给出鲁棒控制器的设计方法. 由于范数有界不确定性正是集合 Ω 中 $k = 1, l = 0$ 时的结构不确定性, 这里仅以结构不确定性为例进行讨论.

定理 7. 考虑图 1 所示的系统, 假设系统 (1) 中存在形如式 (39) 的不确定性, 且 $\Delta \in \Omega$, 如果存在合适维数的矩阵 $Q \in \mathcal{L}$ 和 $X > 0$, $\check{R}_i > 0$, $\check{M}_i, \check{N}_i, Y_i, i = 1, 2$ 满足式 (46) (见下页上方), 其中, $\bar{X} =$

$$\text{diag}\{X, X\}, \check{Y}_1 = [Y_1 \quad -Y_1], \check{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 \end{bmatrix}, \\ \check{\Phi}_{11} = \bar{X} \bar{A}_0^T + \bar{A}_0^T \bar{X} + \check{M}_1 + \check{M}_1^T + \check{M}_2 + \check{M}_2^T, \\ \check{\Phi}_{12} = \bar{B}_0 \check{Y}_1 - \check{M}_1 + \check{N}_1^T, \quad \check{\Phi}_{13} = \check{Y}_2 - \check{M}_2 + \check{N}_2^T,$$

$$\begin{bmatrix}
 \check{\Phi}_{11} & \check{\Phi}_{12} & \check{\Phi}_{13} & \check{\Phi}_{14} & \check{M}_1 & \check{M}_2 & \bar{X}\bar{A}_0^T & \bar{X}\bar{A}_0^T & \bar{U}_1\bar{X} & \bar{X}\bar{H}_1^T \\
 * & \check{\Phi}_{22} & 0 & 0 & \check{N}_1 & 0 & \check{Y}_1^T\bar{B}_0^T & \check{Y}_1^T\bar{B}_0^T & 0 & \check{Y}_1^T\bar{H}_2^T \\
 * & * & \check{\Phi}_{33} & 0 & 0 & \check{N}_2 & \check{Y}_2^T & \check{Y}_2^T & 0 & 0 \\
 * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}_0^T & \bar{D}_0^T & 0 & \bar{H}_3^T \\
 * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1}\check{R}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1}\check{R}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1}\bar{X}\check{R}_1^{-1}\bar{X} & 0 & \bar{U}_1\bar{X} & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1}\bar{X}\check{R}_2^{-1}\bar{X} & \bar{U}_1\bar{X} & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & * & -\check{Q} & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{X}\check{Q}^{-1}\bar{X}
 \end{bmatrix} < 0 \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix}
 \check{\Phi}_{11} & \check{\Phi}_{12} & \check{\Phi}_{13} & \check{\Phi}_{14} & \check{M}_1 & \check{M}_2 & \bar{X}\bar{A}_0^T & \bar{X}\bar{A}_0^T & \bar{U}_1\bar{X} & \bar{X}\bar{H}_1^T \\
 * & \check{\Phi}_{22} & 0 & 0 & \check{N}_1 & 0 & \check{Y}_1^T\bar{B}_0^T & \check{Y}_1^T\bar{B}_0^T & 0 & \check{Y}_1^T\bar{H}_2^T \\
 * & * & \check{\Phi}_{33} & 0 & 0 & \check{N}_2 & \check{Y}_2^T & \check{Y}_2^T & 0 & 0 \\
 * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}_0^T & \bar{D}_0^T & 0 & \bar{H}_3^T \\
 * & * & * & * & -\tau_{1M}^{-1}\check{R}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & -\tau_{2M}^{-1}\check{R}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & \tau_{1M}^{-1}(\check{R}_1 - 2\bar{X}) & 0 & \bar{U}_1\bar{X} & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & \tau_{2M}^{-1}(\check{R}_2 - 2\bar{X}) & \bar{U}_1\bar{X} & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & * & -\check{Q} & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & * & * & (\check{Q} - 2\bar{X})
 \end{bmatrix} < 0 \tag{47}$$

$\check{\Phi}_{14} = \bar{D}_0 - X\bar{\Theta}^T$, $\check{\Phi}_{22} = -\check{N}_1 - \check{N}_1^T$, $\check{\Phi}_{33} = -\check{N}_2 - \check{N}_2^T$, $\check{Q} = \text{diag}\{Q, Q\}$, 则图 1 所示的系统是鲁棒绝对稳定的, K 和 L 可由式 (27) 求取.

定理 7 的证明类似于定理 2, 此处不再重复. 条件 (46) 不是 LMI, 在第 2.2 节中给出的三种方法都可用于处理其中的非线性项. 这里只给出如下推论.

推论 2. 考虑图 1 所示的系统, 假设系统 (1) 中存在形如式 (39) 的范数有界不确定性, 且 $\Delta \in \Omega$, 如果存在合适维数的矩阵 $Q \in \mathcal{L}$ 和 $X > 0$, $\check{R}_i > 0$, $\check{M}_i, \check{N}_i, Y_i, i = 1, 2$ 满足式 (47) (见本页上方), 其中 $\bar{X}, \check{Y}_1, \check{Y}_2, \check{\Phi}_{11}, \check{\Phi}_{12}, \check{\Phi}_{13}, \check{\Phi}_{14}, \check{\Phi}_{22}, \check{\Phi}_{33}, \check{Q}$ 同定理 7 中的定义, 则图 1 所示的系统是鲁棒绝对稳定的, K 和 L 可由式 (27) 求取.

3 仿真算例

例 1. 考虑 Lurie 系统 (1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 1]^T, \quad \varphi(\cdot) \in \mathcal{F}[0, 1]$$

矩阵 A 的特征值为 0 和 -0.9 , 开环系统不稳定, 其

状态响应曲线如图 2 所示.

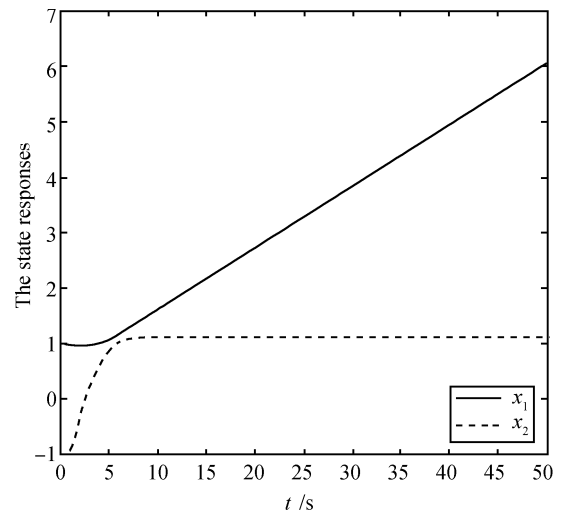


图 2 开环系统状态响应

Fig. 2 State response of the open-loop system

考虑如图 1 所示的 NCS, 采用形如式 (4) 的观测器和形如式 (5) 的控制器, 给定 τ_{1M} 或 τ_{2M} , 利用定理 3 和推论 1 求出的最大允许时延界如表 1 所示.

表 1 给定 τ_{1M} 或 τ_{2M} 由定理 3 和推论 1 求得的最大允许时延界

Table 1 The maximum allowable delay bounds calculated by Theorem 3 and Corollary 1 for given τ_{1M} or τ_{2M}

	给定 τ_{1M} 情况下 τ_{2M} 的上界			给定 τ_{2M} 情况下 τ_{1M} 的上界		
	$\tau_{1M} = 0.1$	$\tau_{1M} = 0.5$	$\tau_{1M} = 1$	$\tau_{2M} = 0.1$	$\tau_{2M} = 1$	$\tau_{2M} = 10$
定理 3	13.978	3.082	1.558	6.071	1.402	0.140
推论 1	4.362	1.335	0.711	4.362	0.711	0.038

由表 1 可以看出推论 1 的条件更加保守. 我们的目的是利用定理 3 设计基于观测器的反馈控制器. 取 $\tau_{1M} = \tau_{2M} = 0.1$, 利用 Matlab 中 LMI 工具箱求解定理 3 中的条件 (30), 可得 $X = \begin{bmatrix} 3.7801 & 0.0365 \\ 0.0365 & 3.3412 \end{bmatrix}$, $Y_1 = [-0.3185 \quad -0.3792]$, $Y_2 = \begin{bmatrix} 1.4596 & 0.0697 \\ -0.1531 & 2.3584 \end{bmatrix}$. 由式 (27) 可以求出 $K = [-0.0825 \quad -0.1126]$, $L = [0.3860 \quad -0.0473]^T$. 所以, 控制量为

$$u(t) = [-0.0825 \quad -0.1126] \hat{x}(t - \tau^{ca})$$

观测器方程为

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.386 & 0 \\ -0.0473 & 0 \end{bmatrix} e(t - \tau^{sc})$$

取非线性函数为饱和函数 $\varphi(\cdot) = sat(\cdot)$, 系统初始状态为 $x_0 = [1 \quad -1]^T$, 观测器的初始状态 $\hat{x}_0 = [0.1 \quad -0.1]^T$, 网络诱导时延在 $[0, 0.1]$ 之间随机产生, 如图 3 所示. 图 4、图 5 和图 6 分别给出了闭环 NCSs 状态响应、观测器的状态响应和控制输入响应. 由图 4 可见在 25 秒左右系统达到稳态, 所以文中提出的方法是有效的.

例 2. 考虑 Lurie 系统 (1), 系数矩阵如式 (38) 所描述, 含有参数不确定性, 其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad -0.5 \quad 0]$$

$$D_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \sin t & \sin t & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t \end{bmatrix}$$

$$U_1 = I$$

$$H_1 = \text{diag}\{0.3, 0.2, 0.5\}$$

$$H_2 = [0.2 \quad 0 \quad 0]^T, \quad H_3 = [0 \quad 0 \quad 0.1]^T$$

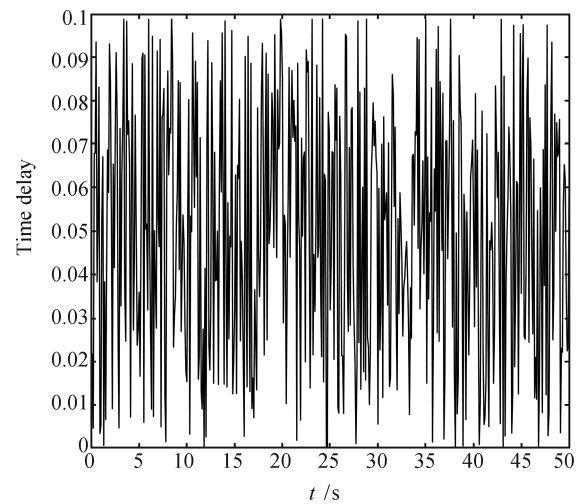


图 3 网络诱导时延

Fig. 3 Networked-induced delay

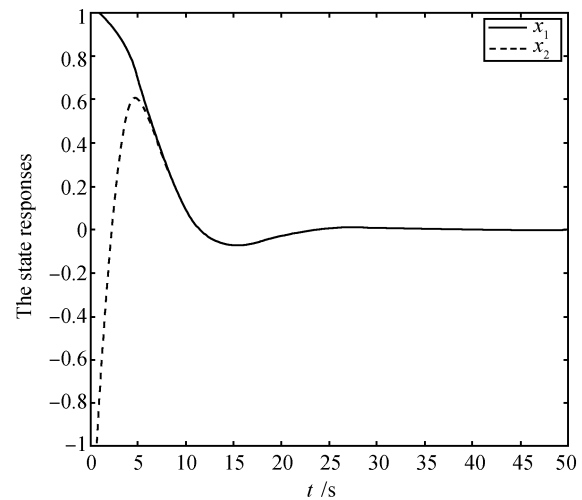


图 4 闭环 NCSs 状态响应曲线

Fig. 4 State response of the closed-loop NCSs

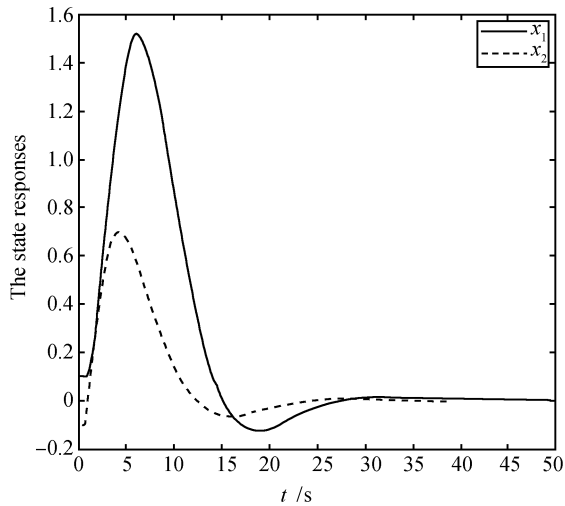


图 5 观测器状态响应曲线

Fig. 5 State response of the observer

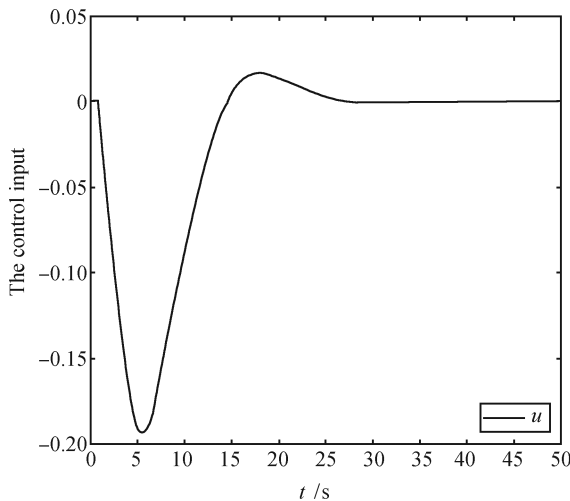


图 6 控制输入

Fig. 6 Control input

显然, $\Delta(t) \in \Omega$ ($k=1, l=1$). 取 $\tau_{1M} = \tau_{2M} = 0.1$, 求解推论 2 中的条件 (47), 得

$$X = \begin{bmatrix} 1.6753 & -0.0075 & 0.0671 \\ -0.0075 & 1.7571 & 0.0212 \\ 0.0671 & 0.0212 & 1.5102 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -1.2125 & -0.05356 & -0.0253 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 2.3852 & 0.8715 & 0.0484 \\ 0.8578 & 1.4909 & 0.0553 \\ 0.7434 & 0.0584 & -0.4296 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2.1324 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2049 & 0.0327 \\ 0 & 0.0327 & 1.7836 \end{bmatrix}$$

显然, $Q \in \mathcal{L}$. 由式 (30) 可以求出

$$K = \begin{bmatrix} -0.7259 & -0.3082 & 0.0198 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.9410 & 0.0723 & 0.3494 \end{bmatrix}^T$$

这表明本文的方法是可行的.

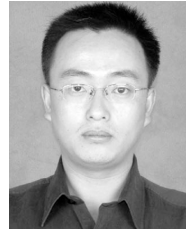
4 结论

本文已经考虑了基于观测器的 Lurie 网络化控制系统的绝对稳定性问题, 给出了时滞依赖的稳定性条件以及控制器设计方法. 证明过程中没有使用模型变换和不等式缩放, 降低了结果的保守性. 在控制器端构造观测器可以对网络诱导时延起到一定的补偿作用, 还可以利用观测器的状态来构造控制器. 分别针对系统存在范数有界不确定性和结构不确定性, 给出了鲁棒稳定性条件和鲁棒控制器的设计方法. 值得说明的是, 文中的结果都是以线性矩阵不等式的形式给出的, 很容易进行数值求解, 但其一般只是充分条件. 因此, 线性矩阵不等式的可解性问题是需要进一步研究的内容.

References

- 1 Seiler P, Sengupta R. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In: Proceedings of the American Control Conference. Arlington, USA: IEEE, 2001. 1491–1496
- 2 Wargui M, Tadjine M, Rachid A. Stability of real time control of an autonomous mobile robot. In: Proceedings of the 5th IEEE International Workshop on Robot and Human Communication. Tsukuba, Japan: IEEE, 1996. 311–316
- 3 Tipsuwan Y, Chow M Y. Gain adaptation of networked mobile robot to compensate QoS deterioration. In: Proceedings of the 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society. Sevilla, Spain: IEEE, 2002. 3146–3151
- 4 Overstreet J W, Tzes A. An Internet-based real-time control engineering laboratory. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 19–34
- 5 Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 138–162
- 6 Tipsuwan Y, Chow M Y. Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(10): 1099–1111
- 7 Yu M, Wang L, Chu T G, Hao F. An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays. In: Proceedings of the 43rd Conference on Decision and Control. Atlantis, Bahamas: IEEE, 2004. 3545–3550
- 8 Yu M, Wang L, Chu T G, Xie G M. Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis, Bahamas: IEEE, 2004. 3539–3544

- 9 Yue D, Han Q L, Chen P. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2004, **51**(11): 640–644
- 10 Gao H J, Chen T W, Lam J. A new delay system approach to network-based control. *Automatica*, 2008, **44**(1): 39–52
- 11 Zhang W A, Yu L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropout. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(9): 1705–1710
- 12 Sun J, Liu G P. Observer-based H_∞ control for a class of nonlinear networked systems. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control. London, UK: IEEE, 2007. 792–797
- 13 Han Q L, Yue D. Absolute stability of Lurie's systems with time-varying delay. *IET Control Theory and Applications*, 2007, **1**(3): 854–859
- 14 Liao X X, Yu P. *Absolute Stability of Nonlinear Control Systems*. Boston: Kluwer Academic, 1993
- 15 Hao F. New conditions on absolute stability of uncertain Lurie's systems and the maximum admissible perturbed bound. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2007, **24**(3): 425–433
- 16 He Y, Wu M, She J H, Liu G P. Robust stability for delay Lurie's control systems with multiple nonlinearities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, **176**(2): 371–380
- 17 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice Hall, 2007
- 18 Balakrishnan V, Feron E, Ghaoui L E. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- 19 Ghaoui L E, Oustry F, Aitrami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1171–1176



赵翔辉 北京航空航天大学硕士研究生。中国人民解放军 96263 部队现役军官。2000 年获内蒙古大学工业自动化专业学士学位。主要研究方向为网络化控制。

E-mail: xianghuizhao@163.com

(**ZHAO Xiang-Hui** Master student at Beijing University of Aeronautics and Astronautics and military officer at

96263 Unit, Chinese People's Liberation Army. He received his bachelor degree from Inner Mongolia University in 2000. His main research interest is networked control systems.)



郝飞 北京航空航天大学副教授。2002 年获北京大学博士学位。主要研究方向为鲁棒控制，稳定性理论和网络化控制。本文通信作者。

E-mail: fhao@buaa.edu.cn

(**HAO Fei** Associate professor at Beijing University of Aeronautics and Astronautics. He received his Ph.D.

degree from Peking University in 2002. His research interest covers robust control, stability theory, and networked control systems. Corresponding author of this paper.)