

# 含各向异性尺度形变数据集匹配问题的 Lie 群方法

应时辉<sup>1</sup> 彭济根<sup>2</sup> 郑开杰<sup>2,3</sup> 乔红<sup>4</sup>

**摘要** 通过分析含各向异性尺度形变的数据集匹配问题, 将尺度约束引入模型, 再结合迭代最近点 (Iterative closest point, ICP) 方法的一般过程, 将含各向异性尺度形变的数据集匹配问题描述为 Lie 群约束优化问题. 通过 Lie 群的局部参数化和局部线性化方法, 将带尺度上下界约束的 Lie 群约束优化问题转化为一系列的二次规划问题, 最终形成了一个完整的匹配迭代算. 该方法不仅具有传统 ICP 方法的快速准确的特点, 而且还能够处理存在大尺度形变的数据集匹配问题. 由于对尺度参数进行约束, 因此比传统方法有更好的鲁棒性. 最后, 为确保匹配的全局性, 给出了一套初始变换的选择方案.

**关键词** 数据集匹配, 各向异性尺度形变, Lie 群, 二次规划  
**中图分类号** O29; TP39

## Lie Group Method for Data Set Registration Problem with Anisotropic Scale Deformation

YING Shi-Hui<sup>1</sup> PENG Ji-Gen<sup>2</sup> ZHENG Kai-Jie<sup>2,3</sup> QIAO Hong<sup>4</sup>

**Abstract** By analyzing the data set registration problem with anisotropic scale deformation, we introduced the constraints to the model. Combining with the procedure of traditional iterative closest point (ICP) method, the registration problem was described as a constrained optimization problem. Using parameterized method by Lie group and quadric approximation to the objective function, the registration problem was translated into a series of quadratic programming problems. Then, a novel scale-registration algorithm was proposed. The numerical simulations showed that such method not only was rapid and accurate as the traditional ICP method, but also could deal with the registration problem with large scale deformation. By introducing the constraints to the scale parameters, the algorithm was more robust. A way for choosing the initial transformations was proposed to assume the global registration.

**Key words** Data set registration, anisotropic scale deformation, Lie group, quadratic programming

数据集匹配问题是从计算机视觉和图像处理等领域中抽象出来的一类非常重要的数学问题, 而迭代最近点 (Iterative closest point, ICP) 方法自从 20 世纪 90 年代初由 Besl 与 McKay<sup>[1]</sup>、Chen 与 Medioni<sup>[2]</sup> 和 Zhang<sup>[3]</sup> 各自独立地提出后已经成为匹配问题的一个最基本并占有统治地位的方法. 之后的大量工作主要集中在以下三个方面: 1) 提高匹配算法速度. 如 Fitzgibbon<sup>[4]</sup> 的运用 Levenberg-Marquardt 方法的匹配算法, Jost 等<sup>[5]</sup> 的运用由粗到精的多分辨率技术的邻域搜索 ICP 方法等. 2) 提高算法鲁棒性. 如 Lee 等<sup>[6]</sup> 提出一个测度用来估计 ICP 方法的可靠性, 而 Sharp 等<sup>[7]</sup> 提出了不变特征方法, 降低了 ICP 方法陷入局部极小点的概

率, Silva 等<sup>[8]</sup> 综合遗传算法并结合演化度量提高了匹配的精度, 而 Granger 等<sup>[9]</sup> 运用极大熵估计以及模拟退火算法改善了算法的鲁棒性. 3) 延拓算法的适用范围. 原始的 ICP 算法并没有考虑非刚性匹配问题. 而在匹配问题中的尺度变换是经常存在的, 例如, 同一个物体在不同的距离成像下, 其形状具有近似性, 但大小发生了变化. 文献 [10] 考虑了带各向同性尺度伸缩形变的两个数据集之间匹配问题. 虽然算法的鲁棒性不好, 但从模型上将匹配问题进行了质的扩展. 在文献 [11] 中, 通过引入尺度约束, 极大地改善了算法的鲁棒性, 然而正如文中指出的, 无论是文献 [10] 还是文献 [11] 的方法都不能被推广到含各向异性尺度形变的匹配问题当中, 但是这样的问题在实际应用中是大量存在的. 因此, 研究具有各向异性尺度形变的匹配问题不仅具有重要的理论意义, 而且具有广泛的应用价值. 通过研究可以发现, 这样的形变全体构成 Lie 群, 因此, 本文则致力于运用 Lie 群参数化方法来解决这样一类数据集匹配问题.

## 1 数学模型与模型约化

Besl 和 McKay<sup>[1]</sup> 首次描述了刚性匹配问题的一个基于最小二乘的数学模型, 随后 Zha<sup>[10]</sup> 对原模

收稿日期 2008-04-24 收修改稿日期 2008-12-24  
Received April 24, 2008; in revised form December 24, 2008  
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2007CB311002) 资助  
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB311002)  
1. 上海大学理学院数学系 上海 200444 2. 西安交通大学理学院信息与系统科学研究所 西安 710049 3. 福建师范大学数学与计算机科学学院 福州 350007 4. 中国科学院自动化研究所 北京 100190  
1. Department of Mathematics, School of Science, Shanghai University, Shanghai 200444 2. Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 3. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007 4. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00867

型首次引入了各向同性尺度形变参数, 而为了增强算法的鲁棒性, 我们对尺度进行了有效的约束<sup>[11]</sup>.

若假设  $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_x}$  和  $Y = \{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{N_y}$  分别为  $n$  维模型数据集和测试数据集, 其中  $N_x$  和  $N_y$  分别为  $X$  和  $Y$  所含数据点的个数. 则含各向异性尺度形变的匹配问题可描述为如下的最小二乘问题

$$\min_{S \in D^+, R \in SO(n), \mathbf{T} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{z}_l \in Y} \sum_{l=1}^{N_x} \|SR\mathbf{x}_l + \mathbf{T} - \mathbf{z}_l\|^2 \quad (1)$$

其中,  $D^+$  为对角元非负的对角矩阵,  $SO(n)$  为  $n$  维欧氏空间中的特殊正交群 (或旋转群),  $\mathbf{z}_l$  为  $Y$  中离  $SR\mathbf{x}_l + \mathbf{T}$  的最近点. 由文献 [11] 的讨论可知, 若对尺度因子不加合适的约束, 匹配将发生退化情形. 因此, 若记  $C = \{S \in D^+ \mid S^L \leq S \leq S^U\}$ , 其中  $S^L, S^U \in D^+$  为  $S$  的上下界, 为对对角元进行约束后的约束集. 再结合 ICP 方法的一般步骤<sup>[1]</sup>, 可将求解匹配问题的过程分解为如下的两个极小化问题的交替迭代过程:

1) 固定当前平移  $\mathbf{T}^k$ , 旋转  $R^k$  和尺度  $S^k$ , 确定  $Y$  的一个与  $X$  同样大小的子集  $Z^k = \{\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_{N_x}^k\}$ , 使得以下目标函数极小

$$\min_{\mathbf{z}_l \in Y} \sum_{l=1}^{N_x} \|S^k R^k \mathbf{x}_l + \mathbf{T}^k - \mathbf{z}_l\|^2 \quad (2)$$

2) 获得  $Z^k$  后, 寻找下一个旋转  $R^{k+1} \in SO(n)$ , 平移  $\mathbf{T}^{k+1} \in \mathbf{R}^n$  和尺度  $S^{k+1} \in C$  使得以下目标函数极小

$$\min_{S \in C, R \in SO(n), \mathbf{T} \in \mathbf{R}^n} \sum_{l=1}^{N_x} \|SR\mathbf{x}_l + \mathbf{T} - \mathbf{z}_l^k\|^2 \quad (3)$$

众所周知, 在空间几何变换中平移变换往往是比较平凡的. 下面我们通过对齐对应数据集中心的方法将几何变换中的平移部分剔除, 以便简化模型和降低参数空间的维数. 为此, 分别记  $\mathbf{x}_c$  和  $\mathbf{z}_c^k$  为测试数据集  $X$  和第  $k$  步模型数据集对应部分  $Z^k$  的中心, 即  $\mathbf{x}_c = \sum_{l=1}^{N_x} \mathbf{x}_l / N_x$ ,  $\mathbf{z}_c^k = \sum_{l=1}^{N_x} \mathbf{z}_l^k / N_x$ . 由于  $(S^{k+1}, R^{k+1}, \mathbf{T}^{k+1})$  为式 (3) 中目标函数的最小二乘解, 因此有  $S^{k+1}R^{k+1}\mathbf{x}_c + \mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{z}_c^k$ , 于是

$$\mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{z}_c^k - S^{k+1}R^{k+1}\mathbf{x}_c \quad (4)$$

若令  $\tilde{\mathbf{x}}_l = \mathbf{x}_l - \mathbf{x}_c$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_l^k = \mathbf{z}_l^k - \mathbf{z}_c^k$ , 则式 (2) 和 (3) 等价于

$$\min_{\mathbf{z}_l \in Y} \varepsilon(Z) = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \|S^k R^k \tilde{\mathbf{x}}_l - (\mathbf{z}_l - \mathbf{z}_c^{k-1})\|^2 \quad (5)$$

$$\min_{S \in C, R \in SO(n)} e(R, S) = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \|SR\tilde{\mathbf{x}}_l - \tilde{\mathbf{z}}_l^k\|^2 \quad (6)$$

这样, 我们就将 ICP 算法简化为一个只含旋转和尺度参数的优化问题.

## 2 Lie 群参数化与尺度匹配算法

对于目标函数 (5) 的极小化问题, 可以运用非常成熟的凸腔算法<sup>[12]</sup>, 而在 Matlab 中也可由 `dsearchn` 函数直接进行求解. 因此, 在匹配问题的求解过程中, 优化问题 (6) 的求解就成了关键. 针对刚性匹配问题和含各向同性尺度的匹配问题, 该优化问题总可以运用 SVD 分解的技术给出其解析解, 但对于含各向异性尺度形变的匹配问题, 由于对角矩阵与旋转矩阵的非交换性, 再想运用 SVD 方法就不可能了<sup>[11]</sup>. 因此, 需要发展一套新的方法进行求解. 幸运的是, 无论是旋转变换, 还是尺度形变, 它们的全体各自都构成 Lie 群. 而 Lie 群具有一个局部测地结构, 因此, 我们可以在局部利用测定线构造迭代过程, 来求解优化问题 (6). 关于 Lie 群的局部测地结构及其性质可详见文献 [13].

若记  $G$  为一个  $n$  维 Lie 群,  $g$  为它的 Lie 代数, 则对于任意的  $\sigma \in G$ , 都存在某个邻域  $N_\sigma$  使得对于任意的  $\tau \in N_\sigma$  都存在  $u \in g$  满足  $\tau = \sigma \exp(u)$ , 其中  $\exp$  为 Lie 群上的指数映射<sup>[13]</sup>. 特别的, 当  $G$  为矩阵 Lie 群时, 这个指数映射恰是指数矩阵. 进一步, 如果假设  $\{E_i\}_{i=1}^n$  为 Lie 代数  $g$  的一组基, 则存在  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  使得  $u = \sum_{i=1}^n a_i E_i$ , 因此有  $\tau = \sigma \exp(\sum_{i=1}^n a_i E_i)$ . 此时,  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  称为 Lie 群  $G$  的第一典则坐标. 下面就运用 Lie 群的第一典则表示的方法来参数化数据集匹配问题中的问题 (6). 若记  $\mathfrak{d}^+$  和  $\mathfrak{so}(n)$  分别为 Lie 群  $D^+$  和  $SO(n)$  的 Lie 代数,  $\{E_i^s\}_{i=1}^{N_s}$  和  $\{E_i^r\}_{i=1}^{N_r}$  分别为它们的一组基, 易知  $N_s = n$  以及  $N_r = n(n-1)/2$ . 因此在第  $k$  步, 可以构造沿测地线进行的迭代过程

$$S = S^k \exp\left(\sum_{i=1}^{N_s} a_i^s E_i^s\right), R = R^k \exp\left(\sum_{i=1}^{N_r} a_i^r E_i^r\right) \quad (7)$$

若令  $\mathbf{a} = [a_1^s, \dots, a_{N_s}^s, a_1^r, \dots, a_{N_r}^r]^T$ , 则此时极小化问题 (6) 就可等价地写为

$$\min_{\mathbf{a}} e(\mathbf{a}) = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \|S^k \exp\left(\sum_{i=1}^{N_s} a_i^s E_i^s\right) R^k \exp\left(\sum_{i=1}^{N_r} a_i^r E_i^r\right) \tilde{\mathbf{x}}_l - \tilde{\mathbf{z}}_l^k\|^2 \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad S^L \leq S^k \exp\left(\sum_{i=1}^{N_s} a_i^s E_i^s\right) \leq S^U \quad (9)$$

为了求解这样的一个约束优化问题, 我们采用

对目标函数进行局部二次近似的方法, 将含各向异性尺度形变数据集匹配问题转化为一个交替迭代的二次规划问题. 具体地, 由于当  $\mathbf{a}$  充分小时, 有

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N_s} a_i^s E_i^s\right) \approx I + \sum_{i=1}^{N_s} a_i^s E_i^s \quad (10)$$

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N_r} a_i^r E_i^r\right) \approx I + \sum_{i=1}^{N_r} a_i^r E_i^r \quad (11)$$

因此, 目标函数 (8) 就可二次近似为

$$e(\mathbf{a}) \approx \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + 2\mathbf{L}^T \mathbf{a} + C_0 \quad (12)$$

其中,

$$H = [h_{ij}]_{N \times N}, \quad \mathbf{L} = [l_i]_{N \times 1}, \quad C_0 \in \mathbf{R}$$

$$N = N_s + N_r$$

$$h_{ij} = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \langle \mathbf{w}_{il}, \mathbf{w}_{jl} \rangle, \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$l_i = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \langle \mathbf{w}_{il}, \mathbf{w}_{0l} - \tilde{\mathbf{z}}_l \rangle, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{w}_{il} = \begin{cases} S^k R^k \tilde{\mathbf{x}}_l, & i = 0 \\ S^k E_i^s R^k \tilde{\mathbf{x}}_l, & i = 1, \dots, N_s \\ S^k R^k E_{i-N_s}^r \tilde{\mathbf{x}}_l, & i = N_s + 1, \dots, N \end{cases}$$

由于  $C_0$  为常数, 它的大小不影响最优解的求解, 因此不需要进行求解.

接下来, 对约束条件进行简化. 由于  $S \in D^+$  为对角元为正数的对角矩阵, 因此, 式 (9) 等价于

$$(S^K)^{-1} S^L \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n s_i E_i^s\right) \leq (S^K)^{-1} S^U \quad (13)$$

若记  $S^k = \text{diag}\{s_1^k, \dots, s_n^k\}$ ,  $S^L = \text{diag}\{s_1^L, \dots, s_n^L\}$  和  $S^U = \text{diag}\{s_1^U, \dots, s_n^U\}$ , 则进一步有

$$\log(s_i^L/s_i^k) \leq a_i^s \leq \log(s_i^U/s_i^k), \quad i = 1, \dots, N_s \quad (14)$$

因此优化问题 (6) 就近似为以下的二次规划问题

$$\min_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + 2\mathbf{L}^T \mathbf{a} \quad (15)$$

$$\text{s.t. } \log(s_i^L/s_i^k) \leq a_i^s \leq \log(s_i^U/s_i^k), \quad i = 1, \dots, N_s$$

其中, 系数定义如式 (12),  $\mathbf{a} = (a_1^s, \dots, a_{N_s}^s, a_1^r, \dots, a_{N_r}^r)^T \in \mathbf{R}^N$ . 结合 ICP 方法的一般步骤, 得到含各向异性尺度形变的数据集匹配算法如下:

**算法 1** (含各向异性尺度形变的数据集匹配算法).

**步骤 1.** 给定两个数据点集  $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_x}$  和  $Y = \{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{N_y}$ .

**步骤 2.** 给定初值  $S^0, R^0, \mathbf{T}^0$  和精度  $\epsilon > 0$ .

**步骤 3.** 迭代第  $k$  步

**步骤 3.1.** 对  $l = 1, \dots, N_x$ , 通过  $\min_{\mathbf{y}_j \in Y} \|S^k R^k \mathbf{x}_l + \mathbf{T}^k - \mathbf{y}_j\|^2$  求解  $\mathbf{z}_l^k$ ;

**步骤 3.2.** 计算误差  $\epsilon^k = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \|S^k R^k \mathbf{x}_l + \mathbf{T}^k - \mathbf{z}_l^k\|^2$ ;

**步骤 3.3** 通过求解二次规划 (15) 求得  $\mathbf{a}$ ;

**步骤 3.4.**  $S^{k+1} = S^k \exp(\sum_{i=1}^{N_s} a_i^s E_i^s)$ ,  $R^{k+1} = R^k \exp(\sum_{i=1}^{N_r} a_i^r E_i^r)$ ,  $\mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{z}_c^k - S^{k+1} R^{k+1} \mathbf{x}_c$ ;

**步骤 4.** 计算  $\theta = 1 - \epsilon^{k+1}/\epsilon^k$  作为停机准则.

**步骤 4.1.** 若  $\theta \leq \epsilon$ , 则最优解为  $S^* = S^{k+1}$ ,  $R^* = R^{k+1}$  和  $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{k+1}$ ;

**步骤 4.2.** 否则  $k \leftarrow k + 1$ , 转步骤 3.

关于算法 1 的收敛性, 我们有以下结论.

**定理 1.** 由算法 1 构造的误差序列总是单调收敛于一个局部极小值.

**证明.** 设  $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_x}$  和  $Y = \{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{N_y}$  为  $\mathbf{R}^n$  中两个待匹配数据集. 设  $S^k, R^k, \mathbf{T}^k$  和  $Z^k = \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^{N_x}$  分别为第  $k$  步的尺度变换、旋转变换、平移变换和最近点集, 则当前误差由下式给出

$$\epsilon^k = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|S^k R^k \mathbf{x}_i + \mathbf{T}^k - \mathbf{z}_i^k\|^2 \quad (16)$$

迭代后的误差有下式给出

$$e^k = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|S^{k+1} R^{k+1} \mathbf{x}_i + \mathbf{T}^{k+1} - \mathbf{z}_i^k\|^2 \quad (17)$$

由定义易证  $e^k \leq \epsilon^k$ . 同样, 由于对  $i = 1, \dots, N_x$  有  $\|S^{k+1} R^{k+1} \mathbf{x}_i + \mathbf{T}^{k+1} - \mathbf{z}_i^{k+1}\| \leq \|S^{k+1} R^{k+1} \mathbf{x}_i + \mathbf{T}^{k+1} - \mathbf{z}_i^k\|$

所以  $\epsilon^{k+1} \leq e^k$ , 因而  $0 \leq \dots \leq e^{k+1} \leq \epsilon^{k+1} \leq e^k \leq \epsilon^k \leq \dots$ , 即, 序列  $\{\epsilon^k\}_{k \geq 1}$  是单调减的且下有界. 因此, 该算法收敛到误差函数的局部极小值.  $\square$

由上述定理可以看出: 我们得到的最优点仅仅是局部最优点. 因此要使算法 1 取得全局匹配, 需要将初始匹配选取在全局极小点附近. 但全局极小点是未知的, 因此, 如何预估这个初值匹配就成为获取全局匹配的一个关键问题. 接下来我们针对含各向异性尺度形变的匹配问题给出一套初始匹配参数 (特别是初始尺度) 的选择方案.

给定数据集  $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_x}$  和  $Y = \{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{N_y}$ . 它们的协方差矩阵分别记为  $M_X = \sum_{i=1}^{N_x} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c)^T$  和  $M_Y = \sum_{j=1}^{N_y} (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_c)(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_c)^T$ . 其中,  $\mathbf{x}_c$  和  $\mathbf{y}_c$  表示数据集  $X$  和  $Y$  的中心. 记  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  和  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$  为  $M_X$  和  $M_Y$  的特征值,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  和  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  分别为其对应的单位特征向量. 由数据集的空间分布特征, 可以选择初始尺度形变为

$$s_i^0 = \sqrt{\frac{\mu_i}{\lambda_i}} \quad (18)$$

尺度约束一般可取为  $s_i^L = 0.95s_i^0$ ,  $s_i^U = 1.05s_i^0$ . 另外, 选取初始选旋转  $R^0$  为

$$R^0 = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n] [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]^{-1} \quad (19)$$

而初始的平移  $\mathbf{T}^0$  可取为两个数据集中心的变换  $\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c$ .

### 3 数值实验

数值实验分为两个部分: 1) 2 维数据集的匹配. 在这一部分, 我们分别用 Besl 和 Mckay's ICP 方法<sup>[1]</sup>、Zha 的方法<sup>[10]</sup>、单尺度 ICP 方法<sup>[11]</sup> 和算法 1 对同一组数据集进行匹配实验, 目的是对四种方法获得的结果进行比较. 2) 3 维区域数据集之间的匹配. 我们针对 3 维点云数据对单尺度 ICP 方法和算法 1 进行比较. 所有的程序都基于 Matlab 6.5, Pentium IV 3.0 GHz CPU, 512 M RAM.

#### 3.1 2 维数据集匹配的比较实验

我们采用 MPEG7 (Part B) 中的 20 组典型形

状作为实验数据集. 分别用 Besl 和 Mckay 的 ICP 方法<sup>[1]</sup>、Zha 的方法<sup>[10]</sup>、单尺度 ICP 方法<sup>[11]</sup> 以及算法 1 进行匹配, 匹配结果如表 1 和图 1 (见下页) 所示.

从表 1 中可以看出, 前两种方法匹配效果显然是有缺陷的, 其中 Besl & Mckay 的 ICP 方法不能处理带尺度变化的数据集匹配问题 (见表 1 中的第 1, 3, 4, 6, 7, 11, 13, 16, 17, 18 和 20 组数据), 而 Zha 的方法在第 1, 6, 18 和 20 组数据的误差为 0, 这是因为匹配的尺度为 0, 模型数据集退化成一个点 (见图 1 中的对应匹配结果), 因此, 这样的匹配是不成功的, 这也是为什么引入尺度约束的原因. 后两种方法的效果是比较好的, 但显然后者更佳. 这一点也可以从表 1 中的 RMS 误差所得到.

#### 3.2 3 维带噪声的区域数据集之间的匹配

在这一部分, 我们用 Stanford 3D ScanningRepository<sup>1</sup> 来对算法进行比较. 由于 Besl & Mckay 的方法和 Zha 的方法有缺陷, 因此, 仅对单尺度 ICP 方法<sup>[11]</sup> 和算法 1 进行比较. 其中的数据集采用 Stanford Bunny 数据集集中的点集 bun000 和

表 1 对 2 维数据集匹配的四中 ICP 方法比较

Table 1 Comparisons of four methods to 2D data set registration problem

组	Besl 的方法	Zha 的方法		单尺度 ICP 方法		算法 1	
	RMS 误差	尺度	RMS 误差	尺度	RMS 误差	尺度	RMS 误差
(1)	766.8432	0.0000	0.0000	1.4468	21.7210	[1.4326, 1.4610]	21.4940
(2)	0.6104	0.9988	0.6058	0.9992	0.6852	[0.9991, 0.9985]	0.5908
(3)	54.1790	0.3292	1.1462	0.3281	1.1430	[0.3329, 0.3231]	1.1151
(4)	58.0894	0.5460	3.0012	0.5456	2.9227	[0.5578, 0.5372]	2.8016
(5)	0.6076	1.0002	0.6071	1.0002	0.6071	[1.0004, 0.9998]	0.6070
(6)	6.4295	0.0000	0.0000	1.2210	2.1112	[1.1815, 1.3338]	1.3251
(7)	7.4156	1.1158	3.9865	1.1247	4.0463	[1.1710, 1.1311]	3.8603
(8)	0.5664	1.0002	0.5662	1.0002	0.5662	[1.0015, 0.9992]	0.5599
(9)	2.7829	0.9647	3.2680	0.9485	3.1991	[0.9455, 0.9908]	2.5916
(10)	1.1440	0.9992	1.1455	0.9992	1.1455	[1.0003, 0.9990]	1.1429
(11)	34.3592	0.7108	4.1872	0.7232	4.2789	[0.6977, 0.7195]	3.5653
(12)	0.5626	1.0025	0.6428	1.0051	0.6950	[1.0008, 0.9994]	0.5600
(13)	3.0638	0.8962	1.6865	0.8815	1.5425	[0.8597, 0.8868]	1.5230
(14)	0.5694	0.9999	0.5693	0.9999	0.5693	[0.9997, 1.0002]	0.5682
(15)	8.2065	0.9692	7.9824	0.9499	7.7068	[0.8834, 1.1747]	4.6336
(16)	29.6675	0.7238	7.2896	0.7074	6.7918	[0.6715, 0.7517]	6.3816
(17)	126.5238	0.3324	0.8276	0.3314	0.6954	[0.3242, 0.3330]	0.6399
(18)	16.2802	0.0000	0.0000	1.9460	12.4341	[1.8487, 1.9975]	12.1230
(19)	8.4801	1.1225	7.3482	1.1628	8.2105	[1.1722, 1.1589]	4.8538
(20)	3.6876	0.0000	0.0000	1.2419	1.3547	[1.2470, 1.3433]	1.3412

<sup>1</sup><http://www-graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>.

模型 数据集	测试 数据集	匹配结果				模型 数据集	测试 数据集	匹配结果			
		Besl	Zha	单尺度	算法 1			Besl	Zha	单尺度	算法 1

图 1 模型数据集、测试数据集位姿与四种算法的匹配结果

Fig. 1 Configurations of model data set and test data set, and registration results of four algorithms

bun045 数据集、Dragon 数据集中的 dragonStandRight\_0 和 dragonStandRight\_48 数据集, 以及 Happy Buddha 中的 happyStandRight\_0 和 happyStandRight\_48 数据集. 为展示算法 1 在具有不同尺度的数据集匹配时的优越性, 首先将点集 bun000, dragonStandRight\_0 和 happyStandRight\_0 分别乘以因子  $\mu = 0.5 + N \times 0.02$ ,  $N = 0, 1, \dots, 75$ , 以及分别乘以大尺度  $\mu = 10, 100$  后生成 78 组数据点集, 然后将这些点集作为模型数据集分别与作为测试数据集的 Bun045, dragonStandRight\_48 和 happyStandRight\_48 进行匹配. 为了使误差有可比性, 采用下面修正的 RMS 误差:

$$RMS = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|S^* R^* \mathbf{x}_i + \mathbf{T}^* - \mathbf{z}_i^*\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

其中,  $R^*$ 、 $\mathbf{T}^*$  和  $S^*$  分别表示最终迭代获得旋转、平移和尺度, 而  $\mathbf{z}_i^*$  为 bun000, dragonStandRight\_0 和 happyStandRight\_0 中与  $S^* R^* \mathbf{x}_i + \mathbf{T}^*$  最近的点.

取精度  $\epsilon = 0.001$ , 对于 Bun000 和 Bun045 数据集的初始变换进行估计. 表 2 (见下页) 列出了当

$\mu = 0.5, 1.0, 2.0, 10.0$  和  $100$  时的初始变换, 经过迭代得到匹配结果如表 3 和图 2 ( $\mu = 0.5$  时算法 1 的匹配结果) (见下页) 所示.

从表 3 中易见: 算法 1 在保持同单尺度匹配算法计算效率和速度的同时, 还提高了匹配精度. 这一点是由于多引入了自由参数, 从而提高了匹配精度. 特别地, 由于对引入的参数加入有效的约束, 因此, 算法对参数的鲁棒性是非常好的. 这一点, 也可从图 2 中看出. 进一步的验证于 dragonStandRight\_0 和 dragonStandRight\_48, happyStandRight\_0 和 happyStandRight\_48 数据集. 其结果如表 4 和表 5 以及图 3 和图 4 (见第 873 页) 所示.

#### 4 结论与展望

本文通过引入带约束的各向异性的尺度因子, 对含各向异性尺度形变的数据集匹配问题进行了研究, 提出了新的尺度匹配方法. 具体地, 我们首先通过将尺度约束引入模型, 结合 ICP 的一般步骤将原问题转化为 Lie 群上的约束优化问题; 再利用 Lie 群参数化方法和对目标函数的二次逼近, 将原匹配问题

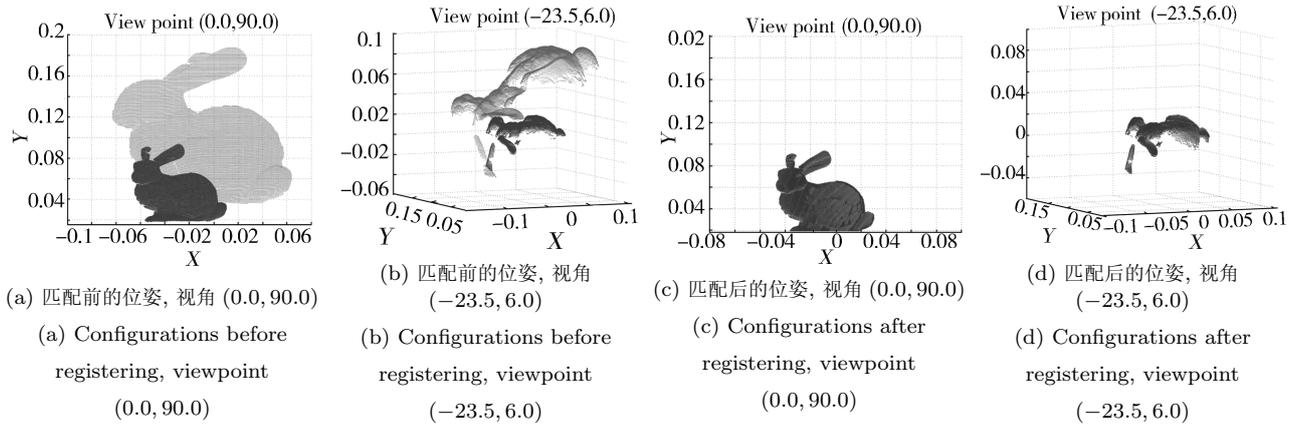


图 2  $\mu = 0.5$  时 Bunny 数据的模型数据集、测试数据集位姿与匹配结果

Fig. 2 Configurations of model data set, test data set, and registration results of Bunny data set

表 2 Bunny 数据在不同尺度下匹配的初始变换

Table 2 The initial configurations of Bunny data set with different scales

$\mu$	旋转轴	旋转角	平移	尺度 $s$	尺度 $S$
0.5	$[-0.0534 \ 0.4425 \ -0.0602]$	$25.7695^\circ$	$[-0.0437 \ -0.0477 \ -0.0392]$	0.5046	$[0.4753 \ 0.4883 \ 0.5461]$
1.0	$[-0.0534 \ 0.4425 \ -0.0602]$	$25.7695^\circ$	$[-0.0057 \ 0.0006 \ -0.0214]$	1.0092	$[0.9506 \ 0.9766 \ 1.0923]$
2.0	$[-0.0534 \ 0.4425 \ -0.0602]$	$25.7695^\circ$	$[-0.0797 \ 0.0972 \ 0.0142]$	2.0185	$[1.9013 \ 1.9532 \ 2.1845]$
10.0	$[-0.0534 \ 0.4425 \ -0.0602]$	$25.7695^\circ$	$[-0.2718 \ 0.8699 \ 0.2993]$	10.092	$[9.5064 \ 9.7668 \ 10.923]$
100.0	$[-0.0534 \ 0.4425 \ -0.0602]$	$25.7695^\circ$	$[-2.4337 \ 9.5625 \ 3.5061]$	100.92	$[95.064 \ 97.668 \ 109.23]$

表 3 Bunny 数据在不同尺度下数据集的匹配结果

Table 3 Registration results of Bunny data set with different scales

$\mu$	单尺度匹配算法				算法 1			
	尺度	RMS 误差	步数	时间 (s)	尺度	RMS 误差	步数	时间 (s)
0.5	0.48999	0.00194	61	82.564	$[0.48956 \ 0.48995 \ 0.49046]$	0.00186	65	88.453
1.0	0.97998	0.00194	30	40.053	$[0.97912 \ 0.97990 \ 0.98092]$	0.00186	31	45.249
2.0	1.95996	0.00194	39	53.865	$[1.95824 \ 1.95980 \ 1.96184]$	0.00186	35	45.896
10.0	9.79982	0.00194	43	61.187	$[9.79122 \ 9.79902 \ 9.80922]$	0.00186	42	59.974
100.0	97.9982	0.00194	43	63.756	$[97.9122 \ 97.9902 \ 98.0922]$	0.00186	45	66.165

表 4 Dragon 数据在不同尺度下数据集的匹配结果

Table 4 Registration results of Dragon data set with different scales

$\mu$	单尺度匹配算法				算法 1			
	尺度	RMS 误差	步数	时间 (s)	尺度	RMS 误差	步数	时间 (s)
0.5	0.49012	0.00581	49	42.405	$[0.46882 \ 0.49995 \ 0.50136]$	0.00532	55	50.543
1.0	0.98024	0.00581	52	48.267	$[0.93764 \ 0.99990 \ 1.00272]$	0.00532	61	55.841
2.0	1.96048	0.00581	41	38.418	$[1.87528 \ 1.99980 \ 2.00544]$	0.00532	48	45.962
10.0	9.80242	0.00581	55	52.561	$[9.37641 \ 9.99903 \ 10.0272]$	0.00532	57	55.356
100.0	98.0242	0.00581	55	55.026	$[93.7641 \ 99.9903 \ 100.272]$	0.00532	63	58.144

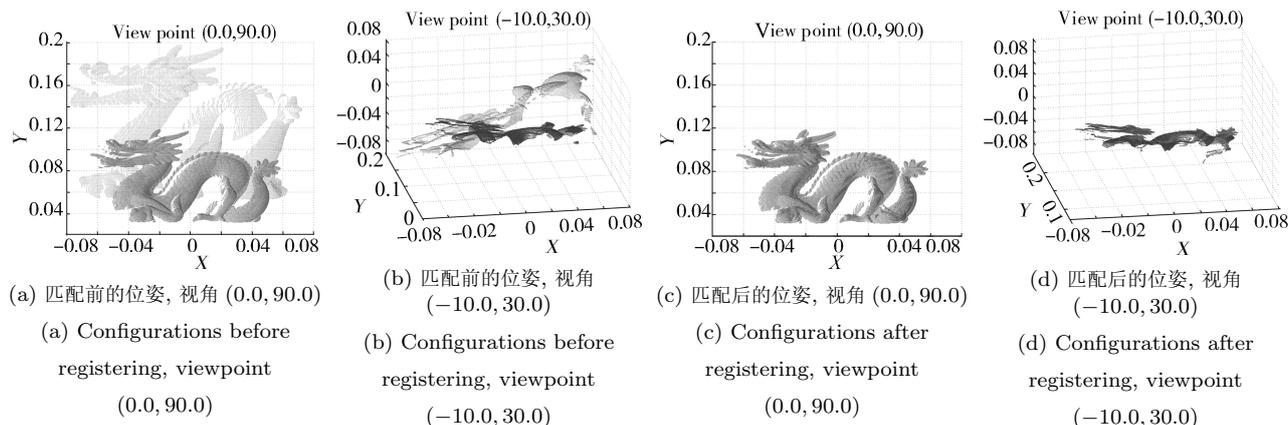


图 3 Dragon 数据的模型数据集、测试数据集位姿与匹配结果

Fig. 3 Configurations of model data set, test data set, and registration results of Dragon data set

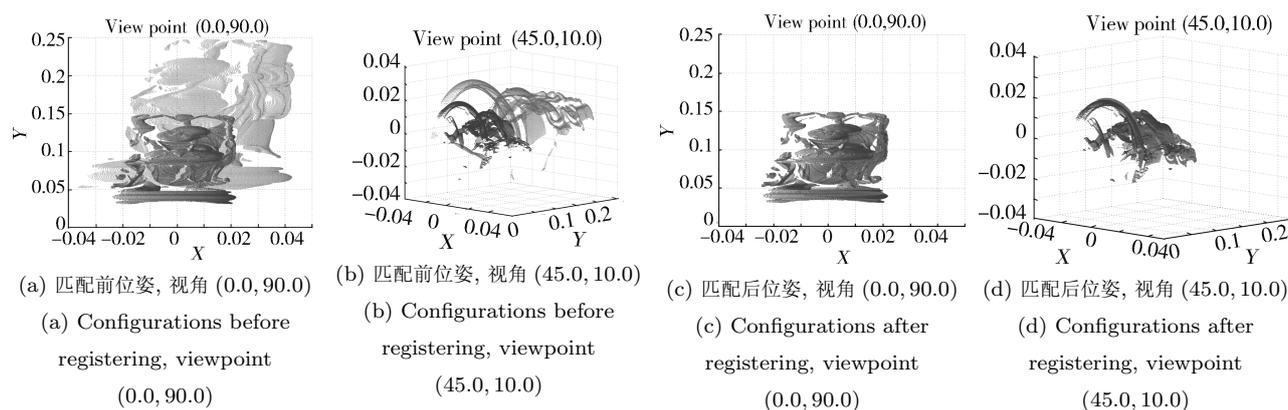


图 4 HappyBuddha 数据的模型数据集、测试数据集位姿与匹配结果

Fig. 4 Configurations of model data set, test data set, and registration results of HappyBuddha data set

表 5 HappyBuddha 数据在不同尺度下数据集的匹配结果

Table 5 Registration results of HappyBuddha data set with different scales

$\mu$	尺度	单尺度匹配算法			算法 1				
		RMS 误差	步数	时间 (s)	尺度	RMS 误差	步数	时间 (s)	
0.5	0.49009	0.00332	55	89.847	[0.48972 0.49011 0.49042]	0.00314	62	92.758	
1.0	0.98018	0.00332	59	96.217	[0.97944 0.98022 0.98084]	0.00314	69	100.419	
2.0	1.96036	0.00332	52	85.624	[1.95888 1.96044 1.96168]	0.00314	59	88.174	
10.0	9.80183	0.00332	62	98.825	[9.79442 9.80224 9.80841]	0.00314	66	93.754	
100.0	98.0183	0.00332	51	81.467	[97.9442 98.0224 98.0841]	0.00314	58	86.675	

转化为一系列的二次规划问题. 从而形成了新的尺度匹配迭代算法. 所做的数值实验证明, 该方法不仅保持了经典 ICP 方法的快速的特点, 而且还能够处理存在大尺度形变的数据集匹配问题. 此外, 由于比传统 ICP 方法多引入了自由变量, 因此匹配具有更好的精度.

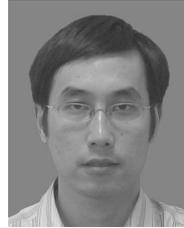
由于非刚性匹配问题的主体部分是仿射匹配问题, 而仿射匹配问题一定程度上可由本文所提出的

尺度匹配问题来表达, 因此, 本文也给出了一个求解非刚性匹配问题的一个主题步骤. 在后续的工作中, 我们需要结合局部非刚性变换的方法, 完善非刚性匹配问题的求解.

### References

1 Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(2): 239–256

- 2 Chen Y, Medioni G. Object modeling by registration of multiple range image. In: Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation. Sacramento, USA: IEEE, 1991. 2724–2729
- 3 Zhang Z Y. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 1994, **13**(2): 119–152
- 4 Fitzgibbon A W. Robust registration of 2D and 3D point sets. *Image and Vision Computing*, 2003, **21**(13-14): 1145–1153
- 5 Jost T, Hugli H. A multi-resolution ICP with heuristic closest point search for fast and robust 3D registration of range images. In: Proceedings of the 4th International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling. Washington D. C., USA: IEEE, 2003. 427–433
- 6 Lee B U, Kim C M, Park R H. An orientation reliability matrix for the iterative closest point algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(10): 1205–1208
- 7 Sharp G C, Lee S W, Wehe D K. ICP registration using invariant features. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, **24**(1): 90–102
- 8 Silva L, Bellon O R P, Boyer K L. Precision range image registration using a robust surface interpenetration measure and enhanced genetic algorithms. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(5): 762–776
- 9 Granger S, Pennec X. Multi-scale EM-ICP: a fast and robust approach for surface registration. In: Proceedings of the 7th European Conference on Computer Vision. Copenhagen, Denmark: Springer, 2002. 69–73
- 10 Zha H B, Ikuta M, Hasegawa T. Registration of range images with different scanning resolutions. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Nashville, USA: IEEE, 2000. 1495–1500
- 11 Ying S H, Peng J G, Du S Y, Qiao H. A scale stretch method based on ICP for 3D data registration. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, to be published
- 12 Barber C B, Dobkin D P, Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1996, **22**(4): 469–483
- 13 Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. New York: Academic Press, 2001



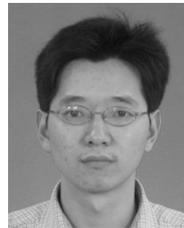
**应时辉** 上海大学理学院数学系讲师。2008 年于西安交通大学理学院获理学博士学位。主要研究方向为模式识别与计算机视觉。E-mail: shyings@shu.edu.cn  
(**YING Shi-Hui** Lecturer at the School of Science of Shanghai University. He received his Ph.D. degree in science from Xi'an Jiaotong University in 2008. His research interest covers pattern recognition and computer vision.)



**彭济根** 西安交通大学理学院信息与系统科学研究所教授。主要研究方向为非线性泛函分析, 机器学习和数据集匹配。本文通信作者。

E-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn

(**PENG Ji-Gen** Professor at the Institute of Information and System Science, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers nonlinear functional analysis, machine learning, and data set registration. Corresponding author of this paper.)



**郑开杰** 西安交通大学理学院应用数学系博士研究生。主要研究方向为机器学习。E-mail: kaijiezheng@gmail.com  
(**ZHENG Kai-Jie** Ph.D candidate in the Department of Applied Mathematical, Xi'an Jiaotong University. His main research interest is machine learning.)



**乔红** 中国科学院自动化研究所复杂系统与智能科学重点实验室研究员。主要研究方向为智能机器人, 模式识别, 机器学习和数据挖掘。

E-mail: hong.qiao@mail.ia.ac.cn

(**QIAO Hong** Professor in the Key Laboratory of Complex Systems and Intelligent Science, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. Her research interest covers intelligent robots, pattern recognition, machine learning, and data mining.)