第 35 卷 第 5 期　　　自 动 化 学 报　　　Vol. 35, No. 5
2009 年 5 月　　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　　May, 2009

离散传递函数正实性与连续传递函数有限频率正实性的代数判据

周 彬 [1]　　段广仁 [1]

摘 要　正实性是控制理论中最重要的概念之一. 许多控制目标的实现皆依赖于某些传递函数的正实性. 相比于正实性, 有限频率正实性则是较近提出的概念, 并且亦在控制理论中找到了大量应用. 为了判断离散标量传递函数的正实性和连续标量传递函数的有限频率正实性, 本文分别给出了一种易于计算的简洁代数判据. 现有的判断连续标量传递函数严格正实性的代数判据可以看作是本文结果的特殊情况. 数值算例验证了方法的有效性.

关键词　离散传递函数, 正实性, 连续传递函数, 有限频率正实性, 代数判据
中图分类号　TP13

Algebraic Criteria for Positive Realness of Discrete Transfer Function and Finite Frequency Positive Realness of Continuous Transfer Function

ZHOU Bin[1]　　DUAN Guang-Ren[1]

Abstract　Positive realness of a transfer function is one of the most important notions in control theory. The achievements of many control objectives rely on the positive realness of certain transfer functions. Compared with positive realness, finite frequency positive realness is a new notion, and it also finds some important applications in control theory. In order to verify the positive realness of scalar discrete transfer function and the finite frequency positive realness of continuous scalar transfer function, this paper presents a simple algebraic criterion. Some existing results can be regarded as special cases of the presented results. Numerical examples show the effectiveness of the proposed approach.

Key words　Discrete transfer function, positive realness, continuous transfer function, finite frequency positive realness, algebraic criterion

正实传递函数 (或正实系统) 是控制理论中重要的概念之一. 在许多控制问题中, 诸如在网络稳定性分析[1]、绝对稳定性分析[2] 和自适应控制[3] 中, 系统的正实性都起着关键性的作用. 由于正实性的重要性, 许多研究者讨论了各种各样的分析和设计问题. 例如, 对于正实传递函数 (系统) 的分析, 著名的 Kalman-Yakukobovich-Popov (KYP) 引理给出了判断用状态空间描述的系统的正实的充要条件[2]; 文献 [4] 利用相角和幅值条件讨论了判断正实性的频率方法; 文献 [5−6] 给出了单输入单输出系统的简便代数判据, 并推广到了多输入系统[7] 等. 对于正实系统的设计, 文献 [8] 考虑了设计输出反馈使得给定系统是严格正实的; 文献 [9] 考虑了设计观测器和输出反馈使得闭环系统对新的输出是严格正实的; 文献 [10] 考虑了正实控制的多乘子设计方法; 文献 [11] 则考虑了带有不确定性线性系统的正实控制. 近些年来, 对于线性系统发展起来的理论和方法已经相应地被推广到非线性系统[12]、随机系统[13] 和广义系统[14].

传递函数的普通正实性是定义在所有频率上的, 即对任意频率, 传递函数都具有正实部. 考虑到实际系统由于传感器和执行器都不能工作在所有的频率范围内, 而只能工作在有限频率范围内, 有必要考虑有限频率正实性. 关于有限频率正实性, 控制界已经有比较详细的讨论, 特别是文献 [15] 给出了五个支持讨论有限频率正实性的理由, 并且文献 [15] 还较为完备地将普通正实性的概念和著名的 KYP 引理推广到有限频率正实性的情况, 并结合实际控制系统讨论了其应用前景.

对于给定传递函数, 虽然可以用著名的 KYP 引理和有限频率 KYP 引理[15] 来判断其是否严格正实和有限频率正实, 但由于需要线性矩阵不等式求解器, 在有些场合并不实用[6]. 并且对于标量连续传递函数, 可以有更简单的判据来判断其是否是严格正实的[5−6]. 但据作者所知, 关于判断离散标量传递函数正实性的代数判据和连续标量传递函数有限频率

收稿日期 2008-04-02　收修改稿日期 2008-09-19
Received April 2, 2008; in revised form September 19, 2008
国家自然科学基金重大国际合作项目 (60710002), 长江学者创新团队发展计划资助
Supported by the Major Program of National Natural Science Foundation of China (60710002) and Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University
1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150001
1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00561

正实性的代数判据并没有相关的结果. 本文旨在对上述两个问题进行研究. 对于前一个问题, 本文给出了一种形式上非常简洁的代数判据, 并且容易看出该判据从形式上与已知文献中报道的连续标量传递函数正实性判据具有对偶的形式. 但由于离散系统不同于连续系统, 本文结果的导出明显较已知文献复杂. 对于后一个问题, 本文也给出了一个形式和计算都很简单的代数判据. 本文指出, 如果令有限频率上限 $\omega_{\max}$ 趋于无穷大, 则从本文的结果可以导出文献 [5] 中报道的判断普通正实性的代数判据. 值得指出的是, 本文所用的方法不同于文献 [5] 所用的方法. 为了验证结论的正确性和有效性, 本文亦给出了若干数值例子进行说明.

除了特殊说明, 本文中符号 $|A|$ 表示矩阵 A 的行列式.

1 主要结果

1.1 离散传递函数严格正实的代数判据

离散传递函数严格正实的定义如下.

定义 1. 给定离散标量传递函数 $h(z)$ 被称为是严格正实的, 如果

1) $h(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 之外是解析的 (此处 $|z|$ 表示复数 z 的模), 即单位圆外及圆上没有极点;

2) 对于任意 $0\le\omega\le 2\pi$, 成立 $h(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+h(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})>0$.

为了证明本小节的主要结果, 需要如下引理.

引理 1[16]**.** 设矩阵 A, B, C 和 D 为具有适当维数的给定矩阵, 并且 D 和 A 是非奇异的, 那么

$$|D||A-BD^{-1}C|=|A||D-CA^{-1}B| \tag{1}$$

特别地, 在式 (1) 中令 $D=-I_m$ 和 $A=-I_n$, 得到

$$|I+BC|=|I+CB| \tag{2}$$

本小节的主要结果表述如下.

定理 1. 令 $h(z)=d+\boldsymbol{c}(zI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$ 为给定离散传递函数, 那么 $h(z)$ 是严格正实的当且仅当: 1) 矩阵 A 是 Schur 稳定的, 即 A 所有的特征值的模都严格小于 1; 2) $d>0$; 3) 矩阵 $\mathscr{A}=A-(1/d)\boldsymbol{bc}$ 是 Schur 稳定的; 4) 矩阵 $A_{\rm ct}\mathscr{A}_{\rm ct}$ 没有负实特征值, 这里

$$A_{\rm ct}=(A-I)(A+I)^{-1} \tag{3}$$

$$\mathscr{A}_{\rm ct}=(\mathscr{A}-I)(\mathscr{A}+I)^{-1} \tag{4}$$

证明. 矩阵 A 的 Schur 稳定性是 $h(z)$ 正实的必要条件. 根据著名的 KYP 引理, 传递函数 $h(z)$ 严格正实当且仅当存在矩阵 $P>0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^{\rm T}PA-P & A^{\rm T}P\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}^{\rm T} \\ \boldsymbol{b}^{\rm T}PA-\boldsymbol{c} & -(d+d^{\rm T}-\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}) \end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

显然, 由 Schur 补引理, 不等式 (5) 暗含 $2d-\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}>0$, 即 $d>0$, 以及

$$\begin{aligned} 0 > {} & A^{\rm T}PA-P+\frac{(A^{\rm T}P\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}^{\rm T})(\boldsymbol{b}^{\rm T}PA-\boldsymbol{c})}{2d-\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}} = \\ & \mathscr{A}^{\rm T}P\mathscr{A}-P+\frac{1}{d}\boldsymbol{c}^{\rm T}\boldsymbol{b}^{\rm T}PA+\frac{1}{d}A^{\rm T}P\boldsymbol{bc}- \\ & \frac{\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}}{d^2}\boldsymbol{c}^{\rm T}\boldsymbol{c}+\frac{(A^{\rm T}P\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}^{\rm T})(\boldsymbol{b}^{\rm T}PA-\boldsymbol{c})}{2d-\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}} = \\ & \mathscr{A}^{\rm T}P\mathscr{A}-P+\frac{1}{2d-\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}}NN^{\rm T} \end{aligned}$$

其中

$$N=A^{\rm T}P\boldsymbol{b}+\frac{d-\boldsymbol{b}^{\rm T}P\boldsymbol{b}}{d}\boldsymbol{c}$$

因此, 为了保证式 (5) 成立, 下式必须成立

$$\mathscr{A}^{\rm T}P\mathscr{A}-P<0$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, 上式即表明矩阵 $\mathscr{A}=A-(1/d)\boldsymbol{bc}$ 是 Schur 稳定的.

令 $\hat{h}(z)=\boldsymbol{c}(zI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, 则根据定义 1, 传递函数 $h(z)$ 是严格正实的当且仅当下式成立

$$\frac{1}{2}\left(h(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+h(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\right)=d+\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)>0 \tag{6}$$

其中 $0\le\omega\le 2\pi$. 为了对上式进行化简, 需要用到如下关于传递函数的一个著名的表征

$$\boldsymbol{c}(zI-A)^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{|zI-A+\boldsymbol{bc}|-|zI-A|}{|zI-A|} \tag{7}$$

事实上, 恒等式 (7) 可以通过对恒等式 (1) 进行代换 $(A,B,C,D)\mapsto(zI-A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},1)$ 得到. 那么利用式 (7), 有

$$\begin{aligned} & 1+\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)= \\ & 1+\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{c}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}I-A)^{-1}\boldsymbol{b}\right)= \\ & 1+\mathrm{Re}\left(\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}I-A+\boldsymbol{bc}|-|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}I-A|}{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}I-A|}\right)= \\ & \mathrm{Re}\left(\frac{|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}I-A||\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}I-A+\boldsymbol{bc}|}{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}I-A||\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}I-A|}\right)= \\ & \mathrm{Re}\left(\frac{|I+A^2-A\boldsymbol{bc}-2A\cos(\omega)+\boldsymbol{bc}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}|}{|I+A^2-2A\cos(\omega)|}\right)= \\ & \mathrm{Re}\left(\frac{|A_t+\boldsymbol{bc}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}|}{|I+A^2-2A\cos(\omega)|}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

这里 $A_t=I+A^2-A\boldsymbol{bc}-2A\cos(\omega)$. 通过对恒等式 (1) 实行代换 $(A,B,C,D)\mapsto(A_t,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, 可以得到

$$\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)|A_t+\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\boldsymbol{c}|=|A_t|\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\boldsymbol{c}A_t^{-1}\boldsymbol{b}\right)$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(|A_t+\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\boldsymbol{c}|\right)=\\&\quad\mathrm{Re}\left(\frac{|A_t|\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\boldsymbol{c}A_t^{-1}\boldsymbol{b}\right)}{(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}\right)=\\&\quad\mathrm{Re}\left(|A_t|\left(1+\boldsymbol{c}A_t^{-1}\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)\right)\end{aligned}\tag{9}$$

通过对恒等式 (1) 进行代换 $(A,B,C,D)\mapsto(A_t,\boldsymbol{b}\cos(\omega),\boldsymbol{c},-1)$, 可得

$$|A_t+\boldsymbol{bc}\cos(\omega)|=|A_t|\left(1+\boldsymbol{c}A_t^{-1}\boldsymbol{b}\cos(\omega)\right)\tag{10}$$

将方程 (10) 代入到方程 (9) 中, 并进行化简得到

$$\mathrm{Re}\left(|A_t+\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\boldsymbol{c}|\right)=|A_t+\boldsymbol{bc}\cos(\omega)|\tag{11}$$

将式 (11) 代入到式 (8), 并利用恒等式 (2) 有

$$\begin{aligned}1+\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)&=\frac{|Y-A\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bc}\cos(\omega)|}{|I+A^2-2A\cos(\omega)|}=\\&|I-Y^{-1}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{bc}|=\\&|1-\boldsymbol{c}Y^{-1}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{b}|=\\&1-\boldsymbol{c}Y^{-1}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

这里 $Y=I+A^2-2A\cos(\omega)$. 因此, 通过再一次利用式 (2), 可以得到如下等式

$$\begin{aligned}&d+\mathrm{Re}(\hat{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}))=\\&\quad d-\boldsymbol{c}Y^{-1}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{b}=\\&\quad d\left(1-\frac{1}{d}\boldsymbol{c}Y^{-1}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad d\left|I-\frac{1}{d}Y^{-1}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{bc}\right|=\\&\quad d\left|Y^{-1}\right|\left|Y-\frac{1}{d}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{bc}\right|\end{aligned}\tag{12}$$

由于矩阵 A 是 Schur 稳定的, 下述关系成立

$$|Y|=|(A-\cos(\omega)I)^2+\sin^2(\omega)I|>0$$

那么从式 (12) 可以推出

$$\begin{aligned}&0<d+\mathrm{Re}(\hat{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}))\\\Leftrightarrow\ &\left|Y-\frac{1}{d}(A-\cos(\omega)I)\boldsymbol{bc}\right|>0\\\Leftrightarrow\ &\left|I+A\mathscr{A}-\cos(\omega)\left(2A-\frac{1}{d}\boldsymbol{bc}\right)\right|>0\\\Leftrightarrow\ &|I+A\mathscr{A}-\cos(\omega)(A+\mathscr{A})|>0\\\Leftrightarrow\ &|R-\theta(A+\mathscr{A})|>0\end{aligned}\tag{13}$$

其中, $R=(I+A)(I+\mathscr{A})$, $\theta=1+\cos(\omega)$. 如果 $\omega=\pi$, 由于矩阵 A 和矩阵 $\mathscr{A}$ 都是 Schur 稳定的, 所以有

$$\begin{aligned}&|I+A\mathscr{A}+\mathscr{A}+A-\theta(A+\mathscr{A})|=\\&|I+A\mathscr{A}+\mathscr{A}+A|=|R|=\\&|I+A||\mathscr{A}+I|>0\end{aligned}\tag{14}$$

这就是说, 不等式 (13) 是恒成立的. 如果 $\omega\neq\pi$, 则有 $\theta>0$, 所以不等式 (13) 等价于

$$\begin{aligned}&0<|R-\theta(A+\mathscr{A})|\\\Leftrightarrow\ &\left|\theta\left(\frac{1}{\theta}R-(A+\mathscr{A})\right)\right|>0\\\Leftrightarrow\ &\left|\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)R-(A+\mathscr{A})+\frac{1}{2}R\right|>0\\\Leftrightarrow\ &\left|\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)R+\frac{(A-I)(\mathscr{A}-I)}{2}\right|>0\\\Leftrightarrow\ &|\varpi R+(A-I)(\mathscr{A}-I)|>0\end{aligned}\tag{15}$$

这里 $\varpi=2/\theta-1$. 由于 $0\leq\omega\leq2\pi$, 并且 $\omega\neq\pi$, 所以 $0\leq\varpi<\infty$. 从而不等式 (15) 可以化简为

$$|\varpi I+(A+I)^{-1}(A-I)\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}||R|>0$$

由式 (14) 知, 上式可进一步等价于对任意 $0\leq\varpi<\infty$

$$d+\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)>0\Leftrightarrow|\varpi I+A_{\mathrm{ct}}\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}|>0\tag{16}$$

这里, 矩阵 A_{ct} 和矩阵 $\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}$ 由式 (3) 和 (4) 给出.

充分性. 如果 $A_{\mathrm{ct}}\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}$ 没有负实特征值, 那么可以断定对于任意 $0\leq\varpi<\infty$, 矩阵 $\varpi I+A_{\mathrm{ct}}\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}$ 没有负实特征值, 因此式 (16) 中的第二个不等式成立.

必要性. 反证法. 假设式 (16) 中的第二个不等式成立, 但是矩阵 $A_{\mathrm{ct}}\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}$ 具有负实特征值 $-\varpi_0<0$, 那么有 $|\varpi_0I+A_{\mathrm{ct}}\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}|=0$. 这显然和式 (16) 矛盾. □

注 1. 设 $(A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},d)$ 为 $h(z)$ 的状态空间描述, 并且 $d\neq0$, 那么 $h^{-1}(z)$ 的状态空间描述为[17]

$$\left(A-\frac{1}{d}\boldsymbol{bc},\ \boldsymbol{b}\frac{1}{d},\ -\frac{1}{d}\boldsymbol{c},\ \frac{1}{d}\right)$$

因此, 要求 $A-(1/d)/\boldsymbol{bc}$ 是稳定的, 也就是要求原传递函数的逆也是稳定的, 或者是最小相位的.

注 2. 设 $g(s)=d+\boldsymbol{c}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, $d>0$ 为一给定连续时间传递函数. 文献 [5] 给出如下判断 $g(s)$ 正实性的代数判据 (参见第 1.2 节的推论 1): 传递函数 $g(s)$ 是严格正实的当且仅当矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 以及矩阵 $A\,(A-\boldsymbol{bc}/d)$ 没有负实特征值. 比较定理 1 和上述结论可以看到, 定理 1 是上述结论的对偶结果.

1.2 连续系统有限频率严格正实的代数判据

有限频率严格正实的定义如下.

定义 2. 令 $g(s)=d+\boldsymbol{c}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为一个给定的传递函数, 则 $g(s)$ 称为有限频率严格正实的, 如果

1) $g(s)$ 在闭的右半平面解析, 即矩阵 A 在闭的右半平面没有极点;

2) 对于任意 $|\omega|\in[0,\omega_{\max}]$ (这里 $|\omega|$ 表示 ω 的绝对值, 下同), 成立 $g(\mathrm{j}\omega)+\overline{g(\mathrm{j}\omega)}=2\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))>0$, 这里 $\omega_{\max}$ 为给定的正数, 代表系统的频带宽度[15].

为了证明本小节的主要结果, 需要如下引理.

引理 2. 考虑传递函数 $g(s)=\boldsymbol{c}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, 这里 A 为 Hurwitz 稳定矩阵. 令 p 为使得 $\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}\neq 0$ 成立的最小奇数, 那么 $\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))>0$ 对任意 $|\omega|\in[0,\omega_{\max}]$ 成立, 当且仅当 $\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}<0$ 与 $\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立, 这里

$$\hat{g}(s)=\hat{d}+\hat{\boldsymbol{c}}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{17}$$

其中

$$\hat{d}=(-1)^{\frac{p+1}{2}}\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b},\quad \hat{\boldsymbol{c}}=(-1)^{\frac{p+1}{2}}\boldsymbol{c}A^{p+1} \tag{18}$$

证明. 再一次利用恒等式 (7), 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{c}(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad\frac{|\mathrm{j}\omega I-A+\boldsymbol{bc}|}{|\mathrm{j}\omega I-A|}-1=\\&\quad\mathrm{Re}\left(\frac{|-\mathrm{j}\omega I-A||\mathrm{j}\omega I-A+\boldsymbol{bc}|}{|\mathrm{j}\omega I-A||-\mathrm{j}\omega I-A|}\right)-1=\\&\quad\frac{|\omega^2I+A^2-A\boldsymbol{bc}|}{|\omega^2I+A^2|}-1=\\&\quad|I-(\omega^2I+A^2)^{-1}A\boldsymbol{bc}|-1=\\&\quad-\boldsymbol{c}(\omega^2I+A^2)^{-1}A\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{19}$$

当 $\omega\neq 0$ 时, 利用级数展开, 上述恒等式可以写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=\\&-\boldsymbol{c}(\omega^2I+A^2)^{-1}A\boldsymbol{b}=\\&-\frac{\boldsymbol{c}}{\omega^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{A^2}{\omega^2}\right)^iA\boldsymbol{b}=\\&\frac{1}{\omega^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^{i+1}\frac{1}{\omega^{2i}}\boldsymbol{c}A^{2i+1}\boldsymbol{b}\right)\end{aligned}$$

根据 p 的定义, 定义整数 i_0 使得 $2i_0+1=p$, 那么有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=\\&\quad\frac{1}{\omega^2}\sum_{i=i_0}^{\infty}\left((-1)^{i+1}\frac{1}{\omega^{2i}}\boldsymbol{c}A^{2i+1}\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad\frac{1}{\omega^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^{i+i_0+1}\frac{1}{\omega^{2i+2i_0}}\boldsymbol{c}A^{2i_0+1}A^{2i}\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad\frac{1}{\omega^2}(-1)^{i_0}\frac{1}{\omega^{2i_0}}\sum_{i=0}^{\infty}\left((-1)^{i+1}\frac{1}{\omega^{2i}}\boldsymbol{c}A^pA^{2i}\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad\frac{(-1)^{i_0}}{\omega^{2i_0+2}}\left(\frac{\boldsymbol{c}A^2}{\omega^2}\left(A^p\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^{2i}(-1)^i}{\omega^{2i}}\right)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}\right)\end{aligned}$$

将 $2i_0+1=p$ 代入上述表达式, 并利用级数求和及式 (18) 中的矩阵, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=\\&\quad\frac{(-1)^{i_0}}{\omega^{2i_0+2}}\left(-\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\frac{A^2}{\omega^2}A^p\left(I+\frac{A^2}{\omega^2}\right)^{-1}\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad\frac{(-1)^{i_0}}{\omega^2}\frac{1}{\omega^{2i_0}}\left(-\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\frac{A^2}{\omega^2}\omega^2A^pA_1^{-1}\boldsymbol{b}\right)=\\&\quad(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{\omega^{p+1}}(-\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}A^{p+2}A_1^{-1}\boldsymbol{b})=\\&\quad\frac{1}{\omega^{p+1}}(\hat{d}-\hat{\boldsymbol{c}}A_1^{-1}A\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $A_1=\omega^2I+A^2$. 联立式 (20) 与 (19), 有

$$\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=\frac{1}{\omega^{p+1}}\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega)),\ \ \omega\neq 0 \tag{21}$$

由于 p 为奇数, 所以由式 (21) 可以推得 $\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立, 当且仅当 $\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立. 最后, 如果 $\omega=0$, 那么 $\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=-\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}$. 该式显然表明 $\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}<0$. □

本小节的主要定理表述如下.

定理 2. 考虑传递函数 $g(s)=d+\boldsymbol{c}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, 令 $\mathscr{A}=A-(1/d)\boldsymbol{bc}$. 如果 $d\neq 0$, 那么 $g(s)$ 为有限频率严格正实当且仅当: 1) 矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的; 2)

$$d|A||\mathscr{A}|>0 \tag{22}$$

成立; 3)

$$\lambda_i(A\mathscr{A})\notin[-\omega_{\max}^2,0] \tag{23}$$

成立, 这里用记号 $\lambda_i(A)$, $i=1,2,\cdots,n$ 表示矩阵 A 的所有特征值. 如果 $d=0$, 令 p 如引理 2 所定义, 那么 $g(s)$ 为有限频率严格正实当且仅当: 1) 矩阵 A

是 Hurwitz 稳定的; 2) $\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}<0$; 3)

$$\lambda_i\left(A\left(A-\frac{1}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^{p+1}\right)\right)\notin[-\omega_{\max}^2,0) \quad (24)$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$; 4)

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}+\nu}\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}>0 \quad (25)$$

这里 ν 是矩阵

$$A\left(A-\frac{1}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^{p+1}\right)$$

在区间 $(-\infty,\ -\omega_{\max}^2)$ 上特征值的个数.

证明. 注意到 $g(s)$ 在右半平面解析等价于矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 先考虑 $d\neq 0$ 的情况. 此时, 通过利用式 (19), 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=&\,d+\mathrm{Re}(\boldsymbol{c}(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}\boldsymbol{b})=\\&d-\boldsymbol{c}(\omega^2I+A^2)^{-1}A\boldsymbol{b}=\\&d\frac{|\omega^2I+A^2-\frac{1}{d}A\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}|}{|\omega^2I+A^2|}\end{aligned} \quad (26)$$

定义一个新的变量 μ 如下

$$\omega^2=\frac{\omega_{\max}^2}{1+\mu\,\omega_{\max}^2} \quad (27)$$

那么 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 等价于 $\mu\in[0,\infty)$. 若 $\omega=0$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=&\,g(0)=d-\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}=\\&\frac{1}{|A|}|A|\left(d-\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}\right)=\\&d\frac{|\mathscr{A}|}{|A|}>0\end{aligned} \quad (28)$$

上式即为式 (22). 进一步, 不等式 (28) 表明矩阵 $\mathscr{A}$ 是非奇异的. 注意到

$$\begin{aligned}&|\omega^2I+A^2|\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))=\\&\quad d\left|\frac{\omega_{\max}^2}{1+\mu\omega_{\max}^2}I+A^2-\frac{1}{d}A\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\right|=\\&\quad d\,(\omega^2)^n|A||\mathscr{A}||\Upsilon+\mu I|\end{aligned} \quad (29)$$

这里

$$\Upsilon=(A\mathscr{A})^{-1}+\omega_{\max}^{-2}I$$

由于矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 所以有 $\forall\omega$, $|\omega^2I+A^2|>0$. 那么根据式 (28) 和 (29), 可以断定 $\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立当且仅当 $|\Upsilon+\mu I|>0$ 对于 $\mu\in[0,\infty)$ 成立. 类似于定理 1 的证明, 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 上述命题等价于

$$\begin{aligned}&\lambda_i(\Upsilon)\notin(-\infty,0]\\\Leftrightarrow\ &\lambda_i((A\mathscr{A})^{-1}+\omega_{\max}^{-2}I)\notin(-\infty,0]\\\Leftrightarrow\ &\lambda_i((A\mathscr{A})^{-1})\notin(-\infty,-\omega_{\max}^{-2}]\\\Leftrightarrow\ &\lambda_i(A\mathscr{A})\notin[-\omega_{\max}^2,0)\end{aligned}$$

上式连同式 (28) 即完成了本定理第一部分的证明.

下面考虑 $d=0$ 的情况. 根据引理 2 可知 $\mathrm{Re}(g(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in[0,\omega_{\max}]$ 成立当且仅当 $\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b}<0$ 以及 $\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立. 所以为了完成本部分的证明, 只需说明 $\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))>0$ 对于任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立当且仅当式 (24) 和 (25) 都成立. 应用类似于得到式 (26) 的方法, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))=&\,\hat{d}\frac{\left|\omega^2I+A^2-\frac{1}{\hat{d}}A\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{c}}\right|}{|\omega^2I+A^2|}=\\&\frac{\hat{d}\left|\omega^2I+A\left(A-\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^{p+1}}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\right)\right|}{|\omega^2I+A^2|}\end{aligned} \quad (30)$$

通过利用恒等式 (2), 有

$$\begin{aligned}\left|A-\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^{p+1}}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\right|=&\left|I-\frac{1}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^p\right||A|=\\&\left(1-\frac{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\right)|A|=0\end{aligned}$$

所以不能用化简式 (20) 的方法来化简上述表达式 (30). 为此将式 (30) 写成

$$\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))=\hat{d}\frac{1}{|\omega^2I+A^2|}\prod_{i=1}^{n}(\omega^2+\lambda_i) \quad (31)$$

其中 λ_i, $i=1,2,\cdots,n$ 是矩阵

$$A\left(A-\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^{p+1}}{\boldsymbol{c}A^p\boldsymbol{b}}\right)$$

的特征值. 所以由式 (31) 可得 $\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))>0$ 对任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立仅当 $\lambda_i\notin[-\omega_{\max}^2,0)$, $i=1,2,\cdots,n$. 此式即式 (24). 容易看出, 在上述充分条件满足的前提下, $\mathrm{Re}(\hat{g}(\mathrm{j}\omega))>0$ 对任意 $|\omega|\in(0,\omega_{\max}]$ 成立当且仅当 $\hat{d}(-1)^{\nu}>0$ 成立, 这里 ν 已经在本定理中定义. 该式等价于式 (25). 这就完成了第二部分的证明. □

如果令定理 2 中的 $\omega_{\max}=\infty$, 那么可以得到如下的推论.

推论 1. 考虑传递函数 $g(s)=d+\boldsymbol{c}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, $d\neq 0$, 那么 $g(s)$ 是严格正实的当且仅当: 1) 矩阵 A

是 Hurwitz 稳定的; 2) $d > 0$; 3)

$$\lambda(A\mathscr{A}) \notin (-\infty, 0]$$

注 3. 推论 1 与文献 [5] 中定理 3.1 的差别在于条件 $d > 0$. 该条件在文献 [5] 的定理 3.1 中是假设条件, 但推论 1 表明该条件是 $g(s)$ 严格正实的必要条件之一. 此外, 注意到当考虑有限频率严格正实的时候, d 可以是负数, 但当考虑通常意义上的严格正实的时候, d 必须是正数.

推论 2[5]**.** 考虑传递函数 $g(s) = \boldsymbol{c}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{b}$, 那么 $g(s)$ 是严格正实的当且仅当: 1) 矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的; 2) $\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b} < 0$; 3) $\boldsymbol{c}A\boldsymbol{b} < 0$; 4)

$$\lambda\left(A\left(A - \frac{1}{\boldsymbol{c}A\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^2\right)\right) \notin (-\infty, 0) \tag{32}$$

证明. 根据文献 [5] 中的结论可知, 引理 2 中定义的 p 等于 1. 此外, 显然有 $\nu = 0$. 在这种情况下, 根据式 (24) 和 (25) 可知式 (32) 成立, 并且 $\boldsymbol{c}A\boldsymbol{b} < 0$. □

2 数值算例

例 1. 考虑离散标量传递函数

$$h(z) = \frac{-35z^2 + 11z + 36}{100z^3 + 40z^2 - 20z + 30} + d \tag{33}$$

以及它的一个状态空间实现

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{3}{10} & \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{5} \end{bmatrix}$$

和 $d = 0.7$. 我们用定理 1 来判断它是否严格正实. 首先矩阵 A 和 $\mathscr{A} = A - \dfrac{1}{d}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$ 都是 Schur 稳定的. 另外通过直接计算, 矩阵 $A_{\mathrm{ct}}\mathscr{A}_{\mathrm{ct}}$ 的特征值集合为 $\{822.603, -0.331 \pm 0.127\mathrm{j}\}$. 所以根据定理 1, 传递函数 $h(z)$ 是严格正实的. $h(z)$ 的正实性亦可通过如图 1 所示的 Nyquist 图加以验证.

例 2. 考虑连续标量传递函数

$$g(s) = \frac{10(15s^2 + 51s + 7)}{s^3 + 3s^2 + 5s + 4} \tag{34}$$

它的一个状态空间实现可取为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

通过直接计算, 有 $\boldsymbol{c}A^{-1}\boldsymbol{b} = -17.5$ 和 $\boldsymbol{c}A\boldsymbol{b} = 60$. 所以根据引理 2 中的定义, 有 $p = 1$. 由此可计算得

$$A\left(A - \frac{1}{\boldsymbol{c}A\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}A^2\right)$$

的特征值集合为 $\{0, 0.16, -29.16\}$. 如果令 $\omega_{\max} = 5$, 那么显然条件 (24) 满足. 同时有 $\nu = 1$, 此亦表明条件 (25) 满足. 所以根据定理 2, $g(s)$ 在频率段 $[-5, 5]$ 上是有限频率严格正实的. 但是另一方面, $g(s)$ 的 Nyquist 图 (见图 1) 表明它并非全频率严格正实的.

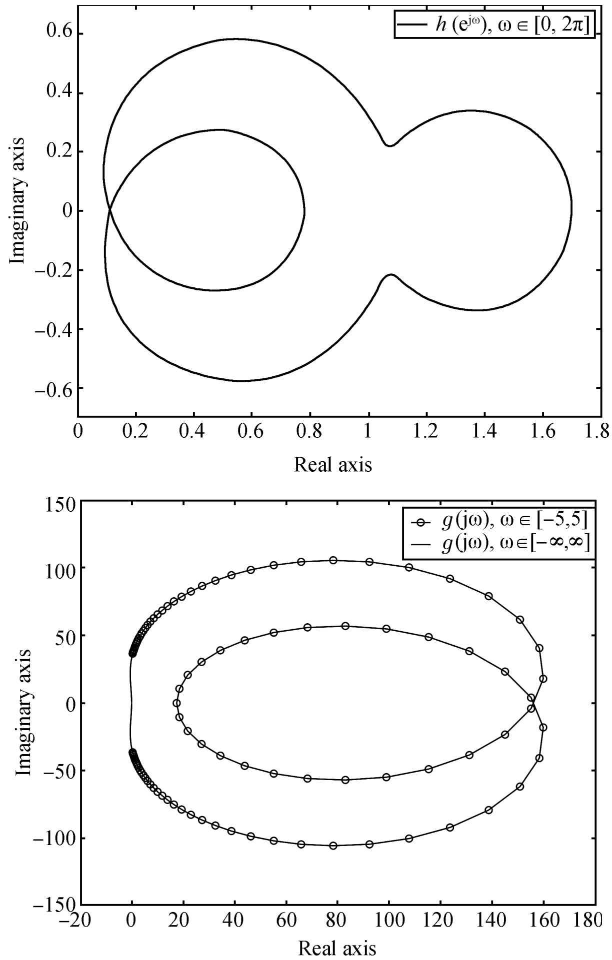

图 1 离散传递函数 (33) 和连续传递函数 (34) 的 Nyquist 图

Fig. 1 The Nyquist diagrams of the discrete transfer function (33) and the continuous transfer function (34)

3 结论

正实传递函数在控制理论中起着非常重要的作用. 著名的 KYP 引理给出了从状态空间判断传递函数正实的充要条件. 但对于标量传递函数用 KYP 引理判断正实性则过于复杂. 本文给出了一种判断离散传递函数严格正实的简单代数判据. 该判据只

需检验一个矩阵特征值的位置, 因而便于应用. 本文的另一项工作是给出了连续传递函数有限频率严格正实的一种同样简单的代数判据. 本文的结果或补充了已有文献的结果, 或将已有文献的结果当成特例. 下一步的工作目标是利用本文的方法来考虑离散传递函数的有限频率严格正实性的代数判断.

References

1 Anderson B, Vongpanitlerd S. *Network Analysis and Synthesis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1973

2 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. New York: Prentice Hall, 2002

3 Astrom K J. Theory and applications of adaptive control: a survey. *Automatica*, 1983, **19**(5): 471−486

4 Ioannou P, Tao G. Frequency domain conditions for strictly positive real functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, **32**(1): 53−54

5 Shorten R, King C. Spectral conditions for positive realness of single-input-single-output systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(10): 1875−1877

6 Bai Z, Freund R W. Eigenvalue-based characterization and test for positive realness of scalar transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(12): 2396−2402

7 Shorten R N, Curran P, Wulff K, Zeheb E. A note on spectral conditions for positive realness of transfer function matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(5): 1258−1261

8 Sun W Q, Khargonekar P P, Shim D. Solutions to the positive real control problem for linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(10): 2034−2046

9 Zhou B, Duan G R. Solutions to the positive real control problem for linear systems via reduced-order observer. In: Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, China: IEEE, 2008. 4628−4632

10 Duan Z S, Huang L, Wang L. Multiplier design for extended strict positive realness and its applications. *International Journal of Control*, 2004, **77**(17): 1493−1502

11 Zhou S S, Lam J, Feng G. New characterization of positive realness and control of a class of uncertain polytopic discretetime systems. *Systems and Control Letters*, 2005, **54**(5): 417−427

12 Byrnes C I, Isidori A, Willems J C. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1228−1240

13 Bar-Kana I. Positive-realness in multivariable stationary linear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 1991, **328**(4): 403−417

14 Zhang L Q, Lam J, Xu S Y. On positive realness of descriptor systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, **49**(3): 401−407

15 Iwasaki T, Hara S, Yamauchi H. Dynamical system design from a control perspective: finite frequency positive-realness approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(8): 1337−1354

16 Chen Jing Liang, Chen Xiang Hui. *Special Matrices*. Beijing: Tsinghua University Press, 2000
(陈景良, 陈向辉. 特殊矩阵. 北京: 清华大学出版社, 2000)

17 Haddad W M, Bernstein D S. Robust stabilization with positve real uncertainty: beyond the small gain theorem. *Systems and Control Letters*, 1991, **17**(3): 191−208

周 彬 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生, 讲师. 2004 年获得哈尔滨工业大学控制科学与工程系学士学位. 2007 年 12 月至 2008 年 3 月赴香港大学机械工程系作访问研究. 主要研究方向为约束系统与非线性控制理论. 本文通信作者. E-mail: binzhou@msn.com
(**ZHOU Bin** Lecturer, Ph. D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. He received his bachelor degree from the same university in 2004. From November 2007 to March 2008, he served as a research associate in the Department of Mechanical Engineering, University of Hong Kong. His research interest covers constrained control systems and nonlinear control theory. Corresponding author of this paper.)

段广仁 哈尔滨工业大学教授. 1983 年获东北重型机械学院应用数学专业学士学位, 1986 年获哈尔滨船舶工程学院现代控制理论专业硕士学位, 1989 年获哈尔滨工业大学一般力学专业博士学位. 主要研究方向为鲁棒控制理论, 特征结构配置和广义系统理论.
E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn
(**DUAN Guang-Ren** Professor at Harbin Institute of Technology. He received his bachelor degree in applied mathematics at Northeast Institute of Heavy Machinery in 1983, his master degree in modern control theory at Harbin Engineering University in 1986, and his Ph. D. degreee in control systems theory at Harbin Institute of Technology in 1989, respectively. His research interest covers robust control, eigenstructure assignment, and descriptor systems.)