

灰度图像最小误差阈值分割法的二维推广

范九伦¹ 雷博^{1,2}

摘要 一维最小误差阈值法假设了目标和背景的灰度分布服从混合正态分布. 考虑到噪声等因素对图像质量的影响, 本文在二维灰度直方图上, 基于二维混合正态分布假设, 给出一维最小误差阈值法的二维推广表达式. 为了提高算法的运行速度, 也给出了快速递归算法. 实验表明, 二维最小误差阈值法是一个有效的图像分割算法, 能够更好地适应目标和背景方差相差较大的图像及噪声图像的分割问题.

关键词 阈值分割, 最小误差阈值法, 二维灰度直方图
中图分类号 TN911.73

Two-dimensional Extension of Minimum Error Threshold Segmentation Method for Gray-level Images

FAN Jiu-Lun¹ LEI Bo^{1,2}

Abstract One-dimensional minimum error thresholding method assumed that the histogram distributions of object and background are governed by a mixture Gaussian distribution. Considering the affects of noise and other factors on image quality, based on the assumption of a two-dimensional mixture Gaussian distribution, a two-dimensional expression of the minimum error thresholding method on the two-dimensional gray-level histogram is proposed. In order to improve the running speed, the fast recursive formulas are also given. Experimental results show that the two-dimensional minimum error thresholding method is a valuable image segmentation method, and can be well adapted to the images with noises and large variances between object and background.

Key words Threshold segmentation, minimum error thresholding method, two-dimensional gray-level histogram

图像分割是图像分析、理解和计算机视觉中的难点, 在图像分割的诸多方法中, 阈值化技术以其简单、有效、便于理解受到人们的普遍欢迎^[1]. 其中, 最大类间方差法^[2] (也称 Otsu 法)、最大熵法^[3]、最小误差阈值法^[4] 是三个最常用的分割方法, 它们均有坚实的理论基础作为支撑. 最小误差阈值法是 Kittler 和 Illingworth 提出的, 他们基于 Bayes 误差理论, 在假设理想的目标和背景的灰度分布服从混合正态分布的前提下, 经过合理的处理, 得到了一个阈值分割表达式. 国际上有很多学者对最小误差阈值法进行了研究^[5-7], 为了更加清楚地揭示该方法的理论基础, 我们运用信息论中的相对熵 (也称交叉熵、有向散度), 基于“模型匹配”的思想, 要求实际的图像灰度直方图与假设的混合正态分布之间差别最小, 给出了最小误差阈值法的相对熵解释^[7], 为更好地使用该方法奠定了坚实的理论基础.

由于一维图像阈值分割方法是在图像的灰度直方图上进行处理的, 没有充分地使用图像的已有信息, 对含噪图像的分割效果较差. 为此十余年来, 人们考虑通过构造二维灰度直方图进行阈值选取, 获得了更好的分割效果^[8-14]. 目前, 针对最大类间方差法和最大熵法, 已提出了相应的二维推广及其快速递归算法^[13-15], 但遗憾的是, 至今没有人给出一维最小误差阈值法的二维推广. 本文的目的是给出二维最小误差阈值法的表达式, 我们借助已有的研究成果, 基于相对熵原理, 推导出了希望的结果.

1 一维最小误差阈值法

对于一幅大小为 $M \times N$ 的数字图像, 我们用 $f(x, y)$ 表示图像上坐标为 (x, y) 的像素点的灰度值, $f(x, y) \in G = [0, 1, \dots, L - 1]$. 图像的一维直方图 $h(g)$ 表示图像中各个灰度值出现的频数, 因此可以用一维直方图作为图像概率分布的描述.

假设理想的灰度分布模型是混合正态分布 $p(g) = \sum_{i=0}^1 P_i p(g|i)$, 这里 P_i 是子分布的先验概率, $p(g)$ 的二个子分布 $p(g|i)$ 分别服从均值为 μ_i , 方差为 σ_i 的正态分布 $p(g|i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(g - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$. 对各个参数的估计如下, 如果我们以灰度 t 作为阈值, 那么

收稿日期 2007-11-23 收修改稿日期 2008-04-01
Received November 23, 2007; in revised form April 1, 2008
国家自然科学基金 (60572133) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60572133)
1. 西安邮电学院信息与控制系统 西安 710061 2. 西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071
1. Department of Information and Control, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710061 2. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00386

$$P_0(t) = \sum_{g=0}^t h(g) \tag{1}$$

$$P_1(t) = \sum_{g=t+1}^{L-1} h(g) \tag{2}$$

$$\mu_0(t) = \frac{\sum_{g=0}^t h(g)g}{P_0(t)} \tag{3}$$

$$\mu_1(t) = \frac{\sum_{g=t+1}^{L-1} h(g)g}{P_1(t)} \tag{4}$$

$$\sigma_0^2(t) = \frac{\sum_{g=0}^t (g - \mu_0(t))^2 h(g)}{P_0(t)} \tag{5}$$

$$\sigma_1^2(t) = \frac{\sum_{g=t+1}^{L-1} (g - \mu_1(t))^2 h(g)}{P_1(t)} \tag{6}$$

对于阈值 $t \in G = [0, 1, \dots, L - 1]$, Kittler 和 Illingworth 基于最小分类误差思想给出下面的函数

$$J(t) = 1 + 2[P_0(t) \ln \sigma_0(t) + P_1(t) \ln \sigma_1(t)] - 2[P_0(t) \ln P_0(t) + P_1(t) \ln P_1(t)] \tag{7}$$

最佳阈值选为使 $J(t)$ 取最小值的 $t = t^*$, 即

$$t^* = \arg \min_{0 < t < L-1} J(t) \tag{8}$$

得到最佳阈值后像元的归类方式为

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y) < t^* \\ 255, & \text{若 } f(x, y) \geq t^* \end{cases} \tag{9}$$

其中, $\bar{f}(x, y)$ 为二值化后的分割图像. 上述方法称为最小误差阈值法, 为了更好地理解该方法, 我们基于信息论中的相对熵^[16], 通过实际分布 $h(g)$ 与假设分布 $p(g)$ 之间的相对熵最小, 重新推导出该表达式, 更加明确了该方法的数学机理. 最小误差阈值法是基于一维直方图的, 仅考虑了图像的点灰度信息, 对于噪声图像分割效果不很理想. 为此, 本文给出该方法的二维推广.

2 二维最小误差阈值法

对于一幅大小为 $M \times N$ 的数字图像, 我们用 $g(x, y)$ 表示图像上坐标为 (x, y) 的像素点的 $K \times K$

邻域平均灰度值, $g(x, y)$ 的定义如下

$$g(x, y) = \left\lfloor \frac{1}{K \times K} \sum_{m=-K'}^{K'} \sum_{n=-K'}^{K'} f(x + m, y + n) \right\rfloor \tag{10}$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整运算; K 为邻域宽度, 一般取奇数, $K' = (K - 1)/2$.

从 $g(x, y)$ 的定义可以看出, 如果图像的灰度级为 L , 那么相应的像素邻域平均灰度的灰度级也为 L , $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 组成的二元组记为 (i, j) . 在此基础上定义图像的二维直方图, 该二维直方图定义在一个 $(L - 1) \times (L - 1)$ 大小的正方形区域上, 其横坐标表示图像像元的灰度值, 纵坐标表示像元的邻域平均灰度值. 直方图中任意一点的值定义为 P_{ij} , 它表示二元组 (i, j) 发生的频率. 由下式确定

$$P_{ij} = \frac{c_{ij}}{M \times N} \tag{11}$$

其中, c_{ij} 是 (i, j) 出现的频数, $0 \leq i, j \leq L - 1$, $\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} P_{ij} = 1$.

根据二维直方图的定义, 假设在阈值 (s, t) 处将图像分割成四个区域, 如图 1 所示. 其中, 对角线上的两个区域分别对应于目标和背景, 远离对角线的区域 3 和 4 对应于边缘和噪声, 一般认为在区域 3 和 4 上所有的 $P_{ij} \approx 0$ ^[8-10]. 在图 1 中, 利用二维直方图中阈值矢量对图像进行分割时, 把区域 1 和 2 分别看成目标和背景区域, 记为 $C_0(s, t)$ 和 $C_1(s, t)$.

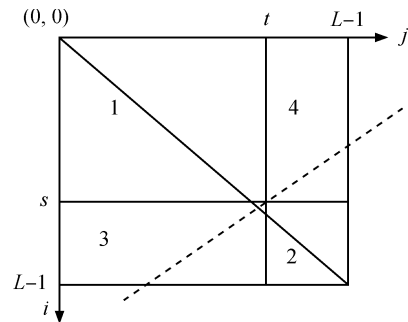


图 1 二维分割区域

Fig. 1 2D segmentation area

二维正态分布随机变量 (X, Y) 的概率密度函数定义为

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \times \left(\frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right] \tag{12}$$

其中, μ_1, μ_2 分别为随机变量 X 和 Y 的均值, σ_1^2, σ_2^2

分别为随机变量 X 和 Y 的方差, ρ 是随机变量 X 和 Y 的相关系数.

对于灰度图像上的二维直方图, 假设在阈值 (s, t) 处相应地有一个二维混合正态分布

$$P'_{ij} = P_0(s, t)p(i, j|0) + P_1(s, t)p(i, j|1) \quad (13)$$

其中, $P_0(s, t)$, $P_1(s, t)$ 是先验概率, $p(i, j|0)$ 和 $p(i, j|1)$ 是两个子正态分布. 记 $p(i, j|0)$ 和 $p(i, j|1)$ 的均值、方差分别为 $\boldsymbol{\mu}_0(s, t) = (\mu_{00}(s, t), \mu_{01}(s, t))^T$, $\boldsymbol{\mu}_1(s, t) = (\mu_{10}(s, t), \mu_{11}(s, t))^T$, $\boldsymbol{\sigma}_0^2(s, t) = (\sigma_{00}^2(s, t), \sigma_{01}^2(s, t))^T$, $\boldsymbol{\sigma}_1^2(s, t) = (\sigma_{10}^2(s, t), \sigma_{11}^2(s, t))^T$; $p(i, j|0)$ 和 $p(i, j|1)$ 的相关系数分别为 ρ_0 、 ρ_1 . 各个参数的估计如下

$$P_0(s, t) = \sum_{(i, j) \in C_0(s, t)} P_{ij} = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \quad (14)$$

$$P_1(s, t) = \sum_{(i, j) \in C_1(s, t)} P_{ij} = \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} P_{ij} \quad (15)$$

满足

$$P_0(s, t) + P_1(s, t) \approx 1 \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\mu}_0(s, t) = (\mu_{00}(s, t), \mu_{01}(s, t))^T = \left(\frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t iP_{ij}}{P_0(s, t)}, \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t jP_{ij}}{P_0(s, t)} \right)^T \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\mu}_1(s, t) = (\mu_{10}(s, t), \mu_{11}(s, t))^T = \left(\frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} iP_{ij}}{P_1(s, t)}, \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} jP_{ij}}{P_1(s, t)} \right)^T \quad (18)$$

$$\rho_0(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t [(i - \mu_{00}(s, t))(j - \mu_{01}(s, t))P_{ij}]}{P_0(s, t) \sigma_{00}(s, t) \sigma_{01}(s, t)} \quad (21)$$

$$\rho_1(s, t) = \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} [(i - \mu_{10}(s, t))(j - \mu_{11}(s, t))P_{ij}]}{P_1(s, t) \sigma_{10}(s, t) \sigma_{11}(s, t)} \quad (22)$$

二维直方图上总的均值矢量为

$$\boldsymbol{\mu}_T = (\mu_{T0}, \mu_{T1})^T = \left(\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} iP_{ij}, \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} jP_{ij} \right)^T \quad (23)$$

对于图像真实的二维灰度直方图概率 P_{ij} 和估计的二维正态分布混合概率 P'_{ij} , 采用对一维最小误差阈值法的相对熵解释, 我们可以用相对熵来计算这两个二维分布的“匹配程度”, 记

$$R(s, t) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{P_0(s, t)p(i, j|0)} + \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} P_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{P_1(s, t)p(i, j|1)} \quad (24)$$

由于 (在此省略较为繁琐的推导过程)

$$\frac{1}{2(1 - \rho_0^2(s, t))} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \left[\frac{P_{ij}(i - \mu_{00}(s, t))^2}{\sigma_{00}^2(s, t)} - 2\rho_0(s, t) \frac{P_{ij}(i - \mu_{00}(s, t))(j - \mu_{01}(s, t))}{\sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t)} + \frac{P_{ij}(j - \mu_{01}(s, t))^2}{\sigma_{01}^2(s, t)} \right] = P_0(s, t) \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0^2(s, t) = (\sigma_{00}^2(s, t), \sigma_{01}^2(s, t))^T = \left(\frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t (i - \mu_{00}(s, t))^2 P_{ij}}{P_0(s, t)}, \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t (j - \mu_{01}(s, t))^2 P_{ij}}{P_0(s, t)} \right)^T \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1^2(s, t) = (\sigma_{10}^2(s, t), \sigma_{11}^2(s, t))^T = \left(\frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} (i - \mu_{10}(s, t))^2 P_{ij}}{P_1(s, t)}, \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} (j - \mu_{11}(s, t))^2 P_{ij}}{P_1(s, t)} \right)^T \quad (20)$$

可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \ln p(i, j|0) = \\ & \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \ln \left[\frac{1}{2\pi\sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t)\sqrt{1-\rho_0^2(s, t)}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_0^2(s, t))} \left[\frac{(i-\mu_{00}(s, t))^2}{\sigma_{00}^2(s, t)} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. 2\rho_0(s, t) \frac{(i-\mu_{00}(s, t))(j-\mu_{01}(s, t))}{\sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t)} + \frac{(j-\mu_{01}(s, t))^2}{\sigma_{01}^2(s, t)} \right] \right\} \right] = \\ & -P_0(s, t) \ln 2\pi - P_0(s, t) \ln \sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t) - P_0(s, t) \ln \sqrt{1-\rho_0^2(s, t)} - P_0(s, t) \end{aligned} \quad (26)$$

因此

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{P_0(s, t)p(i, j|0)} = \\ & \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \ln P_{ij} - P_0(s, t) \ln P_0(s, t) + \\ & P_0(s, t) \ln 2\pi + P_0(s, t) \ln \sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t) + \\ & P_0(s, t) \ln \sqrt{1-\rho_0^2(s, t)} + P_0(s, t) \end{aligned} \quad (27)$$

类似的, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} P_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{P_1(s, t)p(i, j|1)} = \\ & \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} P_{ij} \ln P_{ij} - P_1(s, t) \ln P_1(s, t) + \\ & P_1(s, t) \ln 2\pi + P_1(s, t) \ln \sigma_{10}(s, t)\sigma_{11}(s, t) + \\ & P_1(s, t) \ln \sqrt{1-\rho_1^2(s, t)} + P_1(s, t) \end{aligned} \quad (28)$$

考虑到在图 1 中非对角线区域上假设 $P_{ij} \approx 0$, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t P_{ij} \ln P_{ij} + \sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} P_{ij} \ln P_{ij} \approx \\ & \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} P_{ij} \ln P_{ij} \end{aligned} \quad (29)$$

$$P_0(s, t) + P_1(s, t) \approx 1 \quad (30)$$

于是忽略上述常数项后 $R(s, t)$ 可换写成

$$\begin{aligned} J(s, t) = & 1 - P_0(s, t) \ln P_0(s, t) - \\ & P_1(s, t) \ln P_1(s, t) + \\ & P_0(s, t) \ln \sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t) + \\ & P_1(s, t) \ln \sigma_{10}(s, t)\sigma_{11}(s, t) + \\ & P_0(s, t) \ln \sqrt{1-\rho_0^2(s, t)} + \\ & P_1(s, t) \ln \sqrt{1-\rho_1^2(s, t)} \end{aligned} \quad (31)$$

上述表达式是一维最小误差阈值法的一般性二维推广表达式. 如果考虑到二维灰度直方图的构造过程, 则两个相关系数 ρ_0 和 ρ_1 应为灰度邻域大小的函数, 而与点 (s, t) 的位置没有关系, 因此可以看作常数. 理论上, $\rho_0 = \rho_1 = 1/K$, K 为邻域窗口大小^[17], 于是可以进一步将上式简化为

$$\begin{aligned} J^*(s, t) = & 1 - P_0(s, t) \ln P_0(s, t) - \\ & P_1(s, t) \ln P_1(s, t) + \\ & P_0(s, t) \ln \sigma_{00}(s, t)\sigma_{01}(s, t) + \\ & P_1(s, t) \ln \sigma_{10}(s, t)\sigma_{11}(s, t) \end{aligned} \quad (32)$$

可见上述公式是一维最小误差阈值法对应的二维推广表达式, 最佳阈值选为使 $J^*(s, t)$ 取最小值的 $(s, t) = (s^*, t^*)$, 即

$$(s^*, t^*) = \arg \min_{0 < s, t < L-1} J^*(s, t) \quad (33)$$

经二维阈值分割后图像为

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, y) < s^* \text{ 且 } g(x, y) < t^* \\ 255, & \text{其他} \end{cases} \quad (34)$$

3 快速算法

二维阈值法计算量太大, 不能满足实时性的要求. 我们通过分析该方法, 避免每次都从 $(0, 0)$ 开始的重复计算, 给出了该方法的递推公式. 记

$$\bar{\mu}_{00}(s, t) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t iP_{ij}$$

$$\bar{\mu}_{01}(s, t) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t jP_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{00}^2(s, t) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t i^2 P_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{01}^2(s, t) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t j^2 P_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{T0}^2(s, t) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} i^2 P_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{T1}^2(s, t) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} j^2 P_{ij}$$

那么

$$\mu_{00}(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t i P_{ij}}{P_0(s, t)} = \frac{\bar{\mu}_{00}(s, t)}{P_0(s, t)} \quad (35)$$

$$\mu_{01}(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t j P_{ij}}{P_0(s, t)} = \frac{\bar{\mu}_{01}(s, t)}{P_0(s, t)} \quad (36)$$

$$\mu_{10}(s, t) = \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} i P_{ij}}{P_1(s, t)} \approx \frac{\mu_{T0} - \bar{\mu}_{00}(s, t)}{1 - P_0(s, t)} \quad (37)$$

$$\mu_{11}(s, t) = \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} j P_{ij}}{P_1(s, t)} \approx \frac{\mu_{T1} - \bar{\mu}_{01}(s, t)}{1 - P_0(s, t)} \quad (38)$$

$$\sigma_{00}^2(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t i^2 P_{ij}}{P_0(s, t)} - \mu_{00}^2(s, t) = \frac{\bar{\sigma}_{00}^2(s, t)}{P_0(s, t)} - \mu_{00}^2(s, t) \quad (39)$$

$$\sigma_{01}^2(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t j^2 P_{ij}}{P_0(s, t)} - \mu_{01}^2(s, t) = \frac{\bar{\sigma}_{01}^2(s, t)}{P_0(s, t)} - \mu_{01}^2(s, t) \quad (40)$$

$$\sigma_{10}^2(s, t) = \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} i^2 P_{ij}}{P_1(s, t)} - \mu_{10}^2(s, t) \approx \frac{\bar{\sigma}_{T0}^2(s, t) - \bar{\sigma}_{00}^2(s, t)}{1 - P_0(s, t)} - \mu_{10}^2(s, t) \quad (41)$$

$$\sigma_{11}^2(s, t) = \frac{\sum_{i=s+1}^{L-1} \sum_{j=t+1}^{L-1} j^2 P_{ij}}{P_1(s, t)} - \mu_{11}^2(s, t) \approx \frac{\bar{\sigma}_{T1}^2(s, t) - \bar{\sigma}_{01}^2(s, t)}{1 - P_0(s, t)} - \mu_{11}^2(s, t) \quad (42)$$

具体的递推过程如下

$$P_0(0, 0) = P_{00} \quad (43)$$

$$P_0(s, 0) = P_0(s-1, 0) + P_{s0} \quad (44)$$

$$P_0(0, t) = P_0(0, t-1) + P_{0t} \quad (45)$$

$$P_0(s, t) = P_0(s, t-1) + P_0(s-1, t) - P_0(s-1, t-1) + P_{st} \quad (46)$$

$$\bar{\mu}_{00}(0, 0) = 0 \quad (47)$$

$$\bar{\mu}_{00}(s, 0) = \bar{\mu}_{00}(s-1, 0) + s \times P_{s0} \quad (48)$$

$$\bar{\mu}_{00}(0, t) = \bar{\mu}_{00}(0, t-1) + 0 \times P_{0t} \quad (49)$$

$$\bar{\mu}_{00}(s, t) = \bar{\mu}_{00}(s-1, t) + \bar{\mu}_{00}(s, t-1) - \bar{\mu}_{00}(s-1, t-1) + s \times P_{st} \quad (50)$$

$$\bar{\mu}_{01}(0, 0) = 0 \quad (51)$$

$$\bar{\mu}_{01}(s, 0) = \bar{\mu}_{01}(s-1, 0) + 0 \times P_{s0} \quad (52)$$

$$\bar{\mu}_{01}(0, t) = \bar{\mu}_{01}(0, t-1) + t \times P_{0t} \quad (53)$$

$$\bar{\mu}_{01}(s, t) = \bar{\mu}_{01}(s-1, t) + \bar{\mu}_{01}(s, t-1) - \bar{\mu}_{01}(s-1, t-1) + t \times P_{st} \quad (54)$$

$$\bar{\sigma}_{00}^2(0, 0) = 0 \quad (55)$$

$$\bar{\sigma}_{00}^2(s, 0) = \bar{\sigma}_{00}^2(s-1, 0) + s^2 \times P_{s0} \quad (56)$$

$$\bar{\sigma}_{00}^2(0, t) = \bar{\sigma}_{00}^2(0, t-1) + 0 \times P_{0t} \quad (57)$$

$$\bar{\sigma}_{00}^2(s, t) = \bar{\sigma}_{00}^2(s-1, t) + \bar{\sigma}_{00}^2(s, t-1) - \bar{\sigma}_{00}^2(s-1, t-1) + s^2 \times P_{st} \quad (58)$$

$$\bar{\sigma}_{01}^2(0, 0) = 0 \quad (59)$$

$$\bar{\sigma}_{01}^2(s, 0) = \bar{\sigma}_{01}^2(s-1, 0) + 0 \times P_{s0} \quad (60)$$

$$\bar{\sigma}_{01}^2(0, t) = \bar{\sigma}_{01}^2(0, t-1) + t^2 \times P_{0t} \quad (61)$$

$$\bar{\sigma}_{01}^2(s, t) = \bar{\sigma}_{01}^2(s-1, t) + \bar{\sigma}_{01}^2(s, t-1) - \bar{\sigma}_{01}^2(s-1, t-1) + t^2 \times P_{st} \quad (62)$$

用以上快速递推公式, 每次计算不必都从 (0, 0) 开始, 将计算复杂度从 $O(L^4)$ 降低到 $O(L^2)$, 大大节省了计算时间. 同时快速递推的过程还减少了计算过程所需的存储空间, 提高了算法的效率.

4 实验结果及分析

仿真实验是在 Matlab 7 环境下, 在奔腾 4、1.5 GHz CPU 和 512M 内存的微处理器上进行的. 为了验证本文算法的有效性, 我们对多幅图像进行了处理, 均获得了比较满意的效果. 为了进行比较, 图 2~4 分别给出了三幅实际图像: SAR 图像, 加了均值为 0、方差为 0.005 的高斯噪声的航拍图像和加了均值为 0、方差为 0.005 的高斯噪声的 Number 图像, 尺寸分别为 340×340 , 1024×1026 , 203×730 . 我们分别采用一维最小误差阈值法、二维最大类间方差递推算法^[15] 和二维最大 Tsallis-Havrda-Charvat (THC) 熵算法^[9] (二维最大 THC 熵算法是二维最大熵算法^[13] 的推广. 为了比较, 我们对二维最大 THC 熵也采用递推算法, 限于篇幅, 其递推算法没有在本文详细叙述; 根据文献 [9] 的建议参数 α 选为 0.8) 以及本文给出的二维最小误差阈值递推算法进行了比较. 在二维灰度直方图的构造时取 $K = 3$.

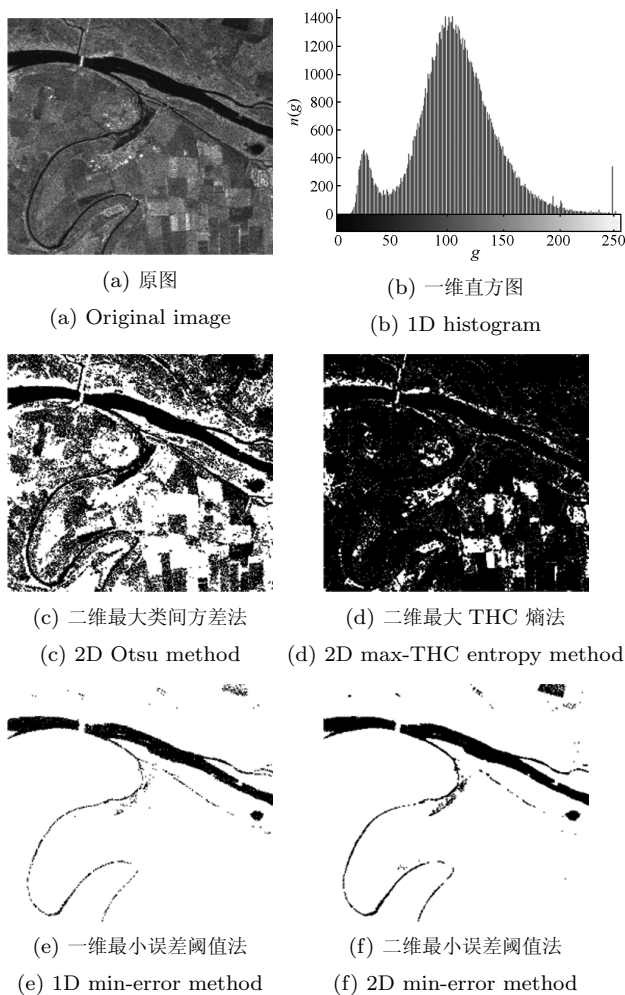


图 2 SAR 图像的分割结果

Fig. 2 The segmented results of SAR image

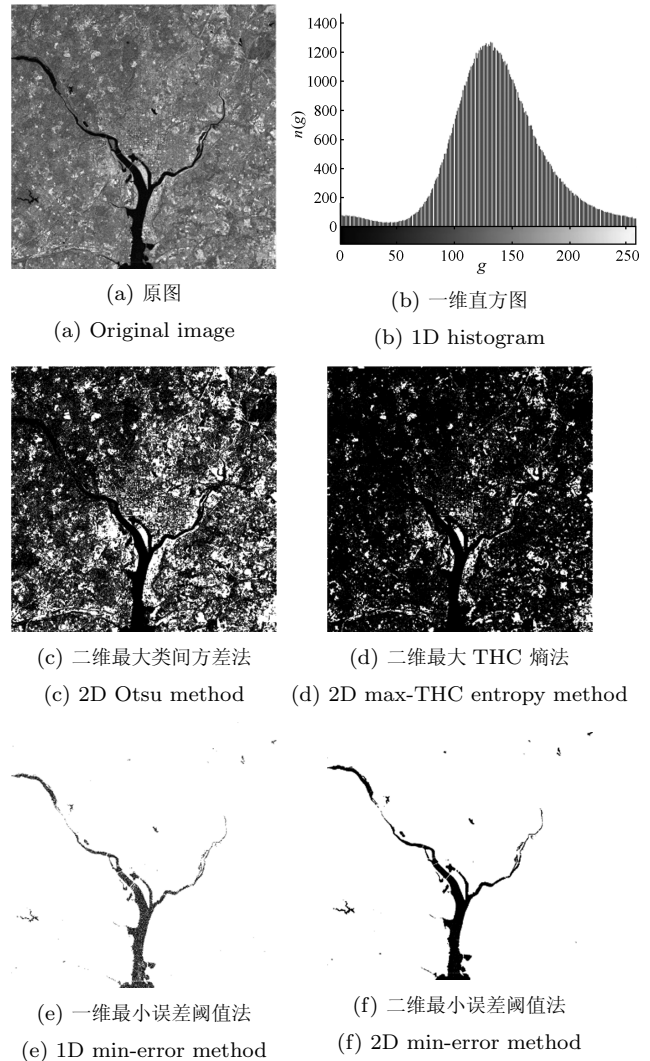


图 3 航拍图像的分割结果

Fig. 3 The segmented results of Airscape image

由图 2(b) 可以看出, 该图像一维直方图为双峰, 但是两个峰大小相差较大, 即图像中目标和背景的方差相差较大. 二维最大类间方差法对于这类图像分割效果不好, 由图 2(c) 可以看出二维最大类间方差法不能对该图像进行有效的分割. 图 2(d) 所示二维最大 THC 熵方法分割效果也不好, 图 2(e) 和 2(f) 所示最小误差法获得了较好的分割效果, 而二维最小误差法分割效果最好.

由图 3(b) 可以看出, 该图像的一维直方图近似为混合高斯分布, 在灰度值靠近 0 的位置有小的峰值, 即该图像中目标和背景方差相差较大. 由图 3(c)~(f) 可以看出, 这种情况下二维最大类间方差法不能有效将目标和背景区分开来, 二维最大 THC 熵方法此时分割效果也不好, 而最小误差方法整体分割效果最好. 由于图像中含有噪声, 二维最小误差方法取得了最好的效果, 将河流与背景有效地分割开来.

表 1 四种算法的运行时间及阈值比较

Table 1 Comparison of CPU time and thresholds by the four methods

	SAR 图像		航拍图像		Number 图像	
	运行时间 (s)	阈值	运行时间 (s)	阈值	运行时间 (s)	阈值
二维最大类间方差递推算法	0.94	(102, 115)	8.62	(144, 153)	1.17	(112, 116)
二维最大 THC 熵递推算法	1.95	(154, 141)	9.16	(185, 172)	1.69	(96, 183)
一维最小误差阈值法	0.53	35	1.46	6	0.60	125
二维最小误差阈值递推算法	3.05	(46, 61)	9.13	(50, 47)	1.8	(153, 135)



图 4 Number 图像的分割结果

Fig. 4 The segmented results of Number image

对于图 4, 该图像的一维直方图为双峰, 且目标和背景方差相差不大, 此时, 二维最大类间方差方法可以对图像进行有效的分割. 但从图 4(c)~(f) 可以看出, 二维最大类间方差法和二维最大 THC 熵法对于图像中背景光照差异较大的中间部分分割误差较大, 而最小误差阈值法则可以有效克服这种由光照差异而引起的噪声, 二维最小误差阈值法比一维最小误差阈值法有更好的去噪效果.

由于二维最小误差法考虑了图像点灰度的邻域空间信息, 从图 2~4 可以看出二维最小误差法的分割效果优于一维最小误差法. 鉴于二维最小误差法的计算复杂性增大, 因此其运行时间比一维算法要大很多. 表 1 给出了这几种算法对于三幅图像的分割阈值及 CPU 耗时的比较. CPU 耗时以整个分割算法的运行时间计算. 可以看出, 尽管二维算法的耗时高于一维算法, 对于普通图像, 还是可以满足实际工程中的要求. 对于航拍图像, 其数据量非常大, 三种二维分割方法均耗时较长, 因此处理该类图像需要较好的硬件环境支持.

5 结论

一维最小误差阈值法是基于“模型匹配”的思想提出的, 该方法假设目标和背景的分布均为正态分布. 本文通过分析一维最小误差阈值法的理论基础, 将其推广到二维情形. 为了提高运行速度, 给出了递推算法. 实验表明最小误差阈值法有更好的适应性, 特别是对目标和背景方差相差较大的情况. 而二维最小误差阈值法在抑制噪声方面比一维方法有更好的表现. 因此, 本文提出的二维最小误差阈值法是一种有效的图像分割算法.

References

- 1 Pal N R, Pal S K. A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition*, 1993, **26**(9): 1277-1294
- 2 Otsu N. A thresholding selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1979, **9**(1): 62-66
- 3 Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1985, **29**(3): 273-285

- 4 Kittler J, Illingworth J. Minimum error thresholding. *Pattern Recognition*, 1986, **19**(1): 41–47
- 5 Mozii F. A note on minimum error thresholding. *Pattern Recognition Letters*, 1991, **12**(6): 349–352
- 6 Zhong Q, Danielsson P E. On minimum error thresholding and its implementations. *Pattern Recognition*, 1988, **7**(4): 201–206
- 7 Fan J L. Notes on poisson distribution-based minimum error thresholding. *Pattern Recognition Letters*, 1998, **19**(5): 425–431
- 8 Ramakrishnan K M, Smiraglia D J, Plass C, Wenger R. Contour area filtering of two-dimensional electrophoresis images. *Medical Image Analysis*, 2006, **10**(3): 353–365
- 9 Sahoo P K, Arora G. Image thresholding using two-dimensional Tsallis-Havrda-Charvát entropy. *Pattern Recognition Letters*, 2006, **27**(6): 520–528
- 10 Nakib A, Oulhadj H, Siarry P. Image histogram thresholding based on multiobjective optimization. *Signal Processing*, 2007, **87**(11): 2516–2534
- 11 Fan Jiu-Lun, Zhao Feng. Two-dimensional Otsu's curve thresholding segmentation method for gray-level image. *Acta Electronica Sinica*, 2007, **35**(4): 751–755
(范九伦, 赵凤. 灰度图像的二维 Otsu 曲线阈值分割法. 电子学报, 2007, **35**(4): 751–755)
- 12 Zhao Feng, Fan Jiu-Lun. One image segmentation method combining 2D Otsu's method and fuzzy entropy. *Application Research of Computers*, 2007, **24**(6): 189–191
(赵凤, 范九伦. 一种结合二维法和模糊熵的图像分割方法. 计算机应用研究, 2007, **24**(6): 189–191)
- 13 Abutaleb A S. Automatic thresholding of gray-level pictures using two-dimensional entropy. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1989, **47**(1): 22–32
- 14 Liu Jian-Zhuang, Li Wen-Qing. The automatic thresholding of gray-level pictures via two-dimensional Otsu method. *Acta Automatica Sinica*, 1993, **19**(1): 101–105
(刘健庄, 栗文青. 灰度图像的二维 Otsu 自动阈值分割法. 自动化学报, 1993, **19**(1): 101–105)
- 15 Gong J, Li L Y, Chen W N. Fast recursive algorithms for two-dimensional thresholding. *Pattern Recognition*, 1998, **31**(3): 295–300
- 16 Kullback S. *Information Theory and Statistics*. New York: Wiley, 1959
- 17 Li Li-Yuan, Gong Jian, Chen Wei-Nan. The gray-level image thresholding method based on the optimal one-dimensional projection of two-dimensional histogram. *Acta Automatica Sinica*, 1996, **22**(3): 315–322
(李立源, 龚坚, 陈维南. 基于二维灰度直方图最佳一维投影的图像分割方法. 自动化学报, 1996, **22**(3): 315–322)

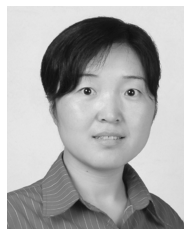


范九伦 西安邮电学院信息与控制系教授. 主要研究方向为模糊集理论、模糊信息处理和模式识别与图像处理.

E-mail: jiulunf@xiyou.edu.cn

(**FAN Jiu-Lun** Professor in the Department of Information and Control, Xi'an Institute of Post and Telecommunications. His research interest covers

fuzzy sets theory, fuzzy information processing, and pattern recognition and image processing.)



雷博 西安电子科技大学博士研究生. 主要研究方向为模式识别、图像处理和模糊系统. 本文通信作者.

E-mail: leileibo@xiyou.edu.cn

(**LEI Bo** Ph. D. candidate at Xidian University. Her research interest covers pattern recognition, image processing, and fuzzy system. Corresponding au-

thor of this paper.)