随机时滞系统的时滞相关无源控制

陈 云 [1,2] 薛安克 [1] 王俊宏 [1]

摘 要 研究随机时滞系统的时滞相关无源性分析和控制问题. 利用 Lyapunov-Krasovskii 方法和松弛矩阵方法, 得到时滞相关的无源性条件. 基于该条件设计时滞相关的随机无源控制器. 文中的结果以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 表示, 可以利用标准的凸优化算法进行有效求解. 通过一个数值例子说明本文方法的有效性.

关键词 随机时滞系统, 无源性, 时滞相关, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

Delay-dependent Passive Control of Stochastic Delay Systems

CHEN Yun[1,2] XUE An-Ke[1] WANG Jun-Hong[1]

Abstract This paper investigates delay-dependent passive analysis and control for stochastic delay systems. Delay-dependent stochastic passive condition for the stochastic time-delay systems is obtained by employing Lyapunov-Krasovskii approach and slack matrix technique. Based on this condition, a delay-dependent passive controller is presented. The proposed results are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs), which can be efficiently solved by standard convex optimization algorithms. A numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the method.

Key words Stochastic delay systems, passivity, delay-dependent, linear matrix inequality (LMI)

来源于电路系统的“无源性”方法最早由 Lurie 和 Popov 引入控制中, 如今已成为控制系统分析与综合的强有力工具之一. 无源性最初是从输入输出角度提出来的, 将输入输出的乘积作为对系统的能量供给率[1] (例如, 用电压和电流的乘积表示电功率). 系统的无源性和稳定性之间有着非常密切的联系. 几十年来, 经过国内外诸多学者的努力, 各类控制系统无源性理论研究取得了丰硕的成果[1−7], 并将无源性方法成功运用于固定床反应器的控制[8] 等工程领域.

由于时滞现象广泛存在于各类实际系统中[9], 时滞系统的无源性分析和控制器设计近年来引起了许多学者的兴趣[10−13]. 文献 [10] 应用输入输出方法得到了时滞无关的无源性分析方法. 文献 [11] 应用 Lyapunov-Krasovskii 方法研究了时滞系统的时滞相关无源性问题, 其结果以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 形式给出. 文献 [12] 讨论了基于观测器的不确定时滞系统的无源控制问题. 文献 [13] 将确定性 (Deterministic) 系统的无源性定义进行拓展, 给出了时滞 Markovian 跳变系统的随机无源性定义, 并设计了相应的无源控制器.

收稿日期 2007-11-05 收修改稿日期 2008-08-02
Received November 5, 2007; in revised form August 2, 2008
国家自然科学基金重点项目 (60434020), 浙江省教育厅科研项目 (Y200701897) 资助
Supported by Key Project of National Natural Science Foundation of China (60434020) and the Science and Technology Research Foundation of Education Bureau of Zhejiang Province (Y200701897)
1. 杭州电子科技大学信息与控制研究所 杭州 310018 2. 杭州电子科技大学运筹与控制研究所 杭州 310018
1. Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018 2. Institute of Operational Research and Cybernetics, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00324

近年来, 随机建模及控制在很多工业领域得到成功的应用, Itô 类型随机时滞系统成为一个研究热点[14]. 文献 [15−17] 分别对不确定随机时滞系统的稳定性、鲁棒镇定和鲁棒 H_∞ 控制等问题进行了探讨. 关于 Itô 随机时滞系统无源性的研究成果则较少. 文献 [18] 讨论了具有 Markovian 跳变参数的 Itô 随机时滞系统的无源性问题. 然而, 文献 [18] 的方法是时滞无关的. 据本文作者所知, Itô 随机时滞系统时滞相关无源控制的研究目前还未见报导, 这正是本文要研究的内容.

本文将研究 Itô 随机时滞系统的随机无源控制问题. 首先, 给出 Itô 随机系统无源性的定义. 然后, 利用 Lyapunov-Krasovskii 方法并引入适当的松弛矩阵, 得到时滞相关的随机无源性条件. 基于该条件, 设计系统的时滞相关随机无源控制器. 在推导中避免使用模型变换方法和交叉项界定技巧. 最后, 将通过数值算例验证本文方法的有效性.

如果没有特殊说明, 本文中所使用的数学符号都是标准的. $|\cdot|$ 为矢量或矩阵的 Euclidean 范数; $\mathrm{E}\{\cdot\}$ 为数学期望算子. $P>0\,(P<0)$ 表示矩阵 P 是正定 (负定) 对称的. 对称矩阵中的对称项用 $*$ 表示.

1 问题描述与定义

考虑下述 Itô 随机时滞系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = [A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-h)+B\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{v}(t)]\mathrm{d}t+ \\ \qquad\qquad [E\boldsymbol{x}(t)+F\boldsymbol{x}(t-h)]\mathrm{d}w(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t)+D\boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \forall\,\theta\in[-h,0] \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^q$ 为被控输出, $\boldsymbol{v}(t)\in\mathbf{R}^p$ 为定义在 $L_2[0,\infty)$ 上的外部扰动信号. 标量 $h>0$ 表示系统的时滞. $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ 为定义在区间 $t\in[-h,0]$ 内的初始条件. A, A_1, B, B_1, E, F, C, D 为具有适当维数的已知实矩阵. $w(t)$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ 内的一维 Wiener 过程, 且满足

$$\mathrm{E}\{\mathrm{d}w(t)\}=0, \quad \mathrm{E}\{\mathrm{d}w^2(t)\}=\mathrm{d}t \tag{2}$$

定义 1. 随机时滞系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$, $\boldsymbol{v}(t)=0$) 称为随机均方稳定的, 如果存在一个标量 $\sigma(\epsilon)>0$, 对于任意的标量 $\epsilon>0$, 使得当

$$\sup_{-h\le s\le 0}\mathrm{E}\{|\boldsymbol{\psi}(s)|^2\}<\sigma(\epsilon)$$

时下式成立

$$\mathrm{E}\{|\,\boldsymbol{x}(t)\,|^2\}<\epsilon, \quad \forall t>0$$

另外, 如果对于任意的初始条件, 有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{|\boldsymbol{x}(t)|^2\}=0$$

则称系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$, $\boldsymbol{v}(t)=0$) 是随机渐近均方稳定的.

下面给出的随机无源性定义是对文献 [2, 11] 中确定性 (Deterministic) 系统无源性定义的推广.

定义 2. 系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$) 称为是随机无源的, 如果在零初始条件下, 对于任意的 $\boldsymbol{v}(t)\in L_2[0,\infty)$, 存在 $\gamma\ge 0$ 使得下式成立

$$2\mathrm{E}\left\{\int_0^t \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s\right\}\ge -\gamma\mathrm{E}\left\{\int_0^t \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{v}(s)\mathrm{d}s\right\}, \quad \forall t>0$$

注 1. 在定义 2 中, 若令 $\gamma=-2\eta$ 且 $\eta>0$, 则得到文献 [18] 中的定义 2, 因此文献 [18] 中的随机无源性定义比本文的定义 2 要更加苛刻一些.

本文的目的是为系统 (1) 设计一个时滞相关的状态反馈控制器, 使得闭环系统是随机无源的.

引理 1[9]**.** 给定任意正定对称矩阵 $R\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 标量 $\tau>0$ 和矢量函数 $\boldsymbol{x}(t):[0,\tau]\to\mathbf{R}^{n\times n}$, 则有

$$-\tau\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)R\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\le-\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}sR\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$$

2　随机无源性分析

首先考虑系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$) 的时滞相关随机无源性问题, 可以得到如下定理.

定理 1. 给定标量 $\gamma\ge0$, 系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$) 是随机无源的, 如果存在正定对称矩阵 $P,\ Q,\ R\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和矩阵 M, $N\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 使得

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_{11}&\Pi_{12}&M&\Pi_{14}&E^{\mathrm{T}}P&hA^{\mathrm{T}}R\\ *&\Pi_{22}&N&0&F^{\mathrm{T}}P&hA_1^{\mathrm{T}}R\\ *&*&-R&0&0&0\\ *&*&*&\Pi_{44}&0&hB_1^{\mathrm{T}}R\\ *&*&*&*&-P&0\\ *&*&*&*&*&-R\end{bmatrix}<0\quad(3)$$

式中

$$\begin{aligned}&\Pi_{11}=PA+A^{\mathrm{T}}P+Q-M-M^{\mathrm{T}}\\&\Pi_{12}=PA_1+M-N^{\mathrm{T}}\\&\Pi_{22}=-Q+N+N^{\mathrm{T}}\\&\Pi_{14}=PB_1-C^{\mathrm{T}}\\&\Pi_{44}=-\gamma I-D-D^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

证明. 为简单起见, 本文采用下述记号

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-h)\\&\boldsymbol{f}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-h)+B_1\boldsymbol{v}(t)\\&\boldsymbol{g}(t)=E\boldsymbol{x}(t)+F\boldsymbol{x}(t-h)\end{aligned}$$

选择 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)\qquad(4)$$

式中

$$\begin{aligned}&V_1(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)\\&V_2(t)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)Q\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&V_3(t)=h\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\alpha)R\boldsymbol{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

式中 $P>0,\ Q>0,\ R>0$.

由 Itô 微分公式[14], 上述 Lyapunov-Krasovskii 泛函沿着系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0,\ \boldsymbol{v}(t)=0$) 的随机微分为

$$\mathrm{d}V(t)=\mathcal{L}V(t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}w(t)\qquad(5)$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t)=\ &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)Q\boldsymbol{x}(t-h)+h^2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{y}(t)-\\&h\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\alpha)R\boldsymbol{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

由引理 1 可知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t)\le\ &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)Q\boldsymbol{x}(t-h)+h^2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{y}(t)-\\&\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha R\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

当 ($\boldsymbol{u}(t)=0,\ \boldsymbol{v}(t)=0$) 时, 由系统 (1) 可得

$$\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{g}(\alpha)\mathrm{d}w(\alpha)\qquad(6)$$

因而, 对于任意的矩阵 $M,N\in\mathbf{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned}0=\ &2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)M+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)N][-\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}(t-h)+\\&\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{g}(\alpha)\mathrm{d}w(\alpha)]\end{aligned}\qquad(7)$$

将式 (7) 加到式 (5) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t)=\ &\mathcal{L}\tilde{V}(t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}w(t)+\\&2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)M+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)N]\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{g}(\alpha)\mathrm{d}w(\alpha)\end{aligned}\qquad(8)$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{V}(t)=\ &\mathcal{L}V(t)+2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)M+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)N]\times\\&\left[-\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}(t-h)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\le\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\Theta\boldsymbol{\xi}(t)\end{aligned}\qquad(9)$$

且 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\quad\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha]$

$$\Theta=\begin{bmatrix}\Theta_{11}&\Theta_{12}&M\\ *&\Theta_{22}&N\\ *&*&-R\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\Theta_{11}=PA+A^{\mathrm{T}}P+Q-M-M^{\mathrm{T}}+E^{\mathrm{T}}PE+h^2A^{\mathrm{T}}RA\\&\Theta_{12}=PA_1+M-N^{\mathrm{T}}+E^{\mathrm{T}}TPF+h^2A^{\mathrm{T}}RA_1\\&\Theta_{22}=-Q+N+N^{\mathrm{T}}+F^{\mathrm{T}}PF+h^2A_1^{\mathrm{T}}RA_1\end{aligned}\qquad(10)$$

如果 $\Theta<0$, 则 $\mathcal{L}\tilde{V}(t)<0$, 根据定义 1 和随机稳定性定理[14] 可知系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0,\boldsymbol{v}(t)=0$) 是随机渐近均方稳定的.

根据 Schur 补引理[9], $\Theta<0$ 等价于

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_{11}&\Lambda_{12}&M&E^{\mathrm{T}}P&hA^{\mathrm{T}}R\\ *&\Lambda_{22}&N&F^{\mathrm{T}}P&hA_1^{\mathrm{T}}R\\ *&*&-R&0&0\\ *&*&*&-P&0\\ *&*&*&*&-R\end{bmatrix}<0\qquad(11)$$

式中

$$\begin{aligned}\Lambda_{11}=\ &PA+A^{\mathrm{T}}P+Q-M-M^{\mathrm{T}}\\\Lambda_{12}=\ &PA_1+M-N^{\mathrm{T}}\\\Lambda_{22}=\ &-Q+N+N^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

显然, $\Pi < 0$ 成立将保证 $\Lambda < 0$ 也是成立的, 此时系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0, \boldsymbol{v}(t)=0$) 是随机渐近均方稳定的.

接下来考虑系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$) 的随机无源性. 选择下述 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+h\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\alpha)R\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{12}$$

对任意非零的 $\boldsymbol{v}(t)$, Lyapunov-Krasovskii 泛函 (12) 沿着系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$) 的随机微分为

$$\mathrm{d}V_1(t)=\mathcal{L}V_1(t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}w(t) \tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_1(t)=\ &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)-\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)Q\boldsymbol{x}(t-h)+h^2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{f}(t)-\\ &h\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\alpha)R\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

与式 (7) 类似, 考虑系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$), 对任意的矩阵 M, $N\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 有

$$\begin{aligned}0=\ &2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)M+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)N]\Bigg[-\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}(t-h)+\\ &\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{g}(\alpha)\mathrm{d}w(\alpha)\Bigg]\end{aligned} \tag{14}$$

将上式加到式 (13) 两边可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_1(t)=\ &\mathcal{L}\tilde{V}_1(t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}w(t)+\\ &2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)M+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)N]\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{g}(\alpha)\mathrm{d}w(\alpha)\end{aligned} \tag{15}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{V}_1(t)=\ &\mathcal{L}V_1(t)+2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)M+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)N]\times\\ &\left[-\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}(t-h)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\le\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\Sigma\boldsymbol{\eta}(t)\end{aligned} \tag{16}$$

且 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\quad \int_{t-h}^{t}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)]$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12} & M & PB_1+h^2A^{\mathrm{T}}RB_1\\ * & \Theta_{22} & N & h^2A_1^{\mathrm{T}}RB_1\\ * & * & -R & 0\\ * & * & * & h^2B_1^{\mathrm{T}}RB_1\end{bmatrix} \tag{17}$$

记 $H(t)=\mathcal{L}\tilde{V}_1(t)-2\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{v}(t)$, 则有

$$H(t)\le\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\Sigma_1\boldsymbol{\eta}(t) \tag{18}$$

式中

$$\Sigma_1=\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12} & M & \Omega_{14}+h^2A^{\mathrm{T}}RB_1\\ * & \Theta_{22} & N & h^2A_1^{\mathrm{T}}RB_1\\ * & * & -R & 0\\ * & * & * & \Omega_{44}+h^2B_1^{\mathrm{T}}RB_1\end{bmatrix} \tag{19}$$

显然, 由 Schur 补引理可知, 如果式 (3) 成立, 则有 $\Sigma_1<0$ 及 $H(t)<0$ 成立.

另外, 由系统的零初始条件, 对任意的 $t>0$

$$\begin{aligned}&2\mathrm{E}\left\{\int_0^t\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s\right\}=\\ &\mathrm{E}\left\{\int_0^t[\mathcal{L}\tilde{V}_1(s)-\gamma\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{v}(s)-H(s)]\mathrm{d}s\right\}\ge\\ &\mathrm{E}\left\{\int_0^t[\mathcal{L}\tilde{V}_1(s)-\gamma\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{v}(s)]\mathrm{d}s\right\}=\mathrm{E}\{\tilde{V}_1(t)\}-\mathcal{E}\{\tilde{V}_1(0)\}-\\ &\gamma\mathrm{E}\left\{\int_0^t\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{v}(s)\mathrm{d}s\right\}\ge-\gamma\mathrm{E}\left\{\int_0^t\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{v}(s)\mathrm{d}s\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

所以, $\Pi<0$ 成立将保证 $\Sigma_1<0$, 以及对任意的 $t>0$ 有 $2\mathrm{E}\{\int_0^t\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s\}\ge-\gamma\mathrm{E}\{\int_0^t\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{v}(s)\mathrm{d}s\}$, 即系统 (1) ($\boldsymbol{u}(t)=0$) 是随机无源的. □

注 2. 文献 [13] 的时滞相关结果是利用奇异模型变换和交叉项界定方法得到的. 而本文在得到时滞相关随机无源性条件 (定理 1) 时, 没有用到任何模型变换和交叉项界定的方法.

3 随机无源控制器设计

利用定理 1 可以为系统 (1) 设计时滞相关的随机无源控制器, 可得如下结论.

定理 2. 给定标量 $\gamma\ge0$ 和 $\lambda>0$, 如果存在正定对称矩阵 $X,\bar{Q}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $\bar{M},\bar{N}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $Y\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 使得

$$\Upsilon=\begin{bmatrix}\Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \bar{M} & \Upsilon_{14} & XE^{\mathrm{T}} & \Upsilon_{16}\\ * & \Upsilon_{22} & \bar{N} & 0 & XF^{\mathrm{T}} & h\lambda XA_1^{\mathrm{T}}\\ * & * & -\lambda X & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & \Omega_{44} & 0 & h\lambda B_1^{\mathrm{T}}\\ * & * & * & * & -X & 0\\ * & * & * & * & * & -\lambda X\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

式中

$$\begin{aligned}&\Upsilon_{11}=AX+XA^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\bar{Q}-\bar{M}-\bar{M}^{\mathrm{T}}\\ &\Upsilon_{12}=A_1X+\bar{M}-\bar{N}^{\mathrm{T}},\quad \Upsilon_{22}=-\bar{Q}+\bar{N}+\bar{N}^{\mathrm{T}}\\ &\Upsilon_{14}=B_1-XC^{\mathrm{T}},\quad \Upsilon_{16}=h\lambda(AX+BY)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$ 为系统 (1) 的随机无源控制器, 且相应的控制器增益矩阵为

$$K=YX^{-1} \tag{22}$$

证明. 设 $R=\lambda P$, 其中 $\lambda>0$ 为一个标量参数. 将式 (3) 中的 A 利用 $A_K=A+BK$ 替换可得

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{11} & \Omega_{12} & M & \Omega_{14} & E^{\mathrm{T}}P & hA_K^{\mathrm{T}}\lambda P\\ * & \Omega_{22} & N & 0 & F^{\mathrm{T}}P & hA_1^{\mathrm{T}}\lambda P\\ * & * & -\lambda P & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & \Omega_{44} & 0 & hB_1^{\mathrm{T}}\lambda P\\ * & * & * & * & -P & 0\\ * & * & * & * & * & -\lambda P\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

式中

$$\Xi_{11}=PA_K+A_K^{\mathrm{T}}P+Q-M-M^{\mathrm{T}}$$

利用 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, P^{-1}, P^{-1}\}$ 分别左乘和右乘式 (23) 且令

$$\begin{aligned}&X=P^{-1},\quad Y=KX,\quad \bar{Q}=XQX\\ &\bar{M}=XMX,\quad \bar{N}=XNX\end{aligned} \tag{24}$$

再经过简单的运算即可得式 (21). 因此, 根据式 (24) 可得控制器增益矩阵为 $K = YX^{-1}$. □

注 3. 定理 2 应用了参数 (即标量 λ) 调整的方法, 可以利用 Matlab 优化工具箱中的命令 fminsearch 来求解.

注 4. 与文献 [15−17] 类似, 容易将本文方法推广到参数不确定随机时滞系统, 得到相应的时滞相关随机无源性分析和控制器设计的结论. 具体形式略.

4 数值算例

本节通过一个数值例子来说明本文所提方法的有效性.

例 1. 考虑下述系统

$$A = \begin{bmatrix} -0.9 & -2.2 \\ 2.2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = F = aI$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 1.05 \tag{25}$$

给定 $\gamma = 0$, $a = 0.5$, 应用文献 [18] 的方法, 系统 (25) 对应的自治系统 ($B = 0$) 没有可行解. 而利用定理 1, 对不同的 a 值该系统允许的最大时滞上界 h_M 如表 1 所示.

表 1　不同 a 对应的 h_M ($\gamma = 0$)
Table 1　h_M for different a ($\gamma = 0$)

a	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
h_M	0.6886	0.4580	0.3209	0.2105	0.1171	0.0370	0

显然, 随着 a 增大, 随机干扰 $[E\boldsymbol{x}(t) + F\boldsymbol{x}(t-h)]\mathrm{d}w(t)$ 逐渐增强, 即随机性表现得越明显, 则能保证系统随机无源的最大时滞 h_M 逐渐减小, 直到系统不再具有随机无源性能.

由定理 1, 当 $\gamma = 0$, $a = 1.0$ 时, 式 (25) 对应的自治系统不是随机无源的 (从表 1 的变化规律也可以看出, 当 $\gamma = 0$, $a > 0.8$ 时, 式 (25) 对应的自治系统不是随机无源的). 但是, 如果定理 2 有可行解, 则表明式 (25) 对应的闭环系统是随机无源的. 如果 $\gamma = 0$, $a = 1.0$, $\lambda = 0.1$, 求解线性矩阵不等式 (21) 可得保证式 (21) 成立的最大时滞为 $h_M = 1.6988$, 相应的控制器为

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) = [-2.9113 \quad -1.7162]\,\boldsymbol{x}(t) \tag{26}$$

这表明, 利用所设计的状态反馈控制 (26), 可以使得开环不是随机无源的系统 (25) 对应的闭环系统是随机无源的.

5 结论

本文讨论了随机时滞系统时滞相关的随机无源性分析和随机无源状态反馈控制问题. 本文的结论是利用 Lyapunov-Krasovskii 方法和松弛矩阵方法得到的. 随机无源性分析结果和控制器存在的充分条件均用线性矩阵不等式表示. 设计的控制器使得闭环系统是随机无源的. 本文方法的有效性通过数值例子得到了验证.

References

1 van der S A. *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. London: Springer-Verlag, 1996

2 Brogliato B, Lozano R, Maschke B. *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*. London: Springer-Verlag, 2000

3 Lin W, Shen T L. Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty. *Automatica*, 1999, **35**(1): 35−47

4 Gao H J, Chen T W, Chai T Y. Passivity and passification for networked control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, **46**(4): 1299−1322

5 Zhao J, Hill D J. Passivity and stability of switched systems: a multiple storage function method. *Systems and Control Letters*, 2008, **57**(2): 158−164

6 Bemporad A, Bianchini G, Brogi F. Passivity analysis and passification of discrete-time hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(4): 1004−1009

7 Rojas O J, Bao J, Lee P L. On dissipativity, passivity and dynamic operability of nonlinear processes. *Journal of Process Control*, 2008, **18**(5): 515−526

8 Chou Y S, Wu C H. Passivity-based control of the phthalic anhydride fixed-bed reactor. *Chemical Engineering Science*, 2007, **62**(5): 1282−1297

9 Gu K Q, Kharitonov V L, Chen J. *Stability of Time-delay Systems*. Boston: Birkhauser, 2003

10 Niculescu S I, Lozano R. On the passivity of linear delay systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2001, **46**(3): 460−464

11 Gui W H, Liu B Y, Tang Z H. A delay-dependent passivity criterion of linear neutral delay systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 2006, **4**(2): 201−206

12 Cui B T, Hua M G. Observer-based passive control of linear time-delay systems with parametric uncertainty. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, **32**(10): 160−167

13 Chen W H, Guan Z H, Lu X M. Passive control synthesis for uncertain Markovian jump linear systems with multiple mode-dependent time-delays. *Asian Journal of Control*, 2005, **7**(2): 135−143

14 Mao X R. *Stochastic Differential Equations and Their Applications*. New York: Horwood Publishing Limited, 1997

15 Xu S Y, Shi P, Chu Y M, Zou Y. Robust stochastic stabilization and H_∞ control of uncertain neutral stochastic time-delay systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **314**(1): 1−6

16 Chen Y, Xue A K. Improved stability criterion for uncertain stochastic delay systems with nonlinear uncertainties. *Electronics Letters*, 2008, **44**(7): 458−459

17 Chen Y, Xue A K, Zhou S S, Lu R Q. Delay-dependent robust control for uncertain stochastic time-delay systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 2008, **27**(4): 447−460

18 Fu Y M, Duan G R. Stochastic stabilizability and passive control for time-delay systems with Markovian jumping parameters. In: Proceedings of the 8th Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. Kunming, China: IEEE, 2004. 1757−1761

陈　云　博士, 讲师. 主要研究方向为时滞系统和鲁棒控制. 本文通信作者. E-mail: cloudscy@hdu.edu.cn
(**CHEN Yun**　Ph. D., lecturer. His research interest covers time-delay systems and robust control. Corresponding author of this paper.)

薛安克　博士, 杭州电子科技大学教授. 主要研究方向为鲁棒控制、信息融合、智能控制、工业过程控制及应用等.
E-mail: akxue@hdu.edu.cn
(**XUE An-Ke**　Ph. D., professor at Hangzhou Dianzi University. His research interest covers robust control, information fusion, intelligent control, and industrial process control and applications.)

王俊宏　讲师. 主要研究方向为鲁棒控制理论与应用.
E-mail: junhongwang@hdu.edu.cn
(**WANG Jun-Hong**　Lecturer. His research interest covers robust control theory and applications.)