

# 一种估计奇异摄动饱和系统 稳定域的方法

辛焕海<sup>1</sup> 吴荻<sup>1</sup> 甘德强<sup>1</sup> 邱家驹<sup>1</sup>

**摘要** 针对奇异摄动饱和系统, 提出了一种估计其稳定域的降阶方法. 结合饱和函数的特殊性质, 证明了此类系统的稳定域可分解为伴随系统的不变集与一个足够大球体的笛卡尔积. 将原系统稳定域估计问题转化为低阶伴随系统稳定域的估计问题, 利用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 优化方法估计伴随系统的稳定域以减少保守性. 本方法不仅可以克服奇异摄动饱和系统的奇异性, 还可以一定程度克服系统的“维数灾”等问题.

**关键词** 稳定域, 奇异摄动系统, 饱和非线性, 线性矩阵不等式  
**中图分类号** TP13

## A Method for Estimating the Stability Region of Singular Perturbation Systems with Saturation Nonlinearities

XIN Huan-Hai<sup>1</sup> WU Di<sup>1</sup> GAN De-Qiang<sup>1</sup>  
QIU Jia-Ju<sup>1</sup>

**Abstract** A reduced-order method was proposed for estimating the stability region of singular perturbation dynamical systems with saturation nonlinearities. Based on the properties of the saturation function, it was proved that the stability region of such dynamical systems can be decomposed into Cartesian product of an invariant set of their adjoint systems and a sufficiently large ball. The stability region estimation of the singularly perturbed systems can be replaced by that of the adjoint systems, and an optimization method based on linear matrix inequality was provided to reduce the conservativeness in the estimation. The proposed method can eliminate the singularity and overcome the dimension disaster to some extent.

**Key words** Stability region, singular perturbation dynamical systems, saturation nonlinearities, linear matrix inequality (LMI)

在实际工程 (如电力系统) 中, 控制器往往包含非线性环节, 这将影响预期的控制性能<sup>[1-3]</sup>. 而饱和非线性将使系统稳定性问题复杂化<sup>[4-5]</sup>, 因此饱和和线性系统稳定域的估计得到了人们的广泛关注, 在此方面也已取得了很大的进展<sup>[6-8]</sup>.

然而, 对于一类包含高增益快速控制器的饱和和线性系统, 如电力系统中扰动分析模型<sup>[2-3, 9]</sup>, 它的模型阶次非常高, 而且状态变量随时间的变化速度差异很大, 导致已有方法在处理此类高维大系统时会遇到计算量大、非刚性等难点<sup>[10-11]</sup>. 实际上, 此类饱和系统的闭环形式可以写成奇异摄

动系统, 为突出此类系统的特殊性, 本文称之为“奇异摄动饱和和系统”.

奇异摄动系统稳定性的研究目前主要集中在参数稳定域和状态稳定域两个方面<sup>[12-14]</sup>. 本文主要研究一类含饱和环节的特殊奇异摄动系统, 用 Lyapunov 方法估计此类系统的状态稳定域, 根据此类奇异摄动饱和系统的特殊性质简化其稳定域的估计步骤, 力求克服前面提到的计算量大和非刚性等难点.

文中证明了在一定条件下, 奇异摄动饱和系统的稳定域可以解耦为低维伴随系统的不变集与一个球心在原点且半径足够大球体的笛卡尔积. 进一步结合线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI)<sup>[15]</sup> 的优化方法获得伴随系统稳定域的最优估计, 从而得到一种估计奇异摄动饱和和系统稳定域的降阶算法. 该算法基于低维伴随系统, 所以可以在一定程度上克服原高维系统的奇异性 and 前面提到的计算量大与非刚性等难点. 算例仿真验证了方法的有效性.

符号: 对于  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \geq (\leq) \mathbf{y}$  表示  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的任意分量都是非负 (正) 实数; 矩阵  $A \geq (>) 0$  表示  $A$  是 (半) 正定的对称矩阵; “ $\Leftrightarrow$ ” 表示 “等价于”;  $\|\cdot\|$  表示范数, 如不特别说明指 2-范数,  $\|\cdot\|_F$  表示 F-范数.

### 1 问题描述及预备引理

#### 1.1 基本模型

考虑如下的奇异摄动饱和和系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_{11}\mathbf{x} + A_{12}\mathbf{y} + B_1\text{sat}(K_{11}\mathbf{x} + K_{12}\mathbf{y}) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{y}} = A_{21}\mathbf{x} + A_{22}\mathbf{y} + B_2\text{sat}(K_{21}\mathbf{x} + K_{22}\mathbf{y}) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_1}$ 、 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n_2}$  是状态变量,  $\varepsilon > 0$  是考虑的小参数, 后文将认为它是足够小量;  $\text{sat}(\cdot)$  是由饱和函数构成的向量函数, 其表达式为

$$\text{sat}(\mathbf{u}) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T \quad (2)$$

式中,  $m$  是所有饱和函数的数目,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ ,  $\text{sat}(u_i) = \min\{1, \text{sgn}(u_i) \cdot |u_i|\}$ .

系统 (1) 是一种含饱和和环节的特殊奇异摄动动力系统, 本文关注的问题是利用饱和函数的特殊性质估计其稳定域. 令

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1}B_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

系统 (1) 可写成

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi} + B\text{sat}(K\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi}_0 \in X_0 \quad (5)$$

其中,  $X_0$  表示由预想初始状态组成的集合.

记系统 (5) 的稳定域为

$$\Omega = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{n_1+n_2} | \varphi_t(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0\} \quad (6)$$

其中  $\varphi_t(\boldsymbol{\xi})$  表示系统 (5) 从状态点  $\boldsymbol{\xi}$  出发的轨迹. 再记

$$F_1 = \{\boldsymbol{\xi} | -\mathbf{1} \leq K\boldsymbol{\xi} \leq \mathbf{1}\} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{1}$  表示元素都为 1 且有合适维的列向量.

收稿日期 2007-09-06 收修改稿日期 2007-12-24  
Received September 6, 2007; in revised form December 24, 2007  
国家自然科学基金 (50595411, 50807046), 教育部新世纪人才计划 (NCET-04-0529), 中国博士后基金 (20070420224) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (50595411, 50807046), Ministry of Education of China under New Century Outstanding Investigator Program (NCET-04-0529), and Postdoctoral Science Foundation of China (20070420224)  
1. 浙江大学电气学院电机系 杭州 310027  
1. Department of Electrical Engineering, College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01549

由于饱和的影响,只有在集合  $F_1$  中系统 (5) 才呈现线性系统特性,而在  $F_1$  外很难用解析方法获得其动态特性,所以实际上稳定域  $\Omega$  很难定性刻画. 不仅如此,因为系统 (5) 本质是奇异摄动系统,所以直接利用传统的估计方法会出现条件数大等非刚性问题. 为克服此难点,本文考虑在系统 (5) 是奇异摄动系统的前提下(即  $\varepsilon > 0$  很小),利用此系统的特殊性质分析其稳定性并给出估计稳定域的降阶算法. 在后面的分析中,将始终认为以下假设成立.

**假设 1.** 对于系统 (5),原点是双曲稳定平衡点,即  $A + BK$  是稳定矩阵 (Hurwitz 矩阵).

**假设 2.** 矩阵  $A_{22}$  是稳定的且  $A_{22} + B_2K_{22}$  可逆.

**假设 3.** 参数  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  且  $\varepsilon^* > 0$  足够小.

1.2 预备引理

设矩阵  $L(\varepsilon)$  满足

$$\Gamma = A_{21} + B_2K_{21} + (A_{22} + B_2K_{22})L - \varepsilon LA_x = 0 \quad (8)$$

式中,  $A_x = A_{11} + A_{12}L + B_1(K_{11} + K_{12}L)$ .

**引理 1.** 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 满足式 (8) 的矩阵  $L(\varepsilon)$  唯一存在且是参数  $\varepsilon$  的光滑函数.

**证明.** 因为  $\Gamma$  是  $L$  的光滑函数, 而由假设 2 可知  $\frac{\partial \Gamma}{\partial L} \Big|_{\varepsilon=0} = A_{22} + B_2K_{22}$  非奇异, 所以在假设 3 的前提下由隐函数定理<sup>[16]</sup> 可得结论.  $\square$

在此基础上,对系统 (1) 作如下坐标变换

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -L(\varepsilon) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (\text{或 } \boldsymbol{\xi}_1 = S\boldsymbol{\xi}) \quad (9)$$

式中,  $I$  表示单位矩阵,  $\boldsymbol{\xi}_1 = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{y}_1^T)^T$ .

系统 (1) 在变换后的坐标  $\boldsymbol{\xi}_1$  下记为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_x \mathbf{x}_1 + A_{12} \mathbf{y}_1 + B_1 \mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{y}}_1 = (A_{22} - \varepsilon LA_{12}) \mathbf{y}_1 - \varepsilon LB_1 \mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + B_2 \mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = \text{sat}(K_{12} \mathbf{y}_1 + (K_{11} + K_{12}L) \mathbf{x}_1) - (K_{11} + K_{12}L) \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = \text{sat}(K_{22} \mathbf{y}_1 + (K_{21} + K_{22}L) \mathbf{x}_1) - (K_{21} + K_{22}L) \mathbf{x}_1$ .

经过坐标变换后,我们仅需估计系统 (10) 的稳定域即可. 为此,构造系统 (10) 的如下两个伴随系统

$$\dot{\mathbf{x}}_a = A_x \mathbf{x}_a \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{y}_a}{d\tau} = (A_{22} - \varepsilon LA_{12}) \mathbf{y}_a - \varepsilon LB_1 \mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_a) + B_2 \mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_a) \quad (12)$$

式 (11) 和 (12) 中变量与式 (10) 中变量相同.

再定义如下集合

$$F_2 = \left\{ \mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^{n_2} \mid -\mathbf{1} \leq \tilde{K} \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{1} \right\} \quad (13)$$

$$F_3 = \left\{ \mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^{n_2} \mid -\sigma \mathbf{1} \leq \tilde{K} \mathbf{x}_1 \leq \sigma \mathbf{1} \right\} \quad (14)$$

其中,  $\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{11} + K_{12}L \\ K_{21} + K_{22}L \end{bmatrix}$ ,  $\sigma \in (0, 1)$  是常数.

系统 (10) 和 (12) 的轨迹都与参数  $\varepsilon$  相关, 但为叙述简便,在不引起混淆的前提下我们引入如下缩写(省略  $\varepsilon$ ): 记  $\boldsymbol{\xi}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  为系统 (10) 从  $\boldsymbol{\xi}_1^0$  出发的  $t$  时刻的轨迹,  $\mathbf{x}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  和  $\mathbf{y}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  分别为它的  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{y}_1$  分量; 伴随系统 (11) 从  $\mathbf{x}_1^0$  出

发的时刻  $t$  的轨迹为  $\mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0)$ ,  $\mathbf{y}_a(\tau, \mathbf{y}_1^0)$  为系统 (12) 从  $\mathbf{y}_1^0$  出发的时刻  $\tau$  的轨迹.

**注 1.** 系统 (10) 的时间尺度为  $t$ , 然而对于伴随系统 (12), 变量代换  $\tau = t/\varepsilon$  导致其时间尺度变为  $\tau$ . 因此, 如果  $\mathbf{x}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  和  $\mathbf{y}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  是系统 (10) 的轨迹, 那么  $\mathbf{x}_1(\varepsilon\tau, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  和  $\mathbf{y}_1(\varepsilon\tau, \boldsymbol{\xi}_1^0)$  将满足式 (12)<sup>[12]</sup>, 即  $\mathbf{y}_a(\tau, \mathbf{y}_1^0) = \mathbf{y}_1(\varepsilon\tau, \boldsymbol{\xi}_1^0)$ , 其中  $\mathbf{y}_1^0$  是  $\boldsymbol{\xi}_1^0$  的  $\mathbf{y}_1$  分量. 后面的证明将利用此性质.

下面给出几个引理说明伴随系统的部分性质.

**引理 2.** 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 原点是伴随系统 (11) 的双曲稳定平衡点.

**证明.** 由  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$  的表达式, 在坐标  $\boldsymbol{\xi}_1$  下系统 (10) 的雅可比矩阵为  $J = \begin{bmatrix} A_x & * \\ 0 & \varepsilon^{-1}(A_{22} + B_2K_{22} - \varepsilon LB_1K_{12}) \end{bmatrix}$ .

又由假设 1 可知原点是系统 (5) 的双曲平衡点, 所以  $J$  是稳定的, 从而  $A_x$  是稳定的矩阵.  $\square$

**引理 3**<sup>[3]</sup>. 如果  $|a| \leq 1$  成立, 则  $|\text{sat}(a+b) - a| \leq |b|$  成立. 其中,  $a, b \in \mathbf{R}$ .

**引理 4.** 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 如果  $\mathbf{x}_1 \in F_2$ , 那么存在与  $\mathbf{x}_1 \in F_2$  无关的正数  $\beta_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ), 使得  $\|\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)\| \leq \beta_1 \|\mathbf{y}_1\|$  和  $\|\mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)\| \leq \beta_2 \|\mathbf{y}_1\|$ .

**证明.** 令  $p_i$  表示  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$  的第  $i$  个元素, 因为

$$p_i = (\text{sat}(K_{12} \mathbf{y}_1 + (K_{11} + K_{12}L) \mathbf{x}_1) - (K_{11} + K_{12}L) \mathbf{x}_1)_i = \text{sat}((K_{12})_i \mathbf{y}_1 + (K_{11} + K_{12}L)_i \mathbf{x}_1) - (K_{11} + K_{12}L)_i \mathbf{x}_1$$

其中, 符号  $(\cdot)_i$  表示取第  $i$  行元素. 因为  $\mathbf{x}_1 \in F_2$ , 所以  $|(K_{11} + K_{12}L)_i \mathbf{x}_1| \leq 1$ . 再应用引理 3 可得  $|p_i| \leq |(K_{12})_i \mathbf{y}_1| \leq \|(K_{12})_i\| \|\mathbf{y}_1\|$ .

因此, 存在  $\beta_1 > 0$ , 使得  $\|\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)\| \leq \beta_1 \|\mathbf{y}_1\|$  成立.

类似可以证明  $|q_i| \leq |(K_{22})_i \mathbf{y}_1| \leq \|(K_{22})_i\| \|\mathbf{y}_1\|$ , 故存在  $\beta_2 > 0$ , 使得  $\|\mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)\| \leq \beta_2 \|\mathbf{y}_1\|$  也成立.  $\square$

**注 2.** 显然, 如果矩阵  $K_{22} = 0$ , 那么当  $\mathbf{x}_1 \in F_2$  时, 引理 4 中  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$ , 所以在引理 4 中可令  $\beta_2$  等于 0.

2 稳定域解耦基本理论

本节将分析系统 (10) 稳定域的可解耦性的充分条件. 首先说明系统 (10) 的轨迹与它的伴随系统轨迹的关系 (定理 1 和定理 2). 在此基础上进一步证明伴随系统在集合  $F_3$  的不变集和半径足够大的球体的笛卡尔积是系统 (10) 稳定域的子集 (定理 3). 本节最后还给出了定理 1 至定理 3 成立的充分条件 (定理 4). 下面是主要结论.

**定理 1.** 对状态变量  $\boldsymbol{\xi}_1^0$ , 记它的  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{y}_1$  分量分别为  $\mathbf{x}_1^0$  和  $\mathbf{y}_1^0$ . 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 如果存在  $t^* > 0$  使得系统 (10) 的轨迹满足:

1)  $\mathbf{x}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0) \in F_2$ ;

2) 存在与  $\varepsilon$  无关的正数  $\gamma_1$  和  $l$  满足  $\|\mathbf{y}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1 t/\varepsilon}$ .

那么系统 (10) 与它的伴随系统 (11) 的轨迹存在如下关系:

$$\mathbf{x}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0) = \mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) + O(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, t^*]$$

特别地, 如果  $t^*$  是无穷大量时结论仍然成立, 且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{x}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0) \rightarrow \mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0)$ .

**证明.** 在时间段  $t \in [0, t^*]$  作如下证明.

因为  $\|\mathbf{y}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1 t/\varepsilon}$  且  $\mathbf{x}_1(t, \boldsymbol{\xi}_1^0) \in F_2$ , 所以由引理 4, 存在  $\beta_2 > 0$ , 使得  $\|\mathbf{p}\| \leq \beta_1 \|\mathbf{y}_1\|$  成立. 因此, 由假设 3

可知存在常数  $M_1 > 0$ , 满足

$$\|A_{12}\mathbf{y}_1 + B_1\mathbf{p}\| \leq M_1 e^{-\gamma_1 t/\varepsilon} \tag{15}$$

由引理 2,  $A_x$  是稳定的矩阵, 所以存在正数  $M_2 > 0$  和  $\gamma_2 > 0$  满足  $\|e^{A_x t}\| \leq M_2 e^{-\gamma_2 t}$ [5], 故有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{A_x(t-s)} (A_{12}\mathbf{y}_1 + B_1\mathbf{p}) ds \right\| \leq \\ & \int_0^t \left\| e^{A_x(t-s)} \right\| \|A_{12}\mathbf{y}_1 + B_1\mathbf{p}\| ds \leq \\ & M_1 M_2 e^{-\gamma_2 t} \int_0^t e^{-(\gamma_1/\varepsilon - \gamma_2)s} ds = \\ & \varepsilon M_1 M_2 (\gamma_1 - \varepsilon \gamma_2)^{-1} \left( e^{-\gamma_1 t/\varepsilon} - e^{-\gamma_2 t} \right) \end{aligned} \tag{16}$$

注意, 上面所存在的正数都是与  $\varepsilon$  无关的. 又因  $|e^{-\gamma_1 t/\varepsilon} - e^{-\gamma_2 t}|$  有界, 从而由式 (16) 和假设 3 可得, 存在与  $\varepsilon$  无关的正数  $M_3 > 0$  满足

$$\left\| \int_0^t e^{A_x(t-s)} (A_{12}\mathbf{y}_1 + B_1\mathbf{p}) ds \right\| \leq M_3 \varepsilon \tag{17}$$

另外, 由式 (10) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) &= e^{A_x t} \mathbf{x}_1^0 + \int_0^t e^{A_x(t-s)} (A_{12}\mathbf{y}_1 + B_1\mathbf{p}) ds = \\ \mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) &+ \int_0^t e^{A_x(t-s)} (A_{12}\mathbf{y}_1 + B_1\mathbf{p}) ds \end{aligned} \tag{18}$$

所以结合式 (17) 和 (18), 得

$$\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) = \mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) + O(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, t^*] \tag{19}$$

显然, 无论  $t^*$  是无穷大量还是有界量, 上述证明过程都成立. 如果  $t^*$  是无穷大量时, 令  $t \rightarrow \infty$ , 那么有  $e^{-\gamma_1 t/\varepsilon} - e^{-\gamma_2 t} \rightarrow 0$ , 即  $M_3 \rightarrow 0$ , 所以有

$$\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) \rightarrow \mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0), \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时} \tag{20}$$

综合式 (19) 和 (20) 可得命题成立.  $\square$

由定理 1 可知, 在一定条件下, 系统 (10) 的轨迹可以由其伴随系统的轨迹来近似, 而且误差随着时间的增大而减小. 因此, 通过分析伴随系统轨迹的稳定性来分析系统 (10) 轨迹的稳定性成为可能. 为进一步应用此结论, 下面的定理 2 将系统 (10) 所满足的条件转化为伴随系统 (11) 和 (12) 所满足的条件.

**定理 2.** 对状态变量  $\xi_1^0$ , 记它的  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{y}_1$  分量分别为  $\mathbf{x}_1^0$  和  $\mathbf{y}_1^0$ . 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 如果存在  $t^* > 0$  使得下面的条件成立:

1) 伴随系统 (11) 的轨迹满足:  $\mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) \in F_3, \forall t \in [0, t^*]$ ;

2) 对  $\forall t \in [0, t^*]$  (或等价地说  $\forall \tau \in [0, t^*/\varepsilon]$ ), 伴随系统 (12) 中  $\mathbf{x}_1(\tau) \in F_2$  成立, 且存在与  $\varepsilon$  无关的正数  $\gamma_1$  和  $l$  满足  $\|\mathbf{y}_a(\tau, \mathbf{y}_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1 \tau}$ .

那么有如下结论成立:

1) 系统 (10) 的轨迹满足  $\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) \in F_2, \forall t \in [0, t^*]$ ;

2) 定理 1 的结论成立. 特别地, 当  $t^*$  是无穷大量时结论也仍然成立.

**证明.** 1) 因为  $\mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) \in F_3 \subset F_2$  成立, 所以有  $\mathbf{x}_a(0, \xi_1^0) = \mathbf{x}_1^0 \in F_2$ . 用反证法证明结论 1).

如果结论 1) 不成立, 根据  $F_2$  的定义以及轨迹连续性, 存在  $t' \in (0, t^*)$ , 使得

$$\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) \in F_2, \quad \forall t \in [0, t'] \tag{21}$$

且  $\mathbf{x}_1(t', \xi_1^0) \in \partial F_2$ , 即存在下标  $i (1 \leq i \leq m)$ , 满足

$$\left| (\tilde{K})_i \mathbf{x}_1(t', \xi_1^0) \right| = 1$$

其中  $\partial F_2$  表示集合  $F_2$  的边界. 根据式 (13) 中集合  $F_2$  的定义及轨迹连续性, 还存在  $t'' \in (0, t')$ , 使得

$$1 > \left| (\tilde{K})_i \mathbf{x}_1(t'', \xi_1^0) \right| \geq 0.5(1 + \delta) \tag{22}$$

由系统 (10) 和 (12) 轨迹的关系 (注 1), 并由已知条件 2) 得

$$\|\mathbf{y}_a(\tau, \mathbf{y}_1^0)\| = \|\mathbf{y}_1(\varepsilon\tau, \xi_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1 \tau}, \quad \forall \tau \in [0, t'/\varepsilon]$$

即

$$\|\mathbf{y}_1(t, \xi_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1 t/\varepsilon}, \quad \forall t \in [0, t']$$

因此当  $t \in [0, t']$  时, 定理 1 的条件都成立, 从而可得

$$\mathbf{x}_1(t'', \xi_1^0) = \mathbf{x}_a(t'', \mathbf{x}_1^0) + O(\varepsilon) \tag{23}$$

此外, 由式 (22) 和 (23), 可得

$$\left| (\tilde{K})_i \mathbf{x}_a(t'', \mathbf{x}_1^0) + O(\varepsilon) \right| \geq 0.5(1 + \delta)$$

变形后为

$$0.5(1 + \delta) \leq \left| (\tilde{K})_i \mathbf{x}_a(t'', \mathbf{x}_1^0) \right| + |O(\varepsilon)| \tag{24}$$

但由已知条件 1) 可知  $\mathbf{x}_a(t'', \mathbf{x}_1^0) \in F_3$  成立, 所以

$$\left| (\tilde{K})_i \mathbf{x}_a(t'', \mathbf{x}_1^0) \right| \leq \sigma \tag{25}$$

所以结合式 (24) 和 (25) 有

$$M_3 \varepsilon \geq |O(\varepsilon)| \geq 0.5(1 - \delta) = \delta_1$$

其中  $M_3 > 0$  是与  $\varepsilon$  无关的常数 (见定理 1 中证明).

因为  $\sigma < 1$  是常数, 故  $\delta_1 > 0$  也是常数, 所以由假设 3 可得上式是矛盾的, 故结论 1) 成立.

2) 由结论 1) 并由已知条件 2), 当  $t \in [0, t^*]$  时, 定理 1 的条件成立, 故结论 2) 成立. 同样地, 上面证明过程中并没有要求  $t^*$  有界, 显然当  $t^*$  是无穷量时, 定理 1 的条件仍然成立.  $\square$

在此结论基础上, 下面的结论说明伴随系统和原系统稳定域之间的关系.

**定理 3.** 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 如果如下条件成立:

1)  $\tilde{\Omega}_x \subset F_3$  是系统 (11) 包含原点的不变集;

2) 对系统 (12), 当  $\mathbf{x}_1 \in F_2$  恒成立时其轨迹满足: 存在与  $\varepsilon$  无关的正数  $\gamma_1$  和  $l$  使得

$$\|\mathbf{y}_a(\tau, \mathbf{y}_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1 \tau}, \quad \forall \mathbf{y}_1^0 \in \tilde{\Omega}_y, \quad \forall \tau \geq 0$$

那么笛卡尔积  $\tilde{\Omega}_x \times \tilde{\Omega}_y$  是系统 (10) 稳定域的子集. 其中  $\tilde{\Omega}_y \in \mathbf{R}^{n_2}$  是中心在原点、半径足够大但有界的球.

**证明.** 任意选取  $\xi_1^0 \in \tilde{\Omega}_x \times \tilde{\Omega}_y$ , 并记它的分量为  $\mathbf{x}_1^0$  和  $\mathbf{y}_1^0$ . 因为  $\tilde{\Omega}_x \subset F_3$  是伴随系统 (11) 的不变集, 又因  $A_x$  是稳定矩阵 (引理 2), 所以  $\tilde{\Omega}_x$  是系统 (11) 稳定域的子集[5], 从而

$\mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) \in \tilde{\Omega}_x \subset F_3$  对  $\forall t \geq 0$  都成立且满足  $\|\mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0)\| \rightarrow 0$ . 再结合已知条件 2) 可得定理 2 中所有条件都成立 (对应于  $t^*$  是无穷大量), 从而有  $\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) \rightarrow \mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) \rightarrow 0$ .

因  $\mathbf{x}_a(t, \mathbf{x}_1^0) \in F_3$  恒成立, 所以  $\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0) \in F_2$  也恒成立 (定理 2), 又因  $\mathbf{x}_1(\varepsilon\tau, \xi_1^0)$  和  $\mathbf{y}_1(\varepsilon\tau, \xi_1^0)$  满足系统 (12) (见注 1) 且有  $t = \varepsilon\tau$ , 从而再结合已知条件 2) 得  $\|\mathbf{y}_1(\varepsilon\tau, \xi_1^0)\| = \|\mathbf{y}_a(\tau, \mathbf{y}_1^0)\| \leq l e^{-\gamma_1\tau}$ .

因此, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\|\mathbf{y}_1(t, \xi_1^0)\| \rightarrow 0$ .

综上分析, 对  $\forall \xi_1^0 \in \tilde{\Omega}_x \times \tilde{\Omega}_y$ , 系统轨迹  $\mathbf{x}_1(t, \xi_1^0)$  和  $\mathbf{y}_1(t, \xi_1^0)$  都收敛到零, 因此笛卡尔积  $\tilde{\Omega}_x \times \tilde{\Omega}_y$  是系统 (10) 的稳定域子集.  $\square$

定理 3 说明, 在伴随系统 (12) 指数收敛的前提下, 原奇异摄动饱和和系统稳定域可分解为伴随系统的不变集与一个半径足够大的球体的笛卡儿积. 因此, 要估计原系统的稳定域, 只需要确定伴随系统 (11) 的不变集即可. 不仅如此, 伴随系统是奇异摄动系统的准静态系统, 它至少能缓解系统的奇异性.

此外, 当闭环系统中  $K_{22}$  等矩阵满足一定条件时, 如 Gan 等考虑的一类电力系统模型<sup>[3]</sup>, 伴随系统 (12) 确实满足指数收敛的条件, 下面结论说明这种情况.

**引理 5.** 将伴随系统 (12) 中以下矩阵分块记为

$$\mathbf{y}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{q}'' \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad K_{22} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

其中,  $C_{11}$  和  $D_{11}$  是  $n_3$  维方阵,  $C_{22}$  和  $D_{22}$  是  $n_2 - n_3$  维方阵, 其余矩阵都有合适的维数.

对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 如果  $\mathbf{x}_1 \in F_2$  成立且  $\|D_{21}\|_F, \|D_{22}\|_F, \|E_{11}\|_F$  和  $\|E_{21}\|_F$  是  $\varepsilon$  的同阶 (或高阶) 无穷小, 那么存在与  $\varepsilon$  无关的正数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  满足

$$\begin{cases} \|D_{11}\mathbf{q}' + D_{12}\mathbf{q}''\| \leq \varepsilon\alpha_1 \|\mathbf{v}_1\| + \alpha_2 \|\mathbf{v}_2\| \\ \|D_{21}\mathbf{q}' + D_{22}\mathbf{q}''\| \leq \varepsilon\alpha_1 \|\mathbf{v}_1\| + \varepsilon\alpha_2 \|\mathbf{v}_2\| \end{cases}$$

**证明.** 因为  $\mathbf{x}_1 \in F_2$ , 故由引理 4 (参考其证明过程) 可得: 当  $i \leq n_3$  时,

$$|q_i| \leq \|(K_{22})_i \mathbf{y}_1\| = \|(E_{11})_i \mathbf{v}_1 + (E_{12})_i \mathbf{v}_2\| \leq \|(E_{11})_i\|_F \|\mathbf{v}_1\| + \|(E_{12})_i\|_F \|\mathbf{v}_2\|$$

当  $n_3 < i \leq n_2$  时,

$$|q_i| \leq \|(K_{22})_i \mathbf{y}_a\| = \|(E_{21})_i \mathbf{v}_1 + (E_{22})_i \mathbf{v}_2\| \leq \|(E_{21})_i\|_F \|\mathbf{v}_1\| + \|(E_{22})_i\|_F \|\mathbf{v}_2\|$$

因为  $\|\mathbf{q}'\| \leq |q_1| + |q_2| + \dots + |q_{n_3}|$ , 所以  $\|\mathbf{q}'\| \leq \|E_{11}\|_F \|\mathbf{v}_1\| + \|E_{12}\|_F \|\mathbf{v}_2\|$ .

同理可得,  $\|\mathbf{q}''\| \leq \|E_{21}\|_F \|\mathbf{v}_1\| + \|E_{22}\|_F \|\mathbf{v}_2\|$ .

因为

$$\begin{aligned} \|D_{11}\mathbf{q}' + D_{12}\mathbf{q}''\| &\leq \\ \|D_{11}\|_F \|\mathbf{q}'\| + \|D_{12}\|_F \|\mathbf{q}''\| &\leq \\ (\|E_{11}\|_F \|D_{11}\|_F + \|E_{12}\|_F \|D_{21}\|_F) \|\mathbf{v}_1\| + & \\ (\|E_{11}\|_F \|D_{12}\|_F + \|E_{12}\|_F \|D_{22}\|_F) \|\mathbf{v}_2\| & \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} \|D_{21}\mathbf{q}' + D_{22}\mathbf{q}''\| &\leq \\ \|D_{21}\|_F \|\mathbf{q}'\| + \|D_{22}\|_F \|\mathbf{q}''\| &\leq \\ (\|E_{21}\|_F \|D_{11}\|_F + \|E_{22}\|_F \|D_{21}\|_F) \|\mathbf{v}_1\| + & \\ (\|E_{21}\|_F \|D_{12}\|_F + \|E_{22}\|_F \|D_{22}\|_F) \|\mathbf{v}_2\| & \end{aligned}$$

又因为  $\|D_{21}\|_F, \|D_{22}\|_F, \|E_{11}\|_F$  和  $\|E_{21}\|_F$  是  $\varepsilon$  的同阶 (或高阶) 无穷小, 所以存在与  $\varepsilon$  无关的正数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  满足

$$\begin{cases} \|D_{11}\mathbf{q}' + D_{12}\mathbf{q}''\| \leq \varepsilon\alpha_1 \|\mathbf{v}_1\| + \alpha_2 \|\mathbf{v}_2\| \\ \|D_{21}\mathbf{q}' + D_{22}\mathbf{q}''\| \leq \varepsilon\alpha_1 \|\mathbf{v}_1\| + \varepsilon\alpha_2 \|\mathbf{v}_2\| \end{cases} \quad \square$$

**推论 1.** 对于系统 (12), 如果  $\mathbf{x}_1 \in F_2$  且  $K_{22} = \mathbf{0}$ , 那么  $\|\mathbf{q}\| = 0$ , 从而引理 5 的结论自然成立.

**证明.** 由式 (10) 中  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$  表达式可知, 当此推论条件成立时,  $\|\mathbf{q}\| = 0$  显然成立 (注 2), 故  $\mathbf{q}'$  和  $\mathbf{q}''$  都为零向量, 因此引理 5 结论自然成立.  $\square$

**定理 4.** 对于伴随系统 (12), 假设下列条件成立:

- 1) 引理 5 的条件成立或  $K_{22} = 0$  成立;
- 2)  $C_{11}$  和  $C_{22}$  是稳定的矩阵且  $\|C_{21}\|_F$  是  $\varepsilon$  的同阶 (或高阶) 无穷小量.

则伴随系统 (12) 满足定理 2 (或定理 3) 中的条件 2), 即此系统的轨迹是全局指数收敛的.

**证明.** 由于  $C_{11}$  和  $C_{22}$  是稳定的, 所以可选择正定矩阵  $P_{11}$  和  $P_{22}$  满足

$$C_{11}^T P_{11} + P_{11} C_{11} = -2I_1, \quad C_{22}^T P_{22} + P_{22} C_{22} = -2I_2$$

再选择伴随系统 (12) 的 Lyapunov 函数为

$$V = 0.5\mathbf{v}_1^T P_{11} \mathbf{v}_1 + 0.5d\mathbf{v}_2^T P_{22} \mathbf{v}_2 \quad (26)$$

其中,  $d$  是由后文确定的常数,  $I_1$  和  $I_2$  分别为  $n_1$  和  $n_2$  维的单位阵. 它沿着系统 (12) 的轨线导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0.5\mathbf{v}_1^T (C_{11}^T P_{11} + P_{11} C_{11}) \mathbf{v}_1 + \mathbf{y}_a^T P B_2 \mathbf{q} + \\ &\mathbf{v}_1^T (C_{21}^T P_{22} + P_{11} C_{12}) \mathbf{v}_2 - \\ &\varepsilon \mathbf{y}_a^T [(L A_{12})^T P + P L A_{12}] \mathbf{y}_a^T - \\ &\varepsilon \mathbf{y}_a^T P L B_1 \mathbf{p} + 0.5d\mathbf{v}_2^T (C_{22}^T P_2 + P_2 C_{22}) \mathbf{v}_2 \quad (27) \end{aligned}$$

其中,  $P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & dP_{22} \end{bmatrix}$ .

由引理 3~5 (当  $K_{22} = 0$  时由推论 1) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^T P B_2 \mathbf{q} &= \mathbf{v}_1^T P_{11} (D_{11}\mathbf{q}' + D_{12}\mathbf{q}'') + \\ &d\mathbf{v}_2^T P_{22} (D_{21}\mathbf{q}' + D_{22}\mathbf{q}'') \leq \\ &\|\mathbf{v}_1\| \|P_{11}\| (\alpha_1 \varepsilon \|\mathbf{v}_1\| + \alpha_2 \|\mathbf{v}_2\|) + \\ &\varepsilon d \|\mathbf{v}_2\| \|P_{22}\| (\alpha_1 \|\mathbf{v}_1\| + \alpha_2 \|\mathbf{v}_2\|) \end{aligned}$$

因为  $\|P\| \leq \|P_{11}\| + d\|P_{22}\|$ ,  $\|\mathbf{y}_a\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$  以及  $\|G\mathbf{x}\| \leq \|G\|_F \|\mathbf{x}\|$  ( $G$  是矩阵) 成立.

所以可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_1^T (C_{21}^T P_{22} + P_{11} C_{12}) \mathbf{v}_2 \leq \\ & (\|C_{21}\|_F \|P_{22}\| + \|C_{12}\|_F \|P_{11}\|) \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| - \\ & \mathbf{y}_a^T [(LA_{12})^T P + PLA_{12}] \mathbf{y}_a \leq \\ & 2 \|LA_{12}\| (\|P_{11}\| + d \|P_{22}\|) (\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2) \end{aligned}$$

和

$$-\mathbf{y}_a^T P \mathbf{p} \leq \beta_1 \|LB_1\| (\|P_{11}\| + d \|P_{22}\|) (\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2)$$

因此, 式 (27) 可缩放为如下形式

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| \\ \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1(\varepsilon) & c_3(\varepsilon) \\ c_3(\varepsilon) & c_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| \\ \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中,  $c_i(\varepsilon) (i = 1, 2, 3)$  是  $\varepsilon$  的连续函数, 其表达式略。

按式 (28) 同样的缩放方式但令  $\varepsilon = 0$ , 式 (27) 可变为

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{\varepsilon=0} & \leq -\|\mathbf{v}_1\|^2 + (\alpha_2 + \|C_{12}\|) \|P_{11}\| \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| - \\ d \|\mathbf{v}_2\|^2 & = - \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| \\ \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| \\ \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix} \quad (29) \end{aligned}$$

式中,  $c = (\alpha_2 + \|C_{12}\|) \|P_{11}\|$ .

故  $\begin{bmatrix} c_1(\varepsilon) & c_3(\varepsilon) \\ c_3(\varepsilon) & c_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \Big|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & d \end{bmatrix}$  成立。

因为对  $\forall a, b \in \mathbf{R}, ab \leq 0.5(a^2 + b^2)$  成立, 所以若选择足够大的正数  $d$  满足  $d > d_0 = 0.5c^2 + 1$ , 那么

$$\lambda_{\min} \left( \begin{bmatrix} c_1(\varepsilon) & c_3(\varepsilon) \\ c_3(\varepsilon) & c_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \lambda_{\min} \left( \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & d \end{bmatrix} \right) > 0 \quad (30)$$

因为  $c_i(\varepsilon) (i = 1, 2, 3)$  是  $\varepsilon$  的连续函数且系统的特征根是矩阵元素的连续函数, 所以由式 (28)~(30) 得, 当  $\varepsilon$  足够小时, 存在与  $\varepsilon$  无关的常数  $\lambda_0 > 0$  满足

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min} \left( \begin{bmatrix} c_1(\varepsilon) & c_3(\varepsilon) \\ c_3(\varepsilon) & c_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \right) \|\mathbf{y}_a\|^2 < -\lambda_0 \|\mathbf{y}_a\|^2 \quad (31)$$

另外很容易推导, 对  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , 存在与  $\varepsilon$  无关的常数  $\lambda'_0 > 0$  和  $\lambda''_0 > 0$ , 使得

$$\lambda''_0 \|\mathbf{y}_a\|^2 \leq V \leq \lambda'_0 \|\mathbf{y}_a\|^2 \quad (32)$$

又因式 (31) 和 (32) 对  $\forall \mathbf{y}_a$  都成立, 所以由假设 3, 系统 (12) 的轨迹指数收敛且收敛速度与  $\varepsilon$  无关<sup>[16]</sup>, 从而定理 2 或定理 3 中的条件 2) 成立。□

### 3 稳定域估计的优化方法

#### 3.1 优化模型的建立

由定理 3, 在集合  $F_3$  中寻找伴随系统 (11) 的不变集就能获得原系统稳定域子集。因此, 估计原系统的稳定域只需要估计伴随系统的不变集。利用文献 [2, 15] 中的方法可得一些椭球 (记为  $\tilde{\Omega}_x = \{\mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^{n_1} | \mathbf{x}_1^T P \mathbf{x}_1 \leq 1\}$ ) 满足要求, 其中  $P$  是正定矩阵且  $PA_x + A_x^T P \leq 0$ 。

在所有满足要求的椭球  $\tilde{\Omega}_x$  中, 每个椭球所对应的原系统稳定域的估计结果是不同的, 所以估计结果的保守程度也

不相同; 另一方面, 当估计的稳定域所能包含的初始集合  $X_0$  越大, 说明系统抗干扰能力越强, 反之越弱。因此, 为更加客观反映系统的稳定性, 必须尽量减少稳定域估计的保守性, 使得估计的稳定域能包含尽可能大的初始集合  $X_0$ 。由此可见, 稳定域估计的结果与初始集合  $X_0$  的形状相关。为此, 我们进一步假设  $X_0$  是半径可变但形状固定的高维椭球, 表示为

$$X_0 = \left\{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi}^T P'_0 \boldsymbol{\xi} \leq \beta^2 \right\} \quad (33)$$

其中,  $\beta > 0$  是大小由后文确定的变量,  $P'_0$  是已知的正定矩阵。在变换后的坐标  $\boldsymbol{\xi}_1$  下,  $X_0$  可表示为

$$X_0 = \left\{ \boldsymbol{\xi}_1 \mid \boldsymbol{\xi}_1^T P_0 \boldsymbol{\xi}_1 \leq \beta^2 \right\} \quad (34)$$

其中,  $P_0 = (S^{-1})^T P'_0 S^{-1}$ , 矩阵  $S$  见式 (9)。

另外, 如果预想的初值集合是多棱体<sup>[5]</sup>

$$X_0 = \left\{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{k_0} a_i \boldsymbol{\xi}_i^0, \sum_{i=1}^{k_0} a_i = \beta, a_i \geq 0 \right\}$$

式中,  $\boldsymbol{\xi}_i^0 \in \mathbf{R}^{n_1+n_2} (i = 1, 2, \dots, k_0)$  为已知的向量。在坐标系  $\boldsymbol{\xi}_1$  下  $X_0$  表示为

$$X_0 = \left\{ \boldsymbol{\xi}_1 \mid \boldsymbol{\xi}_1 = \sum_{i=1}^{k_0} a_i S^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^0, \sum_{i=1}^{k_0} a_i = \beta, a_i \geq 0 \right\}$$

因此, 为减少稳定域估计的保守性, 可以利用优化方法在集合  $F_3$  中最优稳定域子集  $\tilde{\Omega}_x$ , 使得  $\tilde{\Omega}_x \times \tilde{\Omega}_y$  能包含最大的椭球 (或多棱体)  $X_0$ , 即  $\beta$  最大, 从而建立如下的优化模型

$$\begin{aligned} \beta^* & = \max_{P_x > 0} \beta \\ \text{s.t.} \quad & \text{a) } X_0 \subset \tilde{\Omega}_x \times \tilde{\Omega}_y = \{\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_1^T P_x \mathbf{x}_1 \leq 1\} \times \tilde{\Omega}_y \\ & \text{b) } \tilde{\Omega}_x \subset F_3 \\ & \text{c) } A_x^T P_x + P_x A_x \leq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

其中, 约束 a) 表示估计的稳定域包含初值集合  $X_0$ ; 约束 b) 和 c) 表示  $\tilde{\Omega}_x$  是系统 (11) 在集合  $F_3$  中的一个不变集<sup>[2, 5]</sup>, 因此约束 b) 和 c) 确定的集合  $\tilde{\Omega}_x$  满足定理 3 的条件, 从而由式 (35) 得到的解  $\tilde{\Omega}_x$  是稳定域的最优估计, 它能包含一个最大的  $X_0$ 。

#### 3.2 优化模型的化简

因为椭球分块可表示为

$$X_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \leq \beta^2 \right\}$$

它在  $\mathbf{x}_1$  平面上的投影仍然是椭球, 且可表示为<sup>[3]</sup>

$$E_{x_1}(P_1^0, \beta) = \left\{ \mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^{n_1} \mid \mathbf{x}_1^T P_1^0 \mathbf{x}_1 \leq \beta^2 \right\}$$

其中,  $P_1^0 = P_{11}^0 - P_{12}^0 (P_{22}^0)^{-1} P_{21}^0$ 。

而  $X_0 = \left\{ \boldsymbol{\xi}_1 \mid \boldsymbol{\xi}_1 = \sum_{i=1}^{k_0} a_i S^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^0, \sum_{i=1}^{k_0} a_i = \beta, a_i \geq 0 \right\}$  在  $\mathbf{x}_1$  平面上的投影为

$$E_{x_1} = \left\{ \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{k_0} a_i \mathbf{x}_1^i, \sum_{i=1}^{k_0} a_i = \beta, a_i \geq 0 \right\}$$

其中,  $\mathbf{x}_1^i = [S^{-1}\boldsymbol{\xi}_i^0]_{n_1}$ ,  $[\cdot]_{n_1}$  表示取前  $n_1$  个元素.

又因为  $\tilde{\Omega}_y$  是球心在原点且半径足够大的球体, 所以约束 a) 成立等价于  $X_0$  在  $\mathbf{x}_1$  坐标平面上的投影包含于  $\tilde{\Omega}_x$ . 因此, 如果  $X_0$  是椭球, 则约束 a) 可变为<sup>[3, 5]</sup>

$$X_0 \subset \tilde{\Omega}_x \times \Omega_y \Leftrightarrow E_{x_1}(P_1^0, \beta) \subset \tilde{\Omega}_x \Leftrightarrow \beta^{-2}P_1^0 - P_x \geq 0$$

如果  $X_0$  是多棱体, 则约束 a) 可变为

$$X_0 \subset \tilde{\Omega}_x \times \Omega_y \Leftrightarrow (\mathbf{x}_1^i)^T P_x \mathbf{x}_1^i \leq \beta^{-2}, i = 1, 2, \dots, k_0$$

又由矩阵 Schur 性质, 约束 b) 等价于<sup>[2, 5]</sup>

$$\sigma^2 - \mathbf{g}_i P_x^{-1} \mathbf{g}_i^T \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma^2 & \mathbf{g}_i \\ \mathbf{g}_i^T & P_x \end{bmatrix} \geq 0$$

其中,  $\mathbf{g}_i$  为  $F_2$  的定义中矩阵  $\tilde{K}$  的第  $i$  行行向量. 再令

$$\gamma = \beta^{-2} \tag{36}$$

则式 (35) 可变换为如下 LMI 优化问题

$$\begin{aligned} \gamma_x^* &= \min_{P_x > 0} \gamma_x \\ \text{s.t. a)} & \gamma_x P_1^0 - P_x \geq 0 \text{ (或 } (\mathbf{x}_1^i)^T P_x \mathbf{x}_1^i \leq \gamma_x) \\ \text{b)} & \begin{bmatrix} \sigma^2 & \mathbf{g}_i \\ \mathbf{g}_i^T & P_x \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{c)} & A_x^T P_x + P_x A_x \leq 0 \end{aligned} \tag{37}$$

**注 3.** 伴随系统 (11) 是奇异摄动系统 (5) 的准静态系统<sup>[12]</sup>, 所以矩阵  $A_x$  的维数比原系统的状态矩阵维数低, 而且其条件数也更小. 因此利用伴随系统估计稳定域可以克服高维系统的奇异性等困难.

### 3.3 稳定域估计的算法

当小参数  $\varepsilon$  足够小时,  $L(\varepsilon)$  惟一存在但其解析表达式很难求取. 考虑到  $L(\varepsilon)$  是  $\varepsilon$  的光滑函数, 可利用泰勒级数逼近. 为此, 令

$$L(\varepsilon) = L^0 + L^1\varepsilon + L^2\varepsilon^2 + \dots \tag{38}$$

将式 (38) 代入式 (8), 再比较等式两端  $\varepsilon$  的各阶次的系数, 得

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: & A_{21} + B_2 K_{21} + (A_{22} + B_2 K_{22}) L^0 = 0 \\ \varepsilon^1: & (A_{22} + B_2 K_{22}) L^1 - L^0 A_x^0 = 0 \\ \varepsilon^2: & (A_{22} + B_2 K_{22}) L^2 - L^0 A_x^1 - L^1 A_x^0 = 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

其中,  $A_x^0 = A_{11} + B_1 K_{11} + (A_{12} + B_1 K_{12}) L^0$ ,  $A_x^1 = (A_{12} + B_1 K_{12}) L^1$ .

解上面的方程, 得

$$\begin{cases} L^0 = -(A_{22} + B_2 K_{22})^{-1} (A_{21} + B_2 K_{21}) \\ L^1 = (A_{22} + B_2 K_{22})^{-1} L^0 A_x^0 \\ L^2 = (A_{22} + B_2 K_{22})^{-1} (L^0 A_x^1 + L^1 A_x^0) \\ \vdots \end{cases} \tag{39}$$

所以, 由式 (39) 能得到足够精确的近似解, 总结前面的分析可得到基于伴随系统的稳定域估计方法, 其步骤如下:

**步骤 1.** 建立式 (1) 的模型;

**步骤 2.** 利用式 (39) 计算  $L(\varepsilon)$  的近似式;

**步骤 3.** 选择合适的经验常数  $\sigma \in (0, 1)$ , 建立式 (37) 所示的优化模型并求解;

**步骤 4.** 利用式 (36) 的反变换得到对应稳定域的最优估计.

## 4 稳定域估计方法的应用及仿真结果

考虑如图 1 所示的三阶系统, 其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_{11}\mathbf{x} + A_{12}\mathbf{y} + B_1 \text{sat}(K_{11}\mathbf{x} + K_{12}\mathbf{y}) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{y}} = A_{21}\mathbf{x} + A_{22}\mathbf{y} + B_2 \text{sat}(K_{21}\mathbf{x}) \end{cases} \tag{40}$$

式中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  为控制对象的状态变量,  $\mathbf{y}$  为高增益快速控制系统的状态变量, 选择控制器中时间常数  $T$  是小参数 (作为前文中的  $\varepsilon$ ), 参数  $\sigma = 0.9$ , 预想初始集合为  $X_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \beta^2\}$ , 其余的系数为

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & K_{11} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ K_{12} &= -\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T, & A_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, & A_{22} &= -1 \\ B_2 &= 1, & K_{21} &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

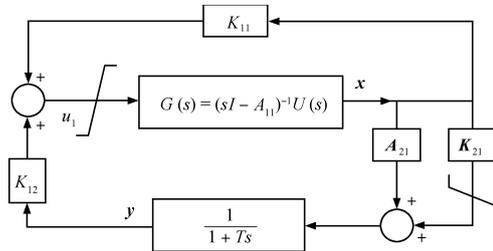


图 1 闭环系统传递函数图

Fig. 1 Transfer function of the closed-loop system

为了说明稳定域估计方法的特点, 分别令  $\varepsilon = T = 0.1, 0.05$  以及  $0.02$  进行比较. 估计上述系统稳定域的步骤如下.

**步骤 1.** 验证假设 1 和假设 2 成立; 另外, 系统给出的参数满足推论 1 的条件  $K_{22} = 0$ , 故当  $T$  足够小时可以利用定理 3 来确定稳定域.

**步骤 2.** 计算  $L$ . 利用式 (39) 得到二阶近似结果为

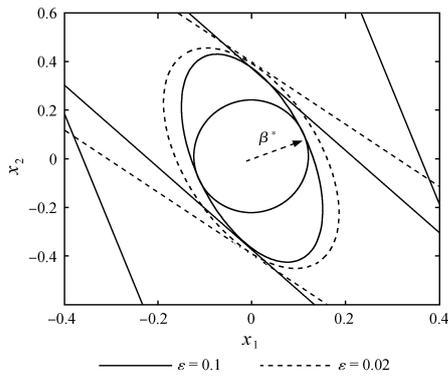
$$L = [1.5 \quad 1.5] + [5.25 \quad 0.75] \varepsilon + [24 \quad 1.5] \varepsilon^2$$

**步骤 3.** 建立优化模型, 求得稳定域的最优估计, 其中稳定域所能包含的最大初始集合半径  $\beta^*$  如表 1, 伴随系统稳定域估计结果  $\tilde{\Omega}_x$  如图 2 (见下页) 所示, 图中实线和虚线分别表示  $\varepsilon = 0.1$  和  $\varepsilon = 0.02$  对应的最优解, 椭圆为  $\tilde{\Omega}_x$  的最优解, 直线为集合  $F_3$  的边界  $\partial F_3$ . 因此系统 (40) 稳定域的一个子集为  $\tilde{\Omega}_x \times [-b, b]$ , 其中  $b$  为一个足够大的正数.

表 1 不同的参数对应的最优值

Table 1 Optimal solutions of different small parameters

$\varepsilon$	0.1	0.08	0.06	0.04	0.02
$\beta^*$	0.128	0.135	0.143	0.150	0.158

图2 系统稳定域估计结果 ( $\varepsilon = 0.02, 0.1$ )Fig. 2 Estimation of stability region for  $\varepsilon = 0.02$  and  $0.1$ 

由图2可看出,随着系统奇异性增加(惯性时间常数越来越小),稳定域越来越大.这是因为当小参数 $\varepsilon$ 较大时,快变量 $y$ 对 $x$ 的影响也较大(定理2或定理3),要使伴随系统(11)的轨迹仍然可以保持在集合 $F_3$ 中,必须要求 $x$ 的初始值 $x_0$ 在较小范围内变化;反之,随着参数 $\varepsilon$ 减小, $y$ 对 $x$ 的影响较小,所以当 $x_0$ 在较大范围内变化时仍然满足定理4的条件 $x \in F_3$ .同理,随着系统奇异性增大, $y$ 对 $x$ 的影响减小,稳定域增大,故所能包含的初始集合 $X_0$ 也越大( $\beta^*$ 增大),这和表1给出的 $\beta$ 最优结果一致.

本文的降阶方法还可以克服系统的奇异性,表2列出了伴随系统与原始系统特征根的比较结果.从表2可以发现,原来的奇异摄动饱和系统的特征根实部差异非常明显,所以奇异性非常明显.但是,伴随系统(11)仅保留原系统实部较大的特征根,而对应的实部较小的特征根被剔除(对应伴随系统(12)的状态),从而与原系统相比,伴随系统基本不存在奇异性的问题.因此,从特征根的角度说明了利用伴随系统分析原系统的稳定域可以消除系统的奇异性.

表2 伴随系统与原始系统特征根对比结果

Table 2 Results of the adjoint system and the original system

$\varepsilon$	原始系统	伴随系统
0.1	$-0.3461 \pm 1.6451i, -5.3078$	$-0.3850 \pm 1.5376i$
0.05	$-0.3105 \pm 1.3617i, -15.3791$	$-0.3119 \pm 1.3508i$
0.02	$-0.2734 \pm 1.2551i, -45.4533$	$-0.2734 \pm 1.2545i$

## 5 结论

本文给出了奇异摄动饱和系统稳定域可解耦的充分条件,并结合线性矩阵不等式优化方法,提出了估计奇异摄动饱和系统稳定域的降阶方法.与传统的稳定域估计方法相比,本文方法在一定程度上可以解决处理高维奇异摄动饱和系统时,计算量大、奇异和保守等困难.算例仿真验证了方法的有效性.

## References

- Wang Yong-Qiang, Cao Yong-Yan, Sun You-Xian. Anti-windup compensator gain design for time-delay systems with constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 1–8 (王永强, 曹永岩, 孙优贤. 受约束时滞系统的抗饱和和补偿器增益设计. *自动化学报*, 2006, **32**(1): 1–8)
- Xin H H, Gaff D, Chung T S, Qiu J J. A method for evaluating the performance of PSS with saturated input. *Electric Power Systems Research*, 2007, **77**(10): 1284–1291

- Gan D Q, Xin H H, Qiu J J, Han Z X. A reduced-order method for estimating the stability region of power systems with saturated controls. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2007, **50**(5): 585–605
- Guo Shu-Li, Huang Lin. Sufficient conditions about globally asymptotical stability of the origin of second-order control system with saturated input. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(6): 949–954 (郭树理, 黄琳. 单饱和输入下二阶控制系统零解全局渐近稳定的充分条件. *自动化学报*, 2002, **28**(6): 949–954)
- Hu T S, Lin Z L. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Boston: Birkhauser, 2001
- da Silva J M G, Tarbouriech S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(1): 106–111
- Cao Y Y, Lin Z L, Ward D G. An antiwindup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(1): 140–145
- Zhao Ke-You, Wei Ai-Rong. On asymptotic stabilization of linear discrete-time systems with saturated state feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(2): 301–304 (赵克友, 魏爱荣. 含饱和状态反馈线性离散时间系统渐近稳定性. *自动化学报*, 2005, **31**(2): 301–304)
- Kundur P. *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill, 1994
- Hirsch M, Smale S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic Press, 1974
- Hairer E, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-algebraic Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- Kokotovic P V, Khalil H K, O'Reilly J. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. London: Academic Press, 1986
- Saksena V R, O'Reilly J, Kokotovic P V. Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976-1983. *Automatica*, 1984, **20**(3): 273–293
- Tuan H D, Hosoe S. A new design method for regulator problems for singularly perturbed systems with constrained control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(2): 260–264
- Hu T S, Lin Z L. Exact characterization of invariant ellipsoids for single input linear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(1): 164–169
- Khalil H K. *Nonlinear Systems (Second Edition)*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996

辛焕海 博士后, 讲师. 主要研究方向为电力系统稳定性分析与控制. 本文通信作者. E-mail: eexinhh@gmail.com

(XIN Huan-Hai Postdoctor, lecturer. His main research interest is power system stability analysis and control. Corresponding author of this paper.)

吴荻 博士研究生. 主要研究方向为电力系统稳定性分析与控制.

E-mail: wudi325@gmail.com

(WU Di Ph. D. candidate. His main research interest is power system stability analysis and control.)

甘德强 教授. 主要研究方向为电力系统稳定性和电力市场.

E-mail: deqiang.gan@ieee.org

(GAN De-Qiang Professor. His research interest covers power system stability and power market.)

邱家驹 教授. 主要研究方向为电力系统稳定性分析与控制.

E-mail: ee-qiu@zju.edu.cn

(QIU Jia-Ju Professor. His main research interest is power system stability analysis and control.)