

基于二维混合模型的重复控制系统 设计新方法

吴敏¹ 兰永红¹ 余锦华²

摘要 现有重复控制方法是在一维空间上同时处理控制与学习过程, 这不利于重复控制系统的分析与设计. 本文针对一类线性不确定系统, 提出一种基于连续/离散二维混合模型的重复控制系统设计方法. 首先, 通过分析重复控制系统中独立存在的控制行为与学习行为, 建立重复控制系统的连续/离散二维混合模型, 将重复控制器设计问题转化为一类连续/离散二维系统的状态反馈控制问题; 然后应用二维连续/离散系统方法, 获得重复控制系统的稳定性条件, 根据稳定性条件并利用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 方法, 求得重复控制器参数. 与现有方法相比, 所提出的重复控制设计方法更加符合其本质特征, 具有简单实用、直观明了的特点, 克服了现有重复控制方法所存在的局限性. 最后, 数值仿真实例验证了本文所提方法的有效性.

关键词 线性系统, 重复控制, 二维系统, 鲁棒控制, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

A New Design Method for Repetitive Control Systems Based on Two-dimensional Hybrid Model

WU-Min¹ LAN Yong-Hong¹ SHE Jin-Hua²

Abstract Existing design methods for repetitive control systems cannot effectively synthesize such a system because the control and learning processes are carried out simultaneously in a one-dimensional space. This paper presents a method of designing a repetitive control system for a class of linear uncertain systems that are based on a two-dimensional (2D) continuous-discrete hybrid model. First, a 2D continuous-discrete hybrid model is established to describe two independent types of actions in repetitive control: control and learning. The problem of designing a repetitive controller is then converted to a state-feedback design problem for the model. Next, a stability condition for the model is obtained from the 2D system theory. The parameters of the repetitive controller are then obtained from the stability condition in combination with linear matrix inequalities. This method is simpler, more intuitive, and more practical than existing methods, and does not suffer from their limitations. Finally, the validity of the method is verified by a numerical example.

Key words Linear systems, repetitive control, two-dimensional systems, robust control, linear matrix inequality (LMI)

在控制系统的实际应用中, 经常会遇到许多具有周期性的控制任务, 这时需要控制系统对周期性参考输入进行高精

收稿日期 2007-04-13 收修改稿日期 2007-09-27

Received April 13, 2007; in revised form September 27, 2007

国家自然科学基金 (60674016), 国家杰出青年科学基金 (60425310) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60674016) and National Science Fund for Distinguished Youth Scholars of China (60425310)

1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083 2. 东京工业大学计算机科学部 东京 192-0982

1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, P. R. China 2. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan

DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01208

度跟踪。重复控制为解决这类问题提供了切实可行的解决方法和理论依据,它的基本思想是在控制系统中引入一种学习机制,使系统通过自身的学习来改善跟踪精度,最终实现对任意周期目标输入信号的无稳态误差跟踪^[1]。由于引入了正反馈环节,重复控制系统的稳定性难以得到保证。Inoue 等构造了改进型重复控制系统^[2],显著地改善了系统的稳定性条件,但在一定程度上牺牲了系统的高频跟踪性能。Hara 等将其扩展到多输入多输出(MIMO)系统,但对于非最小相位系统则存在带宽限制^[3]。早期的重复控制系统设计大都是在此基础上展开的,文献[4]对此作了较详细的综述。后来,相继提出了一些改进的重复控制算法和结构。如丛爽^[5]提出的改进型重复控制结构;Kim 等^[6]提出的结构奇异值方法;Yamada 等^[7]提出的极点配置方法等,但这些方法主要是在频域内进行分析,得到的条件相当苛刻且难于验证。

近几年来,许多学者开始将重复控制与其他控制方法相结合,提出了许多新的算法和结构。例如,She 等^[8]提出了离散时间变结构重复控制方法,但仅考虑了没有不确定性的控制对象。Park 等^[9]研究了基于 PID 的重复控制,但其方法在选择控制器参数时,需要反复调节,多少存在一些试凑的痕迹。Owens 等^[10]针对严格正实系统,利用 Lyapunov 泛函方法,提出了多周期重复控制器设计方法。Chang 等^[11]通过将离散时间重复控制与自适应控制相结合,研究了光驱传动中的时变周期干扰抑制问题。鲁棒重复控制问题也吸引了不少学者的注意,Li 和 Tsao^[12]把重复控制系统内部模型中的时滞环节作为不确定性环节,分析了系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能。Ramrath 等^[13]针对特定的跟踪频率,提出了一种基于最小-最大方法的鲁棒重复控制设计方法。Chen 和 Liu^[14]在频域空间中研究了鲁棒重复控制器设计问题,由于在设计时将控制器和重复控制器分开来考虑,得到的条件相当苛刻,而且只能适用于最小相位系统。Zhou 等^[15]研究了零相位奇数谐波的干扰抑制问题,并在宽带脉冲调幅(PWM)中获得了应用。Doh 等^[16]针对不确定线性系统,提出了基于线性矩阵不等式(Linear matrix inequality, LMI)的低通滤波器和重复控制器设计方法,但由于重复控制器和低通滤波器的参数相互影响,需要反复调整才能获得比较理想的低通滤波器和重复控制器参数。

对于具有一定周期的目标输入信号,重复控制是巧妙地构造一个与信号周期相同的时滞正反馈环节,将上一个周期的控制结果进行“学习”而产生这个周期的控制输入。可见,重复控制系统不同于一般的控制系统,在系统中存在着两种完全不同的行为:一个周期之内的连续控制行为和各个周期之间的离散学习行为。一个周期之内的连续控制行为不受学习行为的影响,而跟踪精度是通过以输入信号周期为单位的正反馈环节学习机制(离散学习行为)来获得提高的。但目前所提出的各种重复控制系统设计方法,都是在时间轴上混合考虑这两种行为的综合效应,无法对重复控制中的这两种行为独立地进行设计,因而不能对重复控制系统中的控制器参数进行更精确的调节,普遍存在着要求控制对象较严、适用性差、条件难于验证以及重复控制器和低通滤波器的参数相互影响等问题。

实际上,重复控制的主要困难在于没有采用一个合理的数学模型,来同时表达控制系统中存在的控制和学习这两种性质不同且相对独立的行为。本文把图像处理中提出的二维系统方法^[17-18]应用于重复控制系统的分析和设计中,在连续/离散二维空间上独立地考虑和描述重复控制的控制行为和学习行为,提出了一种基于二维混合模型的重复控制设计

新方法。该方法不仅能够获得满意的过渡过程性能,有效地解决重复控制的稳定性和稳态性能之间的折衷问题,而且能够使重复控制器的设计简化、直观和实用,为解决重复控制设计问题提供了一种有效的途径。

在下述陈述中,如不作特殊说明,则 \mathbf{R}^n 代表 n 维实空间, $\mathbf{R}^{n \times m}$ 代表所有 $n \times m$ 实矩阵集, I 代表合适维数的单位矩阵, $*$ 代表对称矩阵主对角线下对称部分。另外, $X > 0$ ($X < 0$) 表示 X 是一个正定(负定)矩阵。 \oplus 代表直和,即 $W_1 \oplus W_2 = \text{diag}\{W_1, W_2\}$ 。

1 重复控制与连续/离散二维混合模型

基本的重复控制系统如图 1 所示。重复控制器 $C_R(s)$ 是周期信号发生器的严密内部模型,其中, L 为时滞环节的延时时间,与参考信号的周期一致,其时域形式为

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{e}(t), & 0 < t < L \\ \mathbf{u}(t-L) + \mathbf{e}(t), & t \geq L \end{cases} \quad (1)$$

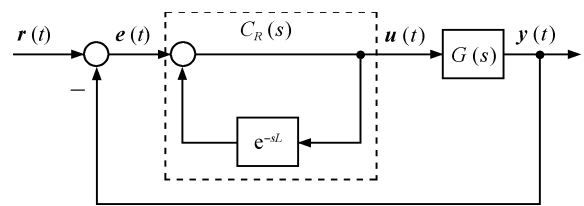


图 1 基本的重复控制系统

Fig. 1 Basic repetitive control system

文献[2]指出,当控制对象输出中含有前馈直达项时,在系统中直接引入重复控制器能稳定系统,而当控制对象输出中不含前馈直达项时,在系统中直接引入重复控制器,则无法保证系统的稳定性。为了改善系统的稳定条件,需要对重复控制器进行修正。比如说,在时滞环节中插入一个低通滤波器,通过牺牲对高频成分的跟踪性能来保证系统的稳定性^[2]。由于控制对象输出包含前馈直达项时的设计情形给出了重复控制系统所能达到的性能极限,因此研究控制对象输出包含前馈直达项的重复控制系统并对控制性能进行具体的探讨,对重复控制研究具有指导意义。为此,这里我们考虑控制对象输出包含前馈直达项时的重复控制系统设计问题。

考虑如图 2(见下页上方)所示的重复控制系统。待定向量 $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_p \ \mathbf{F}_e]$ 为系统的控制增益。设控制对象的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为控制对象的状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为状态输出。

当 $t \geq L$ 时,重复控制器为

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t-L) + \mathbf{e}(t), \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)$$

控制规则为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_e \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}_p \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

对变量 $\xi(t)$, 设

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-L) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t-L) \\ \Delta \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-L) \\ \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-L) \end{cases}$$

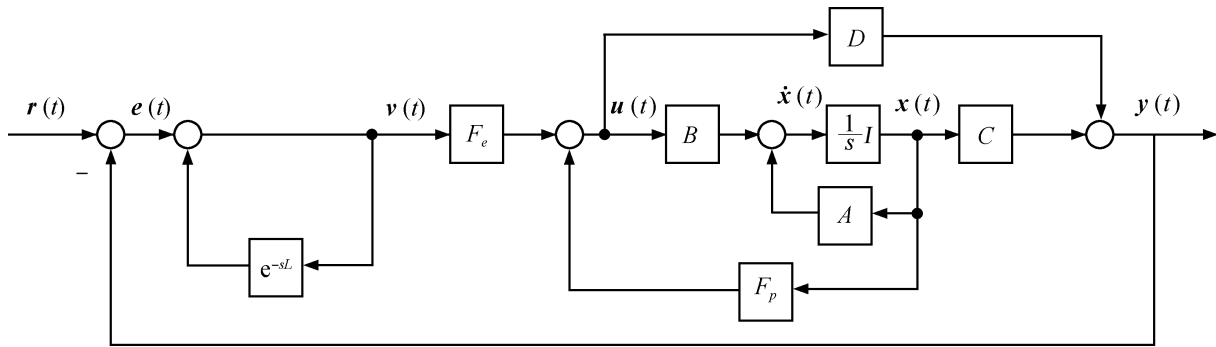


图 2 重复控制系统结构

Fig. 2 Configuration of a repetitive control system

则可得

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = A\Delta \mathbf{x}(t) + B\Delta \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - L) = -C\Delta \mathbf{x}(t) - D\Delta \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (4)$$

以及

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_e \Delta \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}_p \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_e \mathbf{e}(t) + \mathbf{F}_p \Delta \mathbf{x}(t) \quad (5)$$

由于重复控制依赖于两个独立的动态过程,即连续控制动态过程和离散学习动态过程.现分别用两个变量 t 和 k 来表示这两个动态过程的自变量,其中 t 为一个周期内的时间连续变量, k 表示学习次数的离散变量,从而可以进一步假定

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(kL + \tau) = \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kL + \tau) = \mathbf{u}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(kL + \tau) = \mathbf{e}(k, \tau) \end{cases}$$

则式 (4) 和 (5) 化为

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) = A\Delta \mathbf{x}(k, \tau) + B\Delta \mathbf{u}(k, \tau) \quad (6)$$

以及

$$\mathbf{e}(k, \tau) = \mathbf{e}(k - 1, \tau) - C\Delta \mathbf{x}(k, \tau) - D\Delta \mathbf{u}(k, \tau) \quad (7)$$

由式 (6) 和 (7) 描述的控制对象与式 (2) 描述的截然不同.式 (2) 把控制对象在一个周期内的连续控制行为与各个周期之间的离散学习行为进行了混合描述,但在式 (6) 和 (7) 的描述中,式 (6) 描述的是一个周期内的连续控制行为,而式 (7) 描述的是各个周期之间的离散学习行为.由于式 (6) 中不包含误差项 $\mathbf{e}(k, \tau)$,从而一个周期内的控制行为不受学习行为的影响,这与事实相符.反之,由式 (7) 可知,一个周期内的控制行为直接影响到学习行为.这是由于控制行为收敛越快,则对学习的需求越低.

将式 (6) 和 (7) 写成向量形式,即

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k - 1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k, \tau) \quad (8)$$

从而重复控制设计问题转化为一类连续/离散二维系统的状态反馈控制问题,即二维状态反馈控制器

$$\Delta \mathbf{u}(k, \tau) = [\mathbf{K}_p \ \mathbf{K}_e] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k - 1, \tau) \end{bmatrix} \quad (9)$$

的设计问题.

另一方面,由于

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_e \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}_p \mathbf{x}(t)$$

以及

$$\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - L) = -C\Delta \mathbf{x}(t) - D\Delta \mathbf{u}(t)$$

从而

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_e \mathbf{e}(t - L) + \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{K}_e = \frac{\mathbf{F}_e}{1 + \mathbf{F}_e D}, \quad \mathbf{K}_p = \frac{\mathbf{F}_p - \mathbf{F}_e C}{1 + \mathbf{F}_e D} \end{cases} \quad (10)$$

由式 (10) 可得

$$\mathbf{F}_e = \frac{\mathbf{K}_e}{1 - D\mathbf{K}_e}, \quad \mathbf{F}_p = \frac{\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_e C}{1 - D\mathbf{K}_e} \quad (11)$$

显然,如果存在一个二维状态反馈控制增益 $[\mathbf{K}_p \ \mathbf{K}_e]$,则由式 (11) 可获得与图 2 相应的重复控制系统的反馈增益 $[\mathbf{F}_p \ \mathbf{F}_e]$.由式 (11) 可知,学习过程主要受参数 \mathbf{K}_e (即 \mathbf{F}_e)、控制过程主要受参数 \mathbf{K}_p (即 \mathbf{F}_p 和 \mathbf{F}_e) 支配.这两个过程既相对独立又相互影响,其中控制过程可通过调节 \mathbf{K}_p 获得改善,而学习过程可通过调节 \mathbf{K}_e 获得改善.重复控制系统的控制和学习过程可通过二维状态反馈控制器 (9) 中的反馈增益来单独调节.与此相比,现有的重复控制系统设计方法则无法通过调节反馈增益 \mathbf{F}_e 和 \mathbf{F}_p 来单独调节这两个过程.

2 基于二维混合模型的重复控制器设计

本节首先应用二维连续/离散系统方法,获得二维系统 (8) 的稳定性条件;然后基于稳定性条件和 LMI 方法推导出二维系统 (8) 存在二维状态反馈控制器的充分条件以及反馈控制器 (9) 中增益的具体形式.

2.1 二维混合模型稳定性分析

为了得出二维混合模型描述的重复控制系统的稳定性条件,先引用文献 [18] 的下述引理.

引理 1^[18].对于如下二维连续/离散系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 \\ C & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k - 1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \mathbf{u}(k, \tau) \quad (12)$$

其中, $\mathbf{x}(k, \tau) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{y}(k, \tau) \in \mathbf{R}^m, \mathbf{u}(k, \tau) \in \mathbf{R}$, 如果存在对称正定矩阵 W_1, W_2 , 以及任意合适维数对称正定矩阵 W_3 , 使得

$$-W^{01} + \bar{A}_1^T W^{10} + W^{10} \bar{A}_1 + \bar{A}_2^T W^{11} \bar{A}_2 < 0$$

即如下的 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} -W^{01} + \bar{A}_1^T W^{10} + W^{10} \bar{A}_1 & \bar{A}_2^T W^{11} \\ * & -W^{11} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

其中

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A & B_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & D_0 \end{bmatrix}$$

$W^{11} = W_3 \oplus W_2, W_3 > 0 (W_3 \in \mathbf{R}^{n \times n}), W^{10} = W_1 \oplus 0_m, W^{01} = 0_n \oplus W_2$, 则二维线性连续/离散系统 (12) 渐近稳定. 根据引理 1, 不难得到下面的定理.

定理 1. 如果存在对称正定矩阵 W_1, W_2 , 以及任意合适维数对称正定矩阵 W_3 , 使得

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & W_1 B K_e + (C + D K_p)^T W_2 (D K_e - I) \\ * & (I - D K_e)^T W_2 (I - D K_e) - W_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

成立, 其中

$$\pi_{11} = W_1 (A + B K_e) + (A + B K_e)^T W_1 + (C + D K_p)^T W_2 (C + D K_p) - W_3$$

则二维状态反馈控制器 (9) 保证二维连续/离散系统 (8) 渐近稳定.

证明. 将状态反馈控制律 (9) 代入连续/离散二维系统 (8), 应用引理 1, 易证, 当定理条件成立时, 连续/离散二维系统 (8) 渐近稳定. \square

2.2 标称系统重复控制器设计

定理 1 中的稳定性条件包含了对于闭环控制器设计的要求, 但由于条件 (13) 不是一个 LMI, 所以很难直接根据该条件进行重复控制器的设计. 下面给出了重复控制系统稳态跟踪误差收敛的充分条件, 同时也给出了重复控制器参数的具体求解方法.

引理 2 [18]. 对于二维连续/离散系统 (12), 如果存在对称正定矩阵 $Y > 0, Z > 0$, 以及合适维数的矩阵 N, M , 使得如下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} \Phi & B_0 Z + B M & Y C^T + N^T D^T \\ * & -Z & Z D_0^T + M^T D^T \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

其中, $\Phi = AY + Y^T A + BN + N^T B^T$, 则二维状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(k, \tau) = [K \ L] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{y}(k-1, \tau) \end{bmatrix} \quad (16)$$

使得闭环系统稳定, 且一个能稳的反馈控制增益为

$$K = NY^{-1}, L = MZ^{-1}$$

取 $B_0 = 0, D_0 = 1, C = -C, D = -D$ 代入引理 2, 则得如下定理.

定理 2. 如果存在对称正定矩阵 $Y > 0, Z > 0$, 以及合适维数的矩阵 N, M , 使得如下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} \Phi & B M & -Y C^T - N^T D^T \\ * & -Z & Z - M^T D^T \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

其中, $\Phi = AY + Y^T A + BN + N^T B^T$, 则二维状态反馈控制器 (9) 使得二维连续/离散系统 (8) 渐近稳定, 其中

$$K_p = NY^{-1}, K_e = MZ^{-1}$$

定理 2 给出了重复控制稳态跟踪误差收敛的充分条件, 同时也给出重复控制器参数的具体求解方法. 条件以 LMI 的形式给出, 可以方便地利用 Matlab 中的工具箱求解. 与文献 [6-7, 9, 11-15] 相比, 无需验证繁杂的频域稳定性条件. 文献 [10] 也给出了一个 LMI 条件, 但仅能应用于严格正实的标称系统. 可见, 本文的重复控制设计不但条件容易验证, 参数容易求解, 而且适用范围更广. 这从本文的数值仿真中也得到了验证.

2.3 不确定系统重复控制器设计

以上结果不难推广到不确定系统的情形. 考虑如下不确定系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\mathbf{x}(t) + (B + \Delta B(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (C + \Delta C(t))\mathbf{x}(t) + (D + \Delta D(t))\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (18)$$

假设控制对象的时变不确定结构为

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \Gamma [E_1 \ E_2] \quad (19)$$

其中, H_1, H_2, E_1, E_2 均为已知常值矩阵, Γ 是时不变不确定矩阵且满足

$$\Gamma^T \Gamma \leq I \quad (20)$$

采用与第 1 节相同的方法, 将不确定系统 (19) 的重复控制设计问题转化为如下连续/离散二维不确定系统的状态反馈控制问题

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \Delta A & 0 \\ -C - \Delta C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k-1, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B + \Delta B \\ -D - \Delta D \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k, \tau) \quad (21)$$

先给出文献 [19-20] 的如下引理.

引理 3 (Schur 补 [19]). 给定常值对称矩阵 $\Sigma = \Sigma^T$, 则下述结论等价:

- 1) $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} > 0$;
- 2) $\Sigma_{11} > 0, \Sigma_{22} - \Sigma_{12}^T \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} > 0$;
- 3) $\Sigma_{22} > 0, \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T > 0$.

引理 4 [20]. 对任意合适维数的矩阵 U, V, W , 这里 $V^T V < I$, 则 $UVW + (UVW)^T < 0$ 当且仅当存在常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\epsilon H H^T + \epsilon^{-1} E^T E < 0$$

成立.

针对二维不确定系统 (21), 有如下定理.

定理 3. 如果存在对称正定矩阵 $Y > 0, Z > 0$, 合适维数矩阵 N, M , 以及常数 $\epsilon > 0$, 使得如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & Z - DM & 0 & 0 \\ * & \Phi_{22} & BM & \Phi_{24} & 0 \\ * & * & -Z & 0 & M^T E_2^T \\ * & * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

成立, 其中 $\Phi_{11} = -Z + 2\epsilon H_2 H_2^T, \Phi_{12} = -CY - DN + 2\epsilon H_2 H_1^T, \Phi_{22} = AY + YA^T + BN + N^T B^T + 2\epsilon H_1 H_1^T, \Phi_{24} = N^T E_2^T + Y E_1^T$, 则二维状态反馈控制器 (9) 使得连续/离散二维不确定系统 (21) 鲁棒渐近稳定, 其中

$$K_p = NY^{-1}, K_e = MZ^{-1}$$

证明. 在二维状态反馈控制器 (9) 的作用下, 连续/离散二维不确定系统 (21) 即转化为如下连续/离散二维系统的稳定性问题:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k, \tau) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A + BK_p & BK_e \\ -C - DK_p & I - DK_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A + \Delta BK_p & \Delta BK_e \\ -\Delta C - \Delta DK_p & -\Delta DK_e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k, \tau) \\ \mathbf{e}(k - 1, \tau) \end{bmatrix} \quad (23)$$

定义

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{bmatrix} A + BK_p & BK_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta A_1 = \begin{bmatrix} \Delta A + \Delta BK_p & \Delta BK_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C - DK_p & I - DK_e \end{bmatrix} \\ \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta C - \Delta DK_p & -\Delta DK_e \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

由引理 2 知, 如果存在对称正定矩阵 $P_1, P_2 > 0$, 以及任意合适维数对称正定矩阵 $P_3 > 0$, 使得

$$(A_2 + \Delta A_2)^T P^{11} (A_2 + \Delta A_2) + (A_1 + \Delta A_1)^T P^{10} + P^{10} (A_1 + \Delta A_1) - P^{01} < 0 \quad (24)$$

其中, $P^{11} = P_3 \oplus P_2, P^{01} = 0_n \oplus P_2, P^{10} = P_1 \oplus 0$, 则二维线性连续/离散不确定系统 (23) 鲁棒渐近稳定.

由引理 3, 式 (24) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_2 & \Lambda_1 & P_2(I - DK_e) - P_2 \Delta DK_e \\ * & * & \Lambda_2 & P_1 BK_e + P_1 \Delta BK_e \\ * & * & * & -P_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -P_2(C + DK_p + \Delta C + \Delta DK_p) \\ \Lambda_2 &= (A + BK_p + \Delta A + \Delta BK_p)^T P_1 + P_1(A + BK_p + \Delta A + \Delta BK_p) \end{aligned}$$

由于将式 (25) 第 1 行、第 1 列从 LMI 中移去并不改变线性矩阵不等式 (25) 的负定性, 从而式 (25) 可以简写为

$$\begin{bmatrix} -P_2 & -P_2(C + DK_p) & P_2(I - DK_e) \\ * & \Lambda_3 & P_1 BK_e \\ * & * & -P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -P_2(\Delta C + \Delta DK_p) & -P_2 \Delta DK_e \\ * & \Lambda_4 & P_1 \Delta BK_e \\ * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= (A + BK_p)^T P_1 + P_1(A + BK_p) \\ \Lambda_4 &= (\Delta A + \Delta BK_p)^T P_1 + P_1(\Delta A + \Delta BK_p) \end{aligned}$$

现设 $P_1^{-1} = Y, P_2^{-1} = Z$, 并对式 (26) 先后左乘和右乘 $\text{diag}\{Z, Y, Z\}$, 得

$$\begin{bmatrix} -Z & -(C + DK_p)Y & (I - DK_e)Z \\ * & \Lambda_5 & BK_e Z \\ * & * & -Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(\Delta C + \Delta DK_p)Y & -\Delta DK_e Z \\ * & \Lambda_6 & \Delta BK_e Z \\ * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_5 &= Y(A + BK_p)^T + (A + BK_p)Y \\ \Lambda_6 &= Y(\Delta A + \Delta BK_p)^T + (\Delta A + \Delta BK_p)Y \end{aligned}$$

由式 (19) 知, 式 (27) 第 2 项可以进一步写为

$$\bar{H} \bar{\Gamma} \bar{E} + \bar{E}^T \bar{\Gamma}^T \bar{H}^T \quad (28)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \begin{bmatrix} 0 & -H_2 & -H_2 \\ 0 & H_1 & H_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{E} &= \text{diag}\{0, E_1 Y + E_2 K_p Y, E_2 K_e Z\} \\ \bar{\Gamma} &= \text{diag}\{\Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma\} \end{aligned}$$

记 $K_p Y = N, K_e Z = M$, 对式 (28) 应用引理 4, 则式 (27) 等价于

$$\begin{bmatrix} -Z & -CY - DN & Z - DM \\ * & AY + YA^T + BN + N^T B^T & BM \\ * & * & -Z \end{bmatrix} + \epsilon \bar{H} \bar{H}^T + \epsilon^{-1} \bar{E}^T \bar{E} < 0 \quad (29)$$

展开式 (29), 并由引理 3 知, 式 (29) 等价于式 (22). \square

3 数值仿真

设标称系统 (2) 为

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, & B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & D = 1 \end{cases}$$

考虑其对参考输入

$$r(t) = \sin \frac{2\pi t}{10} + 0.5 \sin \frac{4\pi t}{10} + 0.5 \sin \frac{6\pi t}{10}$$

的跟踪问题.

该控制对象非严格正实, 从而文献 [10] 的方法失效. 但根据本文定理 2, 应用 Matlab 中的 LMI 工具箱, 可以求得重复控制器参数为

$$F_p = [-0.6443 \quad -0.7532], \quad F_e = 4.0$$

系统仿真结果如图 3 所示. 经过约 2 个周期后, 系统输出便基本进入了稳定状态, 且相对稳态跟踪误差收敛于 0.

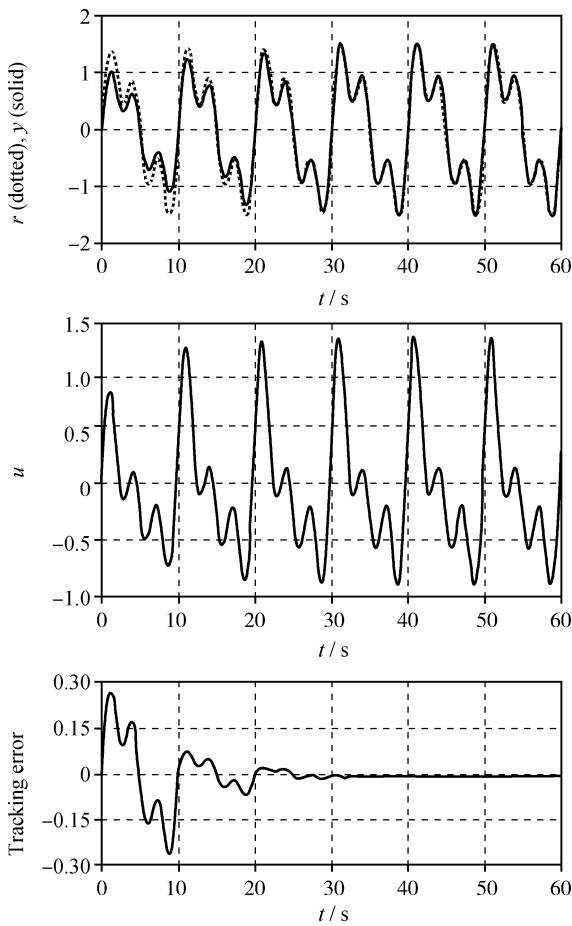


图 3 标称系统的仿真结果

Fig. 3 Simulation results for the nominal system

图 4 是当控制对象含有如下不确定性

$$\begin{cases} \Gamma = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, & -1 \leq c \leq 1 \\ H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}, & H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \end{bmatrix} \\ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & E_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

时, $c = 0.5$ 的仿真结果. 此时, 根据定理 3, 求得重复控制器参数为

$$F_p = [-0.9515 \quad -3.9668], \quad F_e = 3.8617.$$

由图 4 可见, 当控制对象含有不确定性时, 系统的鲁棒稳定性得到了保证, 而且最大相对稳态跟踪误差仅为 ± 0.0005 . 由以上两个仿真例子可见, 本文提出的重复控制设计方法不仅条件易于验证, 而且控制器参数容易求解. 与文献 [14–15] 相比, 无需附加和在线调节前馈项来改善系统的快速响应性和系统稳定性, 具有较高的控制精度. 对容许的不确定性, 设计的重复控制系统不但能保证系统的稳定性, 而且能获得较好的系统跟踪性能. 这也说明二维系统理论在重复控制设计和分析中具有广泛的应用前景.

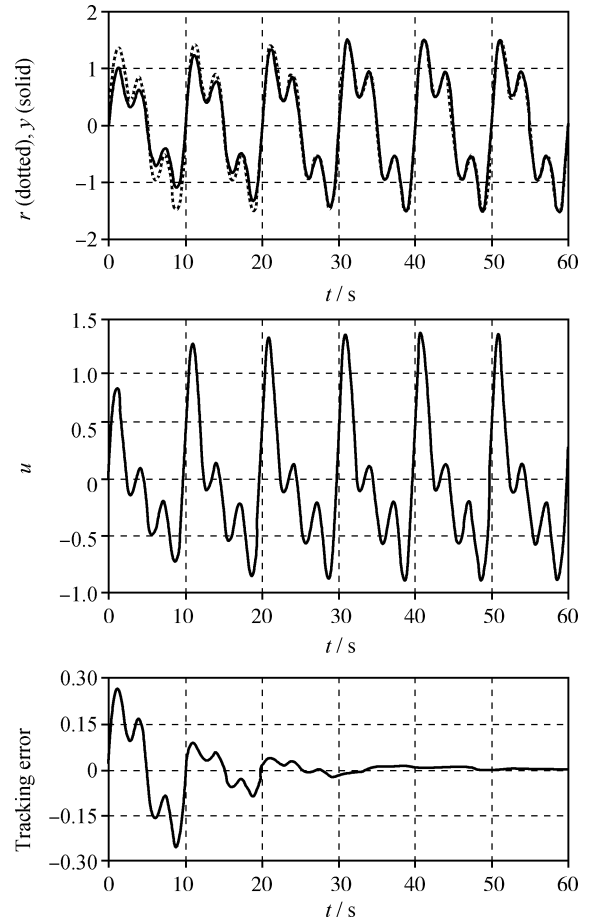


图 4 不确定系统的仿真结果

Fig. 4 Simulation results for the uncertain system

4 结 语

本文针对现有重复控制设计方法存在的局限性, 将二维系统方法引入到重复控制系统设计中, 提出了一种基于连续/离散二维混合模型的重复控制设计新方法. 该方法通过把一个周期内的连续控制行为和各个周期之间的离散学习行为分开考虑, 建立了重复控制系统的连续/离散二维混合模型. 然后在此基础上给出了系统稳定的充分条件, 推导出基于 LMI 的二维重复控制器. 本文给出的重复控制设计方法简单, 新颖有效, 仅需几个学习周期就可达到很高的控制精度, 仿真研究表明了该方法有效性. 由于控制对象输出不包含前馈直达项时在系统中直接引入重复控制器无法保证系统的稳定性, 这时必须在重复控制器中引入一个低通滤波器(一般称这种重复控制器为改进型重复控制器), 如何在二维空间中设计改进型重复控制器, 是我们下一步的研究目标, 将另文撰述.

References

- 1 Nakano M, Yamamoto Y, Inoue T, Hara S. *Repetitive Control*. Tokyo: Auto Control Press, 1990. 19–26
- 2 Inoue T, Iwai S, Nakano M. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply. In: Proceedings of the 8th IFAC World Congress. Oxford: Pergamon Press, 1981. 3137–3142
- 3 Hara S, Yamamoto Y, Omata T, Nakano M. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(7): 659–668
- 4 Hillerström G, Walgama K. Repetitive control theory and applications – a survey. In: Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress. California, USA: IFAC, 1996. 1–6
- 5 Cong Shuang. A modified repetitive control system and its application. *China University of Science and Technology*, 1998, **28**(3): 39–44
(丛爽. 一种改进的重复控制系统及其应用. 中国科技大学学报, 1998, **28**(3): 39–44)
- 6 Kim B S, Li J W, Tsao T C. Two-parameter robust repetitive control with application to a novel dual-stage actuator for noncircular machining. *IEEE Transactions on Mechatronics*, 2004, **9**(4): 664–652
- 7 Yamada M, Riadh Z, Funahashi Y. Design of discrete-time repetitive control system for pole placement and application. *IEEE Transactions on Mechatronics*, 1999, **4**(2): 110–118
- 8 She J H, Pan Y, Nakano M. Repetitive control system with variable structure controller. In: Proceedings of the 6th International Workshop on Variable Structure Systems. Gold Coast, Australia: World Scientific, 2000. 273–282
- 9 Park S W, Jeong J, Yang H S, Park Y P, Park N C. Repetitive controller design for minimum track misregistration in hard disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, **41**(9): 2522–2528
- 10 Owens D H, Li L M, Banks S P. Multi-periodic repetitive control system: a Lyapunov stability analysis for MIMO systems. *International Journal of Control*, 2004, **77**(5): 504–515
- 11 Chang K, Shim I, Park G. Adaptive repetitive control for an eccentricity compensation of optical disk drivers. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 2006, **52**(2): 445–450
- 12 Li J W, Tsao T C. Robust performance repetitive control systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, **123**(3): 330–337
- 13 Ramrath L, Singh T. A minimax approach to robust repetitive learning control. In: Proceedings of International Conference on Control and Automation. Budapest, Hungary: IEEE, 2005. 397–402
- 14 Chen J W, Liu T S. H_∞ repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, **41**(2): 1067–1069
- 15 Zhou K L, Low K S, Wang D W, Luo S F L, Zhang B, Wang Y G. Zero-phase odd-harmonic repetitive controller for a single-phase PWM inverter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2006, **21**(1): 193–201
- 16 Doh T Y, Ryoo J R, Chung M J. Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives. *IEEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2006, **153**(3): 323–330
- 17 Xie L H, Du C L. *H_∞ Control and Filtering of Two-dimensional Systems*. Berlin: Springer, 2002. 5–25
- 18 Paszke W, Galkowski K, Rogers E, Owens D H. Guaranteed cost control of uncertain differential linear repetitive processes. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2004, **51**(11): 629–634
- 19 Khargonek P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(3): 356–361
- 20 Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 1996, **63**(4): 741–750

吴敏 博士, 教授. 主要研究方向为鲁棒控制、过程控制和智能系统. 本文通信作者. E-mail: min@csu.edu.cn
(WU Min Ph.D., professor. His research interest covers robust control, process control, and intelligent systems. Corresponding author of this paper.)

兰永红 博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制和学习控制. E-mail: lyhcsu@yahoo.com.cn
(LAN Yong-Hong Ph.D. candidate. His research interest covers robust control and learning control.)

余锦华 博士, 副教授. 主要研究方向为控制理论与应用、专家控制和智能机器人. E-mail: she@cc.teu.ac.jp
(SHE Jin-Hua Ph.D., associate professor. His research interest covers the application of control theory, expert control, and robotics.)