

具有不确定性的非线性切换系统的约束预测控制

苏佰丽^{1,2} 李少远¹

摘要 针对一类具有不确定性和变量约束的非线性切换系统, 提出了一种基于 Lyapunov 函数的预测控制方法, 其中状态约束分为两种情况: 1) 要求状态变量在所有时刻都满足约束 (称为硬约束); 2) 允许状态在某些时刻超出约束 (称为软约束). 主要思想是: 对切换系统的每一个子系统, 在输入和状态均受约束的情况下, 设计基于 Lyapunov 函数的有界控制器和预测控制器, 在两者之间适当切换, 得到初始稳定区域的描述并使得子闭环系统保持稳定. 对整个切换系统, 设计适当的切换律以保证: 1) 在切换时刻, 闭环系统的状态处在切入系统的稳定区域内; 2) 切入模块的 Lyapunov 函数是非增的, 从而可保证稳定性. 在状态变量的约束是软约束时, 对每一子模块首先设计一个控制策略, 尽快将状态控制到初始稳定区域, 然后再利用稳定区域内的控制律使系统稳定.

关键词 切换系统, 输入约束, 状态约束, 基于 Lyapunov 的有界控制, 模型预测控制, 稳定区域

中图分类号 TP 273.13

Constrained Predictive Control for Nonlinear Switched Systems with Uncertainty

SU Bai-Li^{1,2} LI Shao-Yuan¹

Abstract In this paper, a Lyapunov-based constrained predictive controller is proposed for a kind of nonlinear switched systems with uncertainty and constraints for the cases that the state constraints need to be enforced at all times (hard constraints) and they can be relaxed for some time (soft constraints). The main idea is to design a Lyapunov-based limited controller and a predictive controller for each subsystem, also a suitable switched law to stabilize the closed-loop subsystem, and provide an explicitly characterized set of initial conditions. For the whole switched system, a suitable switched law is designed to ensure: 1) the state of the closed-loop system, at the time of the transition, resides in the stability region of the mode that the system is switched into; 2) the Lyapunov function for each mode is nonincreasing wherever the mode is reactivated, thereby guaranteeing the stability. For the case where the state constraints are soft, we propose a control strategy for each subsystem such that the state is driven into the stabilization region, then the closed-loop system is stabilized by the controller defined in the stabilization region.

Key words Switched system, control constraint, state constraint, Lyapunov-based limited control, model predictive control (MPC), stable region

切换系统是一类特殊的混杂动态系统, 由一组子系统组成, 用切换律来表征在不同子系统之间的切换方式. 近年来, 切换系统的稳定控制问题已日益引起人们的研究兴趣^[1].

已有文献利用多 Lyapunov 函数 (Multiple Lyapunov functions, MLFs) 方法对切换系统进行了稳定性分析^[2-4]. 这些方法已经促进了多种切换系统控制方法的发展^[5], 它的主要特点和优点是可以给出系统初始稳定区域的描述, 并能很好地处理

不确定性和约束, 缺点是不能就事先给定的性能指标进行优化设计.

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 是一种可以处理系统约束的优化控制方法^[6-8]. 对线性系统, 关于 MPC 的分析和设计已经有了深入的研究^[9]. 然而对于非线性系统, MPC 的鲁棒性设计仍是个需要深入研究的重要课题. 已有的结果普遍计算量偏大, 非线性项的存在使得非线性优化问题是非凸的, 并且这些控制方法的鲁棒稳定性都是在初始可行的假设下得到的. 然而这种初始可行集的确定非常困难. 由于实际系统往往带有一定的不确定性, 使得非线性优化问题的初始可行性未必得到保证.

将基于 Lyapunov 函数的有界控制和模型预测控制的设计有机结合, 设计基于 Lyapunov 函数的混合预测控制, 一方面可以给出系统初始稳定区域的一个描述, 另一方面在预测控制初始不可行时, 给出控制器的一个补充. 文献 [10] 在输入受约束时, 给出了基于 Lyapunov 函数的预测控制方案, 但没有

收稿日期 2007-07-25 收修改稿日期 2007-10-18
Received July 25, 2007; in revised form October 18, 2007
国家自然科学基金 (60774015, 60534020), 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2006AA042173), 高校博士点基金 (20060248001) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60774015, 60534020), National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2006AA042173), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20060248001)
1. 上海交通大学自动化系 上海 200240 2. 曲阜师范大学电气信息与自动化学院 日照 276826
1. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 2. College of Electrical Information and Automation, Qufu Normal University, Rizhao 276826
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01140

考虑系统带有不确定项的情形. 文献 [11] 在输入和状态均受约束的情况下, 文献 [12] 在系统带有不确定项时, 分别提出了一种基于 Lyapunov 函数的混合预测控制方法, 但是考虑的不是切换系统.

本文针对一类带有不确定性以及变量约束的切换非线性系统, 研究了基于 Lyapunov 函数的预测控制下的稳定问题. 其主要思想是: 对切换系统的每一个子系统, 在输入和状态均受约束的情况下, 设计基于 Lyapunov 函数的有界控制器和预测控制器, 并在两者之间适当切换, 以得到初始稳定区域的描述并使得子闭环系统保持稳定. 对整个切换系统, 设计适当的切换律, 使得系统能保证: 1) 在切换时刻, 闭环系统的状态处在切入系统的稳定区域内; 2) 切入模块的 Lyapunov 函数是非增的, 从而可保证稳定性. 在状态变量的约束是软约束时, 对每一子模块首先设计一个控制策略, 尽快将状态控制到初始稳定区域, 然后再利用稳定区域内的控制律使系统稳定.

1 问题描述

考虑如下状态空间描述的切换非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)) + G_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}_{\sigma(t)}(t) + W_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t))\boldsymbol{\theta}_{\sigma(t)}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(t) \in X \subseteq \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{u}_{\sigma(t)}(t) \in U_{\sigma} \subseteq \mathbf{R}^m$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\sigma(t)} \in \Theta_{\sigma} \subseteq \mathbf{R}^q, \quad \sigma(t) \in K = \{1, \dots, p\}$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1, \dots, x_n]^T \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ 表示连续时间状态变量, 它在集合 X 上取值, X 表示对状态的约束, 本文中状态的约束分为两种情况来考虑: 一种是硬约束, 一种是软约束. $\mathbf{u}_{\sigma}(t) = [u_{\sigma}^1(t), \dots, u_{\sigma}^m(t)]^T \in U_{\sigma} \subset \mathbf{R}^m$ 表示受限操作输入, 它在一个非空凸紧集 $U_{\sigma} = \{\mathbf{u}_{\sigma} \in \mathbf{R}^m : \|\mathbf{u}_{\sigma}\| \leq u_{\sigma}^{\max}\}$ 上取值, 其中, $\|\cdot\|$ 表示欧式范数, $u_{\sigma}^{\max} > 0$ 是输入约束的幅值; $\boldsymbol{\theta}_{\sigma}(t) = [\theta_{\sigma}^1(t), \dots, \theta_{\sigma}^q(t)] \in \Theta_{\sigma} \subseteq \mathbf{R}^q$ 表示系统的有界不确定性, 它在 \mathbf{R}^q 的一个非空凸紧集 $\Theta_{\sigma} = \{\boldsymbol{\theta}_{\sigma} \in \mathbf{R}^q : \|\boldsymbol{\theta}_{\sigma}\| \leq \theta_{\sigma}^b\}$ 中取值. $\sigma : [0, \infty) \rightarrow K$ 是右连续的切换符号函数, 即 $\sigma(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \sigma(t)$ 对所有的 k 成立, 这表明系统在有限的时间间隔内只能切换有限次. p 是切换系统的模型个数, 当 $\sigma(t)$ 取不同的值时, 向量场 $\mathbf{f}_{\sigma}(\cdot)$, 矩阵 $G_{\sigma}(\cdot)$, $W_{\sigma}(\cdot)$ 和控制输入 $\mathbf{u}_{\sigma}(\cdot)$ 及参数 $\boldsymbol{\theta}_{\sigma}(t)$ 取不同的值来共同决定 $\dot{\mathbf{x}}$. 本文中, 用符号 $t_{k_1}^{\text{in}}$ 和 $t_{k_1}^{\text{out}}$ 分别表示第 k 个子系统的第 r 个切入和切出时间, 即 $\sigma(t_{k_1}^+) = \sigma(t_{k_1}^-) = k$. 在此记号下, 连续状态可表示成: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + G_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k + W_k(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_k$, $t_{k_1}^{\text{in}} \leq t \leq t_{k_1}^{\text{out}}$, $T_{k_1}^{\text{in}} = \{t_{k_1}^{\text{in}}, t_{k_2}^{\text{in}}, \dots\}$ 和 $T_{k_1}^{\text{out}} = \{t_{k_1}^{\text{out}}, t_{k_2}^{\text{out}}, \dots\}$ 分别表示第 k 个子系统被切入和

切出的时刻集合. 对所有的 $k \in K$, 假设向量函数 $\mathbf{f}_k(\mathbf{x})$, $n \times m$ 矩阵 $G_k(\mathbf{x})$ 和 $n \times q$ 矩阵 $W_k(\mathbf{x})$ 在切入端口是充分光滑的, 并且 $\mathbf{f}_k(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 本文中, 记号 $L_{\mathbf{f}}\bar{h}$ 表示标量函数 $\bar{h}(\mathbf{x})$ 关于向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的标准李导数, 即 $L_{\mathbf{f}}\bar{h}(\mathbf{x}) = (\partial\bar{h}/\partial\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\sup_{\tau \geq t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau))\}$.

本文的目的是设计基于 Lyapunov 函数的预测控制器和适当的切换律, 使得切换闭环系统稳定, 输入和状态变量均满足约束, 并且可以给出系统初始稳定区域的一个描述.

2 基于 Lyapunov 函数的预测控制器设计

首先回顾一下基于 Lyapunov 函数的有界控制器设计方案, 用于描述使得系统稳定的初始稳定区域. 方便起见, 我们讨论状态反馈控制问题, 故假设所有状态是已知的或可测的.

2.1 基于 Lyapunov 函数的有界控制

考虑某一固定 $\sigma(t) = k (k \in K)$ 下的子系统, 假设存在控制 Lyapunov 函数 V_k , 类似于文献 [4] 中的结果, 可以构造如下的连续有界控制律

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} -k_k(\mathbf{x}, u_k^{\max})(L_{G_k}V_k)^T(\mathbf{x}), & \|(L_{G_k}V_k)^T(\mathbf{x})\| \neq 0 \\ \mathbf{0}, & \|(L_{G_k}V_k)^T(\mathbf{x})\| = 0 \end{cases} = \mathbf{b}_k(\mathbf{x}) \quad (2)$$

其中

$$k_k(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_k(\mathbf{x}) + \sqrt{(\alpha_k^1(\mathbf{x}))^2 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^4}}{(\beta_k(\mathbf{x}))^2 \left[1 + \sqrt{1 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^2}\right]} \quad (3)$$

其中, $\alpha_k(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}_k}V_k + (\rho_k\|\mathbf{x}\| + \chi_k\theta_k^b\|(L_{W_k}V_k)^T\|)\|\mathbf{x}\|/(\|\mathbf{x}\| + \phi_k)$, $\alpha_k^1(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}_k}V_k + \rho_k\|\mathbf{x}\| + \chi_k\theta_k^b\|(L_{W_k}V_k)^T\|$, $\beta_k(\mathbf{x}) = \|(L_{G_k}V_k)^T\|$, $L_{G_k}V_k(\mathbf{x}) = [L_{\mathbf{g}_k^1}V_k, \dots, L_{\mathbf{g}_k^m}V_k]$ 和 $L_{W_k}V_k(\mathbf{x}) = [L_{\mathbf{w}_k^1}V_k, \dots, L_{\mathbf{w}_k^m}V_k]$ 都是行向量, \mathbf{g}_k^i 是 G_k 第 i 列, \mathbf{w}_k^i 是 W_k 第 i 列, 另外 $\rho_k > 0$, $\chi_k > 1$, $\phi_k > 0$ 是调节参数.

对上述控制器, 可计算如下稳定区域的一个估计值

$$\Omega_k(u_k^{\max}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : V_k(\mathbf{x}) \leq c_k^{\max}\} \quad (4)$$

其中, $c_k^{\max} > 0$ 是使得 $\Phi_k(u_k^{\max}) \supseteq \Omega_k(u_k^{\max}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 的最大值.

$$\Phi_k(u_k^{\max}) = \{\mathbf{x} \in X : \alpha_k^1(\mathbf{x}) \leq u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x})\} \quad (5)$$

有界控制器 (2)~(3) 关于测量误差具有鲁棒性, 它在一个充分小的保持间隔 Δ 下离散应用于系统, 可保证系统的闭环稳定性. 特别地, 该控制律对

于位于 Ω_k 内的所有初始条件, 可保证闭环状态保持在 Ω_k 内, 并且可保证其收敛到原点的某个小邻域内, 其大小依赖于 Δ . 这一鲁棒特性将在下面的引理 1 中描述, 而且要在基于 Lyapunov 函数的预测控制器设计中应用. 对于更进一步的结果, 可参考文献 [13].

引理 1. 考虑 $\sigma(t) = k$ 下的有约束系统 (1), 利用 Lyapunov 函数 V_k 和 $\rho_k > 0$ 设计有界控制律 (2)~(3), 在其作用下计算稳定区域估计 Ω_k , 令 $\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_k(j\Delta)$, $j\Delta \leq t \leq (j+1)\Delta$, 其中, $\mathbf{u}_k(j\Delta) = \mathbf{b}_k(\mathbf{x}(j\Delta))$, $j = 0, \dots, \infty$, 则给定一正实数 d_k , 存在正实数 Δ_k^* , δ'_k 和 ε_k , 使得如果 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega_k$ 且 $\Delta \in (0, \Delta_k^*]$, 有 $\mathbf{x}(t) \in \Omega_k \subseteq X, \forall t \geq 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$. 而且, 如果 $V_k(\mathbf{x}_0) \leq \delta'_k$, 有 $V_k(\mathbf{x}(\tau)) \leq \delta'_k, \forall \tau \in [0, \Delta]$; 如果 $\delta'_k < V_k(\mathbf{x}_0) \leq c_k^{\max}$, 有 $\dot{V}_k(\mathbf{x}(\tau)) \leq -\varepsilon_k, \forall \tau \in [0, \Delta]$ (证明见附录 A).

注 1. 非线性系统基于控制 Lyapunov 函数 (Control Lyapunov function, CLF) 的稳定性已经在很多非线性控制文献中有了深刻的研究^[14]. 但是有约束 CLFs 的构造仍是一个难题 (特别是对非线性系统). 对于工程建模中常得到的几类非线性系统, 通过应用系统的特殊结构, 已经有了系统化且计算简便易行的构造无约束 CLFs 的方法. 例如对反馈线性化系统应用二次函数, 针对具有严格反馈形式的系统利用 Backstepping 方法来构造 CLFs. 本文中, 将利用无约束 CLFs 来设计控制律 (2)~(3) 形式下的有界控制器, 并用于精确刻画相应的稳定区域 (4)~(5). 然而结果可能并不能得到完整的吸引域 (这对于线性系统也仍是个需要进一步解决的问题), 但通过几个 CLFs 的结合可以进一步扩展这一区域^[15].

2.2 基于 Lyapunov 函数的预测控制

对某一 $\sigma(t) = k (k \in K)$, 在状态约束为硬约束时, 考虑系统 (1) 的预测控制问题. 这里提出一种基于 Lyapunov 函数的 MPC 的设计方法. 对这一预测控制器设计, 在状态 \mathbf{x} 和时刻 t 的控制动作可通过在线求解如下形式的有限时域优化控制问题得到

$$P(\mathbf{x}, t) : \min\{J(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_k(\cdot)) \mid \mathbf{u}_k(\cdot) \in S_k, \theta_k \in \Theta_k, \mathbf{x}(\cdot) \in X\} \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + G_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k + W_k(\mathbf{x})\theta_k \quad (7)$$

$$\dot{V}_k(\mathbf{x}(\tau)) \leq -\varepsilon_k, \tau \in [t, t + \Delta), \text{ 若 } V_k(\mathbf{x}(t)) > \delta'_k \quad (8)$$

$$V_k(\mathbf{x}(\tau)) \leq \delta'_k, \tau \in [t, t + \Delta), \text{ 若 } V_k(\mathbf{x}(t)) > \delta'_k \quad (9)$$

其中, ε_k, δ'_k 由引理 1 定义, $S_k = S_k(t, T_k)$ 是一族周期为 Δ 的分段连续函数 (右连续函数), 将 $[t, t + T_k]$ 映射到 U_k , T_k 是特定时间, V_k 是用于有界控制器设计的 Lyapunov 函数. S_k 中的控制 $\mathbf{u}_k(\cdot)$ 由序列 $\{\mathbf{u}_k[j]\}$ 刻画, 其中, $\mathbf{u}_k[j] = \mathbf{u}_k(j\Delta)$ 满足 $\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_k[j], t \in [j\Delta, (j+1)\Delta]$, 性能指标为

$$J(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_k(\cdot)) = \int_t^{t+T} [\mathbf{x}_u^T(s)Q\mathbf{x}_u(s) + \mathbf{u}_k^T(s)R\mathbf{u}_k(s)]ds + \mathbf{x}_u^T(t+T)S\mathbf{x}_u(t+T) \quad (10)$$

其中, Q, S 是半正定对称矩阵, R 是严格正定对称阵, $\mathbf{x}_u(s)$ 表示在控制 \mathbf{u} , 时刻 t 的初始状态 \mathbf{x} 下系统 (1) 的解. 优化控制 $\mathbf{u}_k^0(\cdot) \in S_k$ 在时间段 $[t, t + \Delta]$ 应用于对象, 并重复此过程. 从而定义了一个模型预测控制器

$$M_k(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{u}_k \in U_k} (J(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_k(\cdot))) = \mathbf{u}_k^{[1]} \quad (11)$$

由于不确定性项的存在, 上述预测控制器的初始可行性未必得到保证. 在该预测控制器不可行时, 可将控制器切换为有界控制器. 为给出完整的控制器描述, 将子系统写成切换形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + G_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k^{[i(t)]} + W_k(\mathbf{x})\theta_k \quad (12)$$

其中, $i(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2\}$ 是切换信号, 它是个分段右连续函数. 假设系统在任意有限时间间隔内只切换有限次. 当且仅当 $i(t) = 1$ 时, $\mathbf{u}_k^{[i(t)]}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_k^{[1]}(\mathbf{x})$; 当且仅当 $i(t) = 2$ 时, $\mathbf{u}_k^{[i(t)]}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_k^{[2]}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_k(\mathbf{x})$.

引理 2. 考虑切换非线性系统 (12), 控制动作 $\mathbf{u}_k(\mathbf{x})$ 在前述的有界 Lyapunov 控制器 (2)~(3) 和模型预测控制器 (6)~(10) 之间进行切换. 设 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega_k \subseteq X$, 定义在 MPC 控制律下, 最早使得闭环系统的状态满足 $V_k(\mathbf{x}(t^-)) = c_k^{\max}$ 的时刻为 T_s^k ; 最早使得 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$ 的时刻为 T_d^k ; MPC 控制器不可行的最早时刻为 T_{inf}^k ; $T_{design}^k (0 \leq T_{design}^k < \infty)$ 为设计时间. 定义 $T_{switch,[1]}^k = \min\{T_s^k, T_d^k, T_{inf}^k, T_{design}^k\}$, 取切换律为

$$i(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_{switch,[1]}^k \\ 2, & t \geq T_{switch,[1]}^k \end{cases} \quad (13)$$

则闭环系统的状态满足: $\mathbf{x}(t) \in \Omega_k, \forall t \geq 0$ 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$ (证明见附录 B).

注 2. 注意到通常 Lyapunov-based 预测控制方法综合了类似的 Lyapunov 函数以降低约束, 它要求在预测时域的终端保持约束 (8), 而在这一过程的第一步假设初始约束的可行性. 预测控制器 (6)~(10) 由于系统不确定性项的存在, 所以初始可行

性未必可以保证, 故结合基于 Lyapunov 函数的有界控制器, 通过以上切换律 (13) 构成一个混杂切换控制器, 来保证系统的闭环稳定性.

注 3. 非线性模型预测控制 (Nonlinear model predictive control, NMPC) 在实际应用时的关键问题在于, 刻画一个初始条件集合, 使得起始于该初始集合的 NMPC 控制器可保证闭环系统的稳定性; 或给定这样一个集合, 辨别使得优化问题可行的预测时域值. 选择适当的大时域长度只能增加非线性优化问题的复杂度使其难于处理. 由于闭环系统稳定性由起始于一个初始条件集的 Lyapunov-based 预测控制器来保证, 与预测时域无关, 计算控制动作的时间可选择小一些以降低计算的复杂度.

注 4. 由于对状态变量的观测只有在采样时刻 $\Delta_s > \Delta_k^*$ 时才可持续得到, 即比给定的有界控制设计时刻大时才可行, 因此重新设计有界控制器以增加鲁棒区域是必要的, 从而可产生一个修正的可行性区域估计. 在设计有界控制器时增大参数 ρ_k 的值可得到 Δ_k^* 的较大值, 然而这会导致稳定区域估计的缩小. 如果采样间隔取值比较合理, 参数 ρ_k 的增大会使稳定域的估计值缩小, 而增加 Δ_k^* 使其大于 Δ_s , 并保持基于 Lyapunov 预测控制器所要求的可行性和稳定性.

2.3 利用控制器切换处理状态软约束

考虑状态约束为软约束的情形, 即允许状态在某些时刻超出约束, 此时重要的是要应用控制作用减小状态超出约束的时间.

对某一 $\sigma(t) = k (k \in K)$, 考虑系统 (1), 此时我们将首先设计一个控制器, 将状态轨迹引入引理 2 中的可行区域, 并尽可能地减小状态逃逸的时间; 然后应用引理 2 中提出的控制器使系统达到稳定. 为此, 同样将系统 (1) 写成切换形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + G_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k^{[j]} + W_k(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_k, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (14)$$

其中, $j : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 是右连续的切换函数, 并假设在任一有限时间间隔内只进行有限次切换. 当 $j(t) = 1$ 时, $\mathbf{u}_k^{[j]}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}_k^{[1]}$ (即应用基于 Lyapunov 函数的 MPC 控制器 (6) ~ (10)); 当 $j(t) = 2$ 时, $\mathbf{u}_k^{[j]}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}_k^{[2]} = \mathbf{b}_k(\mathbf{x})$ (即应用基于 Lyapunov 函数的有界控制器); 当 $j(t) = 3$ 时, $\mathbf{u}_k^{[j]}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}_k^{[3]}$ (设计另一个 MPC 控制器来减小状态的逃逸时间). 下面的引理 3 给出了控制律 $\mathbf{u}_k^{[3]}$ 以及切换律.

引理 3. 考虑切换系统 (14), 假设存在控制 Lyapunov 函数 V_k , 并给定一对正实数 (d_k, ρ_k) , 选择 Δ 使得 $\Delta \leq \Delta_k^*$, 其中 Δ_k^* 由引理 1 定义. 给定初始条件 $\mathbf{x}_0 \in \Omega_u^k$ (Ω_u^k 定义见附录 A), 采用时间间隔 Δ , 在有界控制器 (2) ~ (3) 作用下, 令 T_{kb} 是使得

$\mathbf{x}(T_{kb}) \in \Omega_k$ 的时刻, 考虑如下优化问题

$$\mathbf{u}_k = \arg \min_{\mathbf{u}_k \in U_k} (J) = \mathbf{u}_k^{[3]} \quad (15)$$

$$J = qV_k(\mathbf{x}(t + \Delta)) + \int_t^{t+T_k} [\|\mathbf{u}_k(s)\|_R^2] ds \quad (16)$$

其中, $q > 0, R > 0, T_k = T_{kb} - t$ 是预测时域, 约束为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) + G_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k^{[j]} + W_k(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_k \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_k \in U_k \quad (18)$$

$$V_k(\mathbf{x}(t + k\Delta)) \leq V_k(\mathbf{x}(t + (k - 1)\Delta)),$$

$$k = 1, \dots, \frac{T_k}{\Delta} \quad (19)$$

$$\mathbf{x}(t + T_k) \in \Omega_k \quad (20)$$

定义在 MPC 控制律 $\mathbf{u}_k^{[3]}$ 下, 使得闭环系统的状态满足 $\mathbf{x}(t) \in \Omega_k$ 的最早时刻为 T_m^k ; 使得 MPC 控制器 $\mathbf{u}_k^{[3]}$ 不可行的最早时刻为 $T_{inf,[2]}^k$. 如果 $T_{inf,[2]}^k < T_m^k$, 取切换律为

$$i(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < T_{inf,[2]}^k \\ 2, & T_{inf,[2]}^k \leq t < T_m^k \\ 1, & T_m^k \leq t < T_{switch,[1]}^k \\ 2, & t \geq T_{switch,[1]}^k \end{cases} \quad (21)$$

如果 $T_{inf,[2]}^k \geq T_m^k$, 切换律为

$$i(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < T_m^k \\ 1, & T_m^k \leq t < T_{switch,[1]}^k \\ 2, & t \geq T_{switch,[1]}^k \end{cases} \quad (22)$$

则闭环系统的状态满足: $\mathbf{x}(t) \in \Omega_k, \forall t \geq 0$, 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$ (证明类似于引理 2).

注 5. 对线性系统, 处理状态约束的典型办法是通过在目标函数中加补偿项来放松约束条件^[14], 或通过求解一个多目标优化问题对状态约束违反的时间和大小进行极小化^[13]. 然而这些方法不能限制状态超出约束的时间. 有界控制器的应用, 可以得到状态轨迹进入 Ω_k 时间的估计值, 从而使得状态满足约束. 进一步, 因为目标函数在下一时刻对 Lyapunov 函数本身的值进行了极小化, 而目标集 Ω_k 又使得控制动作尽快地将轨迹导入可行区域内, 使得状态超出约束的时间变得很短.

2.4 非线性切换系统的预测控制

现在考虑状态约束下的非线性切换系统 (1), 切换时间序列定义为: $T_{k,in} = \{t_{k_1^{in}}, t_{k_2^{in}}, \dots\}$ 和 $T_{k,out} = \{t_{k_1^{out}}, t_{k_2^{out}}, \dots\}$. 对切换系统的每一个模型, 如前所述, 可设计两个预测控制方案,

并根据状态进行切换. 下面的定理 1 描述了能保证闭环系统稳定的 Lyapunov-based 预测控制律.

定理 1. 考虑非线性切换系统 (1), 设存在控制 Lyapunov 函数 $V_k, k = 1, \dots, p$, 给定 $\rho_k, k = 1, \dots, p$, 连续应用有界控制律 (2)~(3) 得到稳定域估计 $\Omega_k, k = 1, \dots, p$, 令设计参数 $0 < T_{\text{design}} < \infty, t$ 满足 $t_{k_r^{\text{in}}} \leq t \leq t_{k_r^{\text{out}}}$, 且对某些 m, k 有 $t_{m_j^{\text{in}}} = t_{k_r^{\text{out}}}$. 考虑由控制律 (6)~(10) 以及式 (15)~(20) 定义的优化问题, 切换律取为式 (21) 和 (22), 且如果 $t_{k_r^{\text{out}}} = t_{m_j^{\text{in}}} < \infty$, 则如式 (23) (见本页下方) 所示.

式 (23) 中, ε^* 是一个正实数. 给定正实数 d^{max} , 存在正实数 Δ^* 和 $\delta'_k, k = 1, \dots, m$, 使得对 $\forall \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega_u^k$, 闭环系统的状态都满足: $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d^{\text{max}}$ (证明见附录 C).

注 6. 下面给出应用定理 1 的预测控制器算法步骤.

1) 给定系统模型 (1) 和系统输入、状态的约束, 对每个模型设计有界控制器 (2)~(3) 和此时的稳定域估计 (4)~(5).

2) 给定状态要收敛到的区域直径 d^{max} , 计算 $\Delta_k^*, k = 1, \dots, p$, 以使得在控制律 (6)~(10) 以及切换律 (13) 下 (当对状态的约束为硬约束时), 或在控制律 (15)~(20) 以及切换律 (21) 和 (22) 下, 每个子模型都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d^{\text{max}}$. 计算 $\Delta^* = \min_{k=1}^p \{\Delta_k^*\}$, 选取 $\Delta_{k_r} \in (0, \Delta^*]$, 对某一整数 $l_{k_r} > 0$ 使得 $t_{k_r^{\text{out}}} - t_{k_r^{\text{in}}} = l_{k_r} \Delta_{k_r}$.

3) 考虑闭环系统第 r 次切换到第 k 个系统的时间 $t_{k_r^{\text{in}}}$, 并且状态是否属于第 k 个系统的稳定区域 Ω_k .

4) 在切换时间集合中选取 $t_{m_j^{\text{in}}} = t_{k_r^{\text{out}}}$.

5) 考虑定理 1 中约束 $V_m(t_{m_j^{\text{in}}}) \leq V_m(t_{m_{j-1}^{\text{in}}}) - \varepsilon^*$, 即要求闭环系统进入第 m 个模型时, V_m 的值比最近一次进入第 m 个模型时的值小. 如果在此之前未进入过第 m 个模型, 即 $j = 1$, 此时 $V_m(t_{m_{j-1}^{\text{in}}}) = c_m^{\text{max}}$, 如果闭环系统的状态已经进入要求的原点的邻域内, 则应用 $V_m(t_{m_j^{\text{in}}}) \leq \delta'_m$, 以保证状态保持在此邻域内, 即 $\|\mathbf{x}\| \leq d^{\text{max}}$.

注 7. 注意到切换时间可以是固定的, 状态的预测只需从现在到下一切换时间之间进行. 因此只

需在两个连续切换之间的时间段应用预测控制器. 然而, 时域值不是一个决策变量, 它可以通过估计现在到下一个切换进行时的时间来确定. 但到最后一个模型的控制时, 它的值是固定的并且等于一个事先设定的参数. 从这一点出发, 对最后一个模型预测控制器 (15)~(20) 的设计简化为 Lyapunov-based 预测控制器的设计, 并对任意预测时域可以保证闭环系统的实际稳定性.

3 结论

本文针对一类带有不确定性以及变量约束的切换非线性系统, 考虑了基于 Lyapunov 函数的预测控制下的稳定问题. 其中状态约束分为两种情形: 一种是要求状态在所有时间都满足约束 (称为硬约束); 一种是允许状态在某些时刻超出约束 (称为软约束). 其主要思想是: 对切换系统的每一个子系统, 在输入和状态均受约束的情况下, 设计基于 Lyapunov 函数的有界控制器和预测控制器, 并在两者之间适当切换, 以得到初始稳定区域的描述并使得子闭环系统保持稳定. 对整个切换系统, 设计适当的切换律, 使得系统可在不同的子系统间进行切换, 以保证: 1) 在切换时刻, 闭环系统的状态处在切入系统的稳定区域内; 2) 切入模块的 Lyapunov 函数是非增的, 从而可保证稳定性. 在状态变量的约束是软约束时, 对每一子模块首先设计一个控制策略, 尽快将状态控制进初始稳定区域, 然后再利用稳定区域内的控制律使系统稳定.

附录 A. 引理 1 的证明

证明. 证明分两部分: 1) 证明有界状态反馈律 (2)~(3) 对 Ω_k 中的任意初始点, 均可保证渐近稳定性; 2) 给定原点的一个直径为 d_k 的球, 要求系统要收敛到这个球, 即证明存在一个正实数 Δ_k^* , 如果保持时间选取满足 $\Delta \in (0, \Delta_k^*]$, 则在有界控制律的离散作用下, Ω_k 是不变的, 且闭环系统的状态收敛到球 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$.

1) 首先证明对 $\forall \mathbf{x} \in \Omega_k$, 控制律 (2)~(3) 满足约束. 因为

$$\begin{aligned} \alpha_k(\mathbf{x}) &= L_{f_k} V_k + (\rho_k \|\mathbf{x}\| + \chi_k \theta_k^b \| (L_{W_k} V_k)^T \|) \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| + \phi_k} \leq \\ & L_{f_k} V_k + \rho_k \|\mathbf{x}\| + \chi_k \theta_k^b \| (L_{W_k} V_k)^T \| = \\ \alpha_k^1(\mathbf{x}) &\leq u_k^{\text{max}} \beta_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$V_m(\mathbf{x}(t_{m_j^{\text{in}}})) \leq \begin{cases} V_m(\mathbf{x}(t_{m_{j-1}^{\text{in}}})) - \varepsilon^*, & \text{若 } j > 1, \quad V_m(\mathbf{x}(t_{m_{j-1}^{\text{in}}})) > \delta'_m \\ \delta'_m, & \text{若 } j > 0, \quad V_m(\mathbf{x}(t_{m_{j-1}^{\text{in}}})) \leq \delta'_m \\ c_m^{\text{max}}, & \text{若 } j = 1 \end{cases} \quad (23)$$

所以

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_k(\mathbf{x})\| &= \\ &\left\| \frac{\alpha_k(\mathbf{x}) + \sqrt{(\alpha_k(\mathbf{x}))^2 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^4}}{(\beta_k(\mathbf{x}))^2 \left[1 + \sqrt{1 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^2}\right]} \cdot (L_{G_k} V_k)^T \right\| \leq \\ &\frac{u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}) + \sqrt{(u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^2 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^4}}{(\beta_k(\mathbf{x}))^2 \left[1 + \sqrt{1 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^2}\right]} \times \\ (L_{G_k} V_k)^T &\leq u_k^{\max} \end{aligned}$$

将控制律 (2)~(3) 代入 $\sigma(t) = k$ 时的系统 (1) 中, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= L_{f_k} V_k(\mathbf{x}) + L_{G_k} V_k(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) + L_{W_k} V_k \boldsymbol{\theta}_k = \\ &L_{f_k} V_k(\mathbf{x}) + L_{W_k} V_k \boldsymbol{\theta}_k - L_{G_k} V_k(\mathbf{x}) \\ &\frac{\alpha_k(\mathbf{x}) + \sqrt{(\alpha_k(\mathbf{x}))^2 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^4}}{(\beta_k(\mathbf{x}))^2 \left[1 + \sqrt{1 + (u_k^{\max}\beta_k(\mathbf{x}))^2}\right]} \cdot (L_{G_k} V_k)^T \leq \\ &L_{f_k} V_k(\mathbf{x}) + L_{W_k} V_k \boldsymbol{\theta}_k - \alpha_k(\mathbf{x}) \leq -\rho_k \|\mathbf{x}\| \end{aligned} \quad (A1)$$

对所有的 $\mathbf{x} \in \Omega_k$ 成立, 从而在有界控制器 (2)~(3) 的作用下, 闭环系统的原点是渐近稳定的, 且 Ω_k 是吸引域的一个估计.

2) 注意到 $V_k(\mathbf{x})$ 是状态的连续函数, 故可以找到一个有限正实数 δ'_k , 使得 $V_k(\mathbf{x}) \leq \delta'_k$ 可保证 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$. 接下来证明存在 Δ_k^* , 对于 $\forall \Delta \in (0, \Delta_k^*]$, 所有起始于 Ω_k 的状态轨迹都使得 $V_k(\mathbf{x}) \leq \delta'_k$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$.

为此, 考虑稳定区域边界的环形近似, 定义: $M_k = \{\mathbf{x} \in X : (c_k^{\max} - \delta_k) \leq V_k(\mathbf{x}) \leq c_k^{\max}\} \subseteq \Omega_k$, 其中 $0 < \delta_k < c_k^{\max}$. 对某一 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in M_k$, 计算控制动作, 保持时间取为 Δ_k^{**} , 其中 Δ_k^{**} 是正实数 ($\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0, \forall t \in [0, \Delta_k^{**}]$). 则 $\forall t \in [0, \Delta_k^{**}]$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(\mathbf{x}(t)) &= L_{f_k} V_k(\mathbf{x}(t)) + L_{G_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}_0 + \\ &L_{W_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \boldsymbol{\theta}_k = L_{f_k} V_k(\mathbf{x}_0) + L_{G_k} V_k(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_0 + \\ &L_{W_k} V_k(\mathbf{x}_0) \boldsymbol{\theta}_k + (L_{f_k} V_k(\mathbf{x}(t)) - L_{f_k} V_k(\mathbf{x}_0)) + \\ &(L_{G_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}_0 - L_{G_k} V_k(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_0) + \\ &(L_{W_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \boldsymbol{\theta}_k - L_{W_k} V_k(\mathbf{x}_0) \boldsymbol{\theta}_k) \leq \\ &-\rho_k \|\mathbf{x}_0\| + (L_{f_k} V_k(\mathbf{x}(t)) - L_{f_k} V_k(\mathbf{x}_0)) + \\ &(L_{G_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}_0 - L_{G_k} V_k(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_0) + \\ &(L_{W_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \boldsymbol{\theta}_k - L_{W_k} V_k(\mathbf{x}_0) \boldsymbol{\theta}_k) \end{aligned} \quad (A2)$$

由于函数 $f_k(\cdot)$ 和矩阵 $G_k(\cdot), W_k(\cdot)$ 的元素都是连续的, $\|\mathbf{u}_k\| \leq u_k^{\max}, \|\boldsymbol{\theta}_k\| \leq \theta_k^b, M_k$ 有界, 则 $\forall \mathbf{x}_0 \in M_k$, 和固定的 Δ_k^{**} , 存在正实数 K_k^1 , 使得 $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq K_k^1 \Delta_k^{**}, \forall t \leq \Delta_k^{**}$.

由于函数 $L_{f_k} V_k(\cdot), L_{G_k} V_k(\cdot), L_{W_k} V_k(\cdot)$ 是连续的, 则给定 $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq K_k^1 \Delta_k^{**}$, 可找到正实数 K_k^2, K_k^3, K_k^4 , 使得 $\|L_{f_k} V_k(\mathbf{x}(t)) - L_{f_k} V_k(\mathbf{x}_0)\| \leq K_k^3 K_k^1 \Delta_k^{**}, \|L_{G_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}_0 - L_{G_k} V_k(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_0\| \leq K_k^2 K_k^1 \Delta_k^{**}, \|L_{W_k} V_k(\mathbf{x}(t)) \boldsymbol{\theta}_k - L_{W_k} V_k(\mathbf{x}_0) \boldsymbol{\theta}_k\| \leq K_k^4 K_k^1 \Delta_k^{**}$. 利用不等式 (7) 可得

$$\dot{V}_k(\mathbf{x}(t)) \leq -\rho_k^* \|\mathbf{x}_0\| + (K_k^1 K_k^2 + K_k^1 K_k^3 + K_k^1 K_k^4) \Delta_k^{**} \quad (A3)$$

因为由 Ω_k 的定义以及 $V_k(\cdot)$ 的正定连续性, 存在正实数 δ_k , 使得 $\|\mathbf{x}\| \geq \delta_k$, 则有 $\dot{V}_k(\mathbf{x}(t)) \leq -\rho_k^* \delta_k + (K_k^1 K_k^2 + K_k^1 K_k^3 + K_k^1 K_k^4) \Delta_k^{**}$. 选取 Δ_k^{**} 满足 $\Delta_k^{**} < (\rho_k^* \delta_k - \varepsilon_k) / (K_k^1 K_k^2 +$

$K_k^1 K_k^3 + K_k^1 K_k^4)$, 其中 ε_k 是一正实数, 满足

$$\varepsilon_k < \rho_k^* \delta_k \quad (A4)$$

可得到 $\dot{V}_k(\mathbf{x}(t)) \leq -\varepsilon_k < 0, \forall t \leq \Delta_k^{**}$. 这表明给定 δ'_k , 选择 δ_k 使得 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_k$ 并找到相应的 Δ_k^{**} , 对 $\forall \mathbf{x} \in M_k$ 计算控制作用, 保持时间小于 Δ_k^{**} , 则 \dot{V}_k 是负定的, 因此闭环系统的状态不会超出 Ω_k .

下面证明 Δ_k' 的存在性, 使得 $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_f^k = \{\mathbf{x} \in X : V_k(\mathbf{x}_0) \leq c_k^{\max} - \delta_k\}$, 有 $\mathbf{x}_t \in \Omega_u^k = \{\mathbf{x} \in X : V_k(\mathbf{x}) \leq \delta'_k\}$, 其中 $t \in (0, \Delta_k']$, 有 $\delta'_k < c_k^{\max}$.

考虑 Δ_k' 使得

$$\delta'_k = \max_{V_k(\mathbf{x}_0) \leq c_k^{\max} - \delta_k, \mathbf{u}_k \in U_k, t \in [0, \Delta_k']} V_k(\mathbf{x}(t)) \quad (A5)$$

由于 V_k 是状态的连续函数, 而状态又是时间的连续函数, 则对任一 $\delta_k < c_k^{\max}$, 可选择充分小的 Δ_k' 使得式 (10) 成立. 令 $\Delta_k^* = \min\{\Delta_k^{**}, \Delta_k'\}$. 下面证明对 $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_u^k$ 和 $\Delta \in (0, \Delta_k^*]$, 有 $\mathbf{x}(t) \in \Omega_u^k, t \geq 0$.

$\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_u^k \cap \Omega_f^k$, 由定义 $\mathbf{x}(t) \in \Omega_u^k, 0 \leq t \leq \Delta$ (因为 $\Delta \leq \Delta_k'$). 对所有的 $\mathbf{x}_0 \in \Omega_u^k \setminus \Omega_f^k$ (从而 $0 \in M_k$), 由于 $\Delta \leq \Delta_k^{**}$, 有 $\dot{V}_k < 0, 0 \leq t \leq \Delta$. 注意到对 $\mathbf{x} \in \Omega_u^k \setminus \Omega_f^k$, 可保证 $\dot{V}_k < 0$, 因此起始于 Ω_k, \mathbf{u}_k 的所有轨迹收敛到 Ω_u^k , 因此对所有的 $\mathbf{x}(0) \in \Omega_k, \mathbf{u}_k$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup V_k(\mathbf{x}(t)) \leq \delta'_k$. 最后, 由于 $V_k(\mathbf{x}) \leq \delta'_k$ 暗含 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d_k$. \square

附录 B. 引理 2 的证明

证明. 利用引理 1 的结果, 如果切换到有界控制器, 则闭环系统的状态将保持在 Ω_k 中, 即 $\mathbf{x}(T_{\text{switch},[1]}^k) \in \Omega_k$, 则 $\mathbf{x}(t) \in \Omega_k, \forall t \geq T_{\text{switch},[1]}^k$, 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}\| \leq d_k$.

因此, 只需证明在控制律 (6)~(10) 下, 闭环系统的状态可以控制在 Ω_k 内, 直至控制律切换到有界控制律. 为此分别就 $T_{\text{switch},[1]}^k$ 可能取值的四种情形, 分别证明均有 $\mathbf{x}(T_{\text{switch},[1]}^k) \in \Omega_k$.

Case 1. 如果 $T_{\text{switch},[1]}^k = T_s^k$, 由 T_s^k 的定义, 有 $\mathbf{x}((T_s^k)^-) \in \Omega_k$, 由系统式 (1) 解的连续性 (这是因为式 (12) 的右端对 \mathbf{x} 是连续的, 而对时间 t 是分段连续的, 因为只会进行有限次切换), 从而有 $\mathbf{x}(T_s^k) \in \Omega_k$, 即 $\mathbf{x}(T_{\text{switch},[1]}^k) \in \Omega_k$.

Case 2. 如果 $T_{\text{switch},[1]}^k = T_d^k$, 由 T_d^k 的定义 $\mathbf{x}(T_d^k) \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq d_k\} \subseteq \Omega_k$, 所以有 $\mathbf{x}(T_{\text{design}}^k) \in \Omega_k$.

Case 3. 如果 $T_{\text{switch},[1]}^k = T_{\text{design}}^k$, 由 T_{design}^k 的定义, $T_{\text{design}}^k = T_s^k$. 为证明 $\mathbf{x}(T_{\text{design}}^k) \in \Omega_k$, 利用反证法. 假设 $\mathbf{x}(T_{\text{design}}^k) \notin \Omega_k$, 则 $V_k(\mathbf{x}(T_{\text{design}}^k)) > c_k^{\max}$, 由解的连续性以及 $V_k(\cdot)$ 的连续性以及 $V_k(\mathbf{x}_0) \leq c_k^{\max}$, 则存在一个时刻 $0 \leq T_s^{k'} \leq T_{\text{design}}^k$, 使得 $V_k(\mathbf{x}(T_s^{k'})) = c_k^{\max}$, 而由定义, $T_s^{k'}$ 是使得 $V_k(\mathbf{x}(T_s^{k'-})) = c_k^{\max}$ 的最早时间, 故必有 $T_s^k \leq T_s^{k'} \leq T_{\text{design}}^k$, 这与 $T_{\text{design}}^k \leq T_s^k$ 矛盾. 所以有 $\mathbf{x}(T_{\text{design}}^k) \in \Omega_k$, 即 $\mathbf{x}(T_{\text{switch}}^k) \in \Omega_k$.

Case 4. 如果 $T_{\text{switch},[1]}^k = T_{\text{inf},f}^k$, 证法同 Case 3. \square

附录 C. 定理 1 的证明

证明. 基于引理 2 和 3, 此定理的证明只需证明在切换律 (23) 下, 整个闭环系统仍是稳定的. 给定原点的球直径 d^{\max} , 对每个 $k \in K$, 选取引理 1 中的 δ'_k, Δ_k^* , 选择 $\Delta_{k_r} \in (0, \Delta^*]$, 其中 $\Delta^* = \min_{k=1, \dots, p} \Delta_k^*, t_{k_r}^{\text{out}} - t_{k_r}^{\text{in}} =$

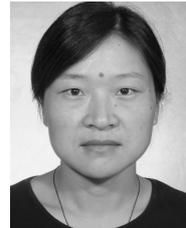
$l_{k_r} \Delta_{k_r}, l_{k_r} > 0$ 是个整数. (注意到给定两个正实数 $t_{k_r}^{\text{out}} - t_{k_r}^{\text{in}}, \Delta^*$, 总可以找到一个正实数 $\Delta_{k_r} \leq \Delta^*$ 使得 $t_{k_r}^{\text{out}} - t_{k_r}^{\text{in}} = l_{k_r} \Delta_{k_r}$).

Part 1. 首先, 考虑切换是无限次的情形. 令 t 使得 $t_{k_r}^{\text{in}} \leq t < t_{k_r}^{\text{out}}, t_{m_j}^{\text{in}} = t_{k_r}^{\text{out}} < \infty$. 考虑第 k 个模型, 如果 $V_k(\mathbf{x}) > \delta_k$, 由约束 (8) 的连续可行性, 有 $V_k(\mathbf{x}(t_{k_r}^{\text{out}})) < V_k(\mathbf{x}(t_{k_r}^{\text{in}}))$. 瞬时约束 (23) 保证了如果该模型切出后又切入, 则 $V_k(\mathbf{x}(t_{k_r+1}^{\text{in}})) < V_k(\mathbf{x}(t_{k_r}^{\text{in}}))$. 一般地, $V_k(\mathbf{x}(t_{k_r}^{\text{in}})) < V_k(\mathbf{x}(t_{k_r-1}^{\text{in}})) < \dots < c_k^{\text{max}}$. 在约束 (8)~(9) 及约束 (19) 可行的假设下, $V_k(\mathbf{x})$ 的值持续下降. 如果对 Lyapunov 函数, 该模型未激活, 总有某个 $j \in 1, \dots, p$ 使得第 j 个模型是活动的, 且 Lyapunov 函数 V_j 持续下降直至 $V_j \leq \delta_j'$ (这总是会做到的, 因为即便切换可以进行无限次, 但模型个数是有限的). 在这一点上, 约束 (9) 可保证 V_j 持续小于 δ_j' , 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d^{\text{max}}$.

Part 2. 在有限次切换的情形下, 考虑满足 $t_{k_r}^{\text{in}} \leq t < t_{k_r}^{\text{out}} = \infty$ 的 t . 在约束 (8)~(9) 及约束 (19) 连续可行的假设下, $V_k(\mathbf{x}(t_{k_r}^{\text{in}})) < V_k(\mathbf{x}(t_{k_r-1}^{\text{in}})) < \dots < c_k^{\text{max}}$, 在切入第 k 个模型的时刻有 $\mathbf{x}(t_{k_r}^{\text{in}}) \in \Omega_k$. 从这一点出发, 应用基于 Lyapunov 函数 V_k 的控制器, 约束 (19) 被去除, 从而定理 1 的控制器降为子模型中的混杂预测控制器 (6)~(10) 加切换律 (13) 以及混杂控制器 (15)~(20) 加切换律 (21) 或 (22). 由于 $\Delta_{k_r} \in (0, \Delta^*]$, 其中 $\Delta^* = \min_{k=1, \dots, p} \Delta_k^*$, 因此 $\Delta_{k_r} < \Delta_k^*$, 它可保证可行性且在预测时域内收敛到球 $\|\mathbf{x}\| \leq d^{\text{max}}$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t)\| \leq d^{\text{max}}$. \square

References

- Hespanha J P, Morse A S. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 2002, **38**(11): 1905–1917
- Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59–70
- El-Farra N H, Christofides P D. Bounded robust control of constrained multivariable nonlinear processes. *Chemical Engineering Science*, 2003, **58**(13): 3025–3047
- El-Farra N H, Christofides P D. Coordinated feedback and switching for control of hybrid nonlinear processes. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 2004, **49**(8): 2079–2098
- Hu B, Xu X, Antsaklis P J, Michel A N. Robust stabilizing control law for a class of second-order switched systems. *Systems and Control Letters*, 1999, **38**(3): 197–207
- de Oliveira K S L, Morari M. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(6): 1053–1071
- Zhao Min, Li Shao-Yuan. Dual-mode robust predictive control for nonlinear systems: a switching method between polyhedral invariant sets. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2007, **27**(3): 365–377
(赵敏, 李少远. 非线性系统双模鲁棒预测控制: 不变集切换方法. *系统科学与数学*, 2007, **27**(3): 365–377)
- Zou Tao, Li Shao-Yuan, Ding Bao-Cang. A dual-mode nonlinear model predictive control with the enlarged terminal constrained sets. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 21–27
(邹涛, 李少远, 丁宝苍. 基于扩张终端约束集的非线性双模预测控制. *自动化学报*, 2006, **32**(1): 21–27)
- Bemporad A, Borrelli F, Morari M. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(9): 1600–1606
- Mhaskar P, El-Farra N H, Christofides P D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(11): 1670–1680
- Mhaskar P, El-Farra N H, Christofides P D. Stabilization of nonlinear systems with state and control constraints using Lyapunov-based predictive control. *Systems and Control Letters*, 2006, **55**(8): 650–659
- Mhaskar P, El-Farra N H, Christofides P D. Robust hybrid predictive control of nonlinear systems. *Automatica*, 2005, **41**(2): 209–217
- Zaccarian L, Teel A R, Nesic D. On finite gain L_p stability of nonlinear sampled-data systems. *Systems and Control Letters*, 2003, **49**(3): 201–212
- Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P V. *Constructive Nonlinear Control*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1997
- El-Farra N H, Mhaskar P, Christofides P D. Uniting bounded control and MPC for stabilization of constrained linear systems. *Automatica*, 2004, **40**(1): 101–110



苏佰丽 2006 年于南开大学获得博士学位, 现为上海交通大学博士后, 曲阜师范大学副教授. 主要研究方向为预测控制和模糊控制.

E-mail: subaili@sjtu.edu.cn

(SU Bai-Li Received her Ph.D. degree from Nankai University in 2006 and now she is a post doctor at Shanghai Jiao Tong University. Her research interest covers predictive control and fuzzy control.)



李少远 上海交通大学自动化系教授, 主要研究方向为模型预测控制, 优化控制和智能系统. 本文通信作者.

E-mail: syli@sjtu.edu.cn

(LI Shao-Yuan Professor in Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers model predictive control, optimal control, and intelligent systems. Corresponding author of this paper.)