第 34 卷 第 8 期 自 动 化 学 报 Vol. 34, No. 8
2008 年 8 月 ACTA AUTOMATICA SINICA August, 2008

基于模糊 Lyapunov 函数方法的模糊广义系统 H_∞ 控制

袁宇浩 [1] 张庆灵 [1] 陈 兵 [2] 刘 超 [1]

摘 要 研究一类 T-S 模糊广义系统的容许性条件和 H_∞ 控制问题. 首先将原系统表示成增广系统, 进而基于新的模糊 Lyapunov 函数和模糊控制器得到容许性条件. 所得开环容许条件不要求子系统是容许的; 闭环容许条件中不含有控制输入矩阵与控制增益矩阵的乘积项. 对于 H_∞ 控制问题, 利用隶属度函数的性质对 H_∞ 控制条件进行了放宽, 并得到了改进的严格线性矩阵不等式 (LMI) 形式的 H_∞ 控制条件. 数值算例表明所得结论较已有文献具有较小的保守性.

关键词 T-S 模糊广义系统, 模糊 Lyapunov 函数, 容许性条件, H_∞ 控制, 严格线性矩阵不等式

中图分类号 TP 13

H_∞ Control for Fuzzy Descriptor Systems Based on Fuzzy Lyapunov Function Approach

YUAN Yu-Hao[1] ZHANG Qing-Ling[1] CHEN Bing[2] LIU Chao[1]

Abstract The admissible conditions and H_∞ control problem of T-S fuzzy descriptor systems are introduced. The original systems can be generalized to augmented systems, then some admissible conditions for fuzzy descriptor systems are obtained based on a new fuzzy Lyapunov function and new fuzzy controller. For the admissible conditions of open-loop systems, the subsystems are not required to be admissible, nor the multiplied term of input control matrix by control gain matrix has to be considered in the admissible conditions of closed-loop systems. By virtue of the property of membership function, the H_∞ control conditions are improved. Furthermore, some strict linear matrix inequalities (LMIs) are obtained. At last, some examples are given to illustrate that the obtained sufficient conditions are less conservative than the results given by previous literature.

Key words T-S fuzzy descriptor system, fuzzy Lyapunov function, admissible condition, H_∞ control, strict linear matrix inequality (LMI)

对于 T-S 模型描述的非线性广义系统的分析和综合问题, 已经取得了一些成果[1−5]. 这些成果大都是采用单 Lyapunov 函数方法, 这种方法主要归结为寻求满足一组容许性条件的公共矩阵. 如果这些条件以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的形式给出, 那么系统的容许性分析问题就可以通过凸优化技术得以解决. 但是这种寻求公共矩阵的方法存在较大的保守性, 当模糊规则较多时, 往往很难找到这样一个满足若干条件的公共矩阵. 一些学者正在致力于研究减少这种保守性的方法, 文献 [6] 运用区间动力系统理论将 T-S 模糊广义系统转化为具有范数有界不确定性的线性广义系统, 从而应用线性广义系统的鲁棒控制理论解决其容许性分析和控制问题. 这种方法降低了问题求解的难度, 但是没有充分考虑模糊系统自身的特点. 文献 [7] 则借助于矩阵范数给出了离散模糊广义系统的容许性条件, 但是此方法不易于应用到连续系统中.

考虑到上述方法的不足, 本文尝试将原系统写为增广系统的形式, 运用文献 [8] 提出的新型模糊 Lyapunov 函数和模糊控制器对 T-S 模糊广义系统的容许性做进一步研究. 由于模糊 Lyapunov 函数是若干个二次 Lyapunov 函数的模糊加权, 具有和系统模型相同的隶属度函数. 因此, 模糊 Lyapunov 函数对时间的导数中含有隶属度函数的导数项, 与文献 [9] 不同的是, 本文不需要将导数项表示为具有归一化权值的模糊加权形式, 只需要得到导函数的下界, 并且这种下界的选取对于问题的求解具有 “鲁棒性”. 对于开环系统, 本文得到了新的容许性条件, 与以往研究成果相比[1−3, 5], 此条件不必要求模糊子系统为容许的. 对于闭环广义系统, 容许性条件中不含有控制输入矩阵与控制增益矩阵的乘积项, 减少了求解过程中控制输入矩阵对控制增益的影响, 而且避免了采用完全平方技术处理双线性矩阵不等式时带来的保守性, 并减少了需要求解的 LMI 的数量, 使计算复杂度降低. 本文最后考虑了系统的 H_∞ 控制问题, 不仅利用隶属度函数的性质得到了放宽的

收稿日期 2007-06-04 收修改稿日期 2008-01-21
Received June 4, 2007; in revised form January 21, 2008
国家自然科学基金 (60574011) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574011)
1. 东北大学系统科学研究所 沈阳 110004 2. 青岛大学复杂性科学研究所 青岛 266071
1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110004 2. Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00929

控制条件, 并对已有的严格 LMI 条件进行改进, 得到了新的严格 LMI 形式的 H_∞ 控制条件.

本文中, $X>0$ $(X\geq 0)$ 表示 X 是正定 (半正定) 矩阵, $A-B>(\geq)\,0$ 表示 $A>(\geq)\,B$, 矩阵中 "*" 表示主对角线对称位置元素的转置.

1 T-S 模型描述及容许性条件

1.1 T-S 模糊广义系统描述及问题阐述

考虑由 T-S 模型描述的非线性广义系统. 模型的第 i 条规则为

$$\begin{aligned}&R_i: \text{If } \boldsymbol{\xi}_1(t) \text{ is } N_{i1} \text{ and} \cdots \text{ and } \boldsymbol{\xi}_p(t) \text{ is } N_{ip}\text{ , then}\\ &E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_i\boldsymbol{x}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t)+C_i\boldsymbol{w}(t)\\ &\quad\boldsymbol{z}(t)=A_{1i}\boldsymbol{x}(t)+B_{1i}\boldsymbol{u}(t),\quad i=1,2,\cdots,r\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\xi}_p(t)$ 为前件变量, N_{ij} 是模糊集, r 为模糊规则数. $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入向量, $\boldsymbol{w}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为外部扰动向量, $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为受控输出向量. $E\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 且 $\mathrm{rank}(E)=q\leq n$. $A_i,A_{1i}\in\mathbf{R}^{n\times n},B_i,C_i,B_{1i}\in\mathbf{R}^{n\times m},i=1,2,\cdots,r$.

对系统 (1) 运用单点模糊化、乘机推理和中心加权平均解模糊方法, 全局模糊广义系统可表示成

$$\begin{aligned}E\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\sum_{i=1}^r h_i(t)[A_i\boldsymbol{x}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t)+C_i\boldsymbol{w}(t)]\\ \boldsymbol{z}(t)&=\sum_{i=1}^r h_i(t)[A_{1i}\boldsymbol{x}(t)+B_{1i}\boldsymbol{u}(t)]\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $h_i(t)=\prod_{j=1}^p N_{ij}(\boldsymbol{\xi}_j(t))/\sum_{i=1}^r\prod_{j=1}^p N_{ij}(\boldsymbol{\xi}_j(t))$, $\boldsymbol{\xi}_j(t)$ 对于 N_{ij} 的隶属度为 $N_{ij}(\boldsymbol{\xi}_j(t))$, $\sum_{i=1}^r h_i(t)=1$, $h_i(t)\geq 0$, $\forall t\geq 0$. 本文中要求隶属度函数 $h_i(t)$ 为 $\mathbf{C}^1$ 的. 简便起见, 下文将用 h_i 代替 $h_i(t)$, $i=1,2,\cdots,r$.

本文研究系统 (2) 的 H_∞ 控制问题, 即使得系统 (2) 满足:

1) $\boldsymbol{w}(t)=0$ 时, 系统是正则、无脉冲、稳定的;

2) 在零初始条件下, 对任意 $\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,+\infty)$ 和给定的实数 $\gamma>0$, 满足 $\|\boldsymbol{w}(t)\|<\gamma\|\boldsymbol{z}(t)\|$.

考虑系统 (2) 的 H_∞ 控制问题之前, 首先研究系统 (2) 的开环系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^r h_iA_i\boldsymbol{x}(t)\tag{3}$$

的容许条件, 将系统 (3) 改写成如下增广系统

$$\tilde{E}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)=\sum_{i=1}^r h_i\tilde{A}_i\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\tag{4}$$

其中

$$\tilde{E}=\left[\begin{array}{cc}E&0\\0&0\end{array}\right],\tilde{A}_i=\left[\begin{array}{cc}0&A_i\\I&-I\end{array}\right],\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{x}(t)\end{array}\right].$$

对于系统 (3) 和系统 (4), 考虑到

$$\det(sE-\sum_{i=1}^r h_iA_i)=$$

$$\det\left(s\left[\begin{array}{cc}E&0\\0&0\end{array}\right]-\sum_{i=1}^r h_i\left[\begin{array}{cc}0&A_i\\I&-I\end{array}\right]\right)=$$

$$\det(s\tilde{E}-\sum_{i=1}^r h_i\tilde{A}_i)$$

并且 $\mathrm{rank}E=\mathrm{rank}\tilde{E}$, 由 T-S 模糊广义系统的容许性定义[1, 9], 可得系统 (4) 的容许性等价于系统 (3) 的容许性, 以下将通过研究系统 (4) 的容许性得到系统 (3) 的容许性条件.

1.2 开环系统的容许条件

定理 1. 考虑系统 (4), 设 $\dot{h}_k\geq\phi_k,\phi_k\leq 0,k=1,2,\cdots,r$. 如果存在可逆矩阵 $\tilde{X}_i$, 满足

$$\tilde{X}_i^{\mathrm{T}}\tilde{E}^{\mathrm{T}}=\tilde{E}\tilde{X}_i\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,r\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\tilde{A}_i\tilde{X}_j+\tilde{X}_j^{\mathrm{T}}\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}+\tilde{A}_j\tilde{X}_i+\tilde{X}_i^{\mathrm{T}}\tilde{A}_j^{\mathrm{T}})-\\ &\quad\sum_{k=1}^r\phi_k\tilde{E}\tilde{X}_k<0,\quad 1\leq i\leq j\leq r\end{aligned}\tag{6}$$

则系统 (4) 是容许的.

证明. 由文献 [9] 中定理 2.1 的证明, 可知系统 (4) 为容许的, 具体过程从略. □

注 1. 定理 1 只需得到 $\dot{h}_k$ 的下界 ϕ_k. 如果 $\dot{h}_{k_0}$, $k_0\in\{1,2,\cdots,r\}$ 恒为正值, 则 ϕ_{k_0} 可选取比较接近 0 的负数; 如果 $\dot{h}_{k_0}$, $k_0\in\{1,2,\cdots,r\}$ 可取到负值, 则可计算 $\min\dot{h}_{k_0}$. 如果可得到 $\min\dot{h}_{k_0}$ 的精确值, 则可令 $\dot{h}_{k_0}=\phi_{k_0}$; 否则, 需对 ϕ_k 进行估计. 本文将举例说明如何选取 ϕ_k, 并且指出, 对 ϕ_k 粗略的估计可能不会对结果产生很大的影响.

由条件 (5), 可将 $\tilde{X}_i$ 分块记为 $\left[\begin{array}{cc}X_i&0\\X_{21i}&X_{22i}\end{array}\right]$, X_i 满足 $X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_i\geq 0$. 将 $\tilde{E}$, $\tilde{A}_i$, $\tilde{X}_i$ 的具体表达式代入定理 1 中, 可得推论 1.

推论 1. 考虑系统 (4), 设 $\dot{h}_k\geq\phi_k,\phi_k\leq 0,k=1,2,\cdots,r$. 如果存在可逆矩阵 X_i,X_{21i} 和 X_{22i}, 满足

$$X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,r\tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} A_iX_{21j}+A_jX_{21i}+\\ X_{21j}^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}+X_{21i}^{\mathrm{T}}A_j^{\mathrm{T}}-\\ 2\sum\limits_{k=1}^{r}\phi_kEX_k \end{matrix} & \begin{matrix} A_iX_{22j}+X_j^{\mathrm{T}}-\\ X_{21j}^{\mathrm{T}} \end{matrix} \\ * & -X_{22j}-X_{22j}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}<0$$
$$1\le i\le j\le r \tag{8}$$

则系统 (4) 是容许的.

注 2. 与以往的容许性条件不同[1−3, 5], 式 (8) 中与系统矩阵相乘的 X_{21i} 只要求是可逆的, 并不需要满足约束 $X_{21i}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_{21i}\ge 0$. 换句话说, 推论 1 给出的条件并不要求子系统为容许的.

1.3　闭环系统的容许条件

进一步考虑广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i[A_i\boldsymbol{x}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t)] \tag{9}$$

的容许性条件. 引入模糊控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=F(t)\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_iN_i(\sum_{i=1}^{r}h_iX_i)^{-1}\boldsymbol{x}(t) \tag{10}$$

结合控制器 (10), 将闭环系统写为增广系统

$$E^*\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)=\sum_{i=1}^{r}h_iA_i^*\boldsymbol{x}^*(t) \tag{11}$$

其中

$$E^*=\begin{bmatrix} E&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ A_i^*=\begin{bmatrix}0&A_i&B_i\\ I&-I&0\\ F(t)&0&-I\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{x}^*(t)=[\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\ ]^{\mathrm{T}}$.

对于系统 (9) 和系统 (11), 考虑到

$$\det(sE-\sum_{i=1}^{r}h_i(A_i+B_iF(t))=$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} E&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{r}h_i\begin{bmatrix}0&A_i&B_i\\ I&-I&0\\ F(t)&0&-I\end{bmatrix}\right)=$$
$$\det(sE^*-\sum_{i=1}^{r}h_iA_i^*), \text{且}\,\mathrm{rank}E=\mathrm{rank}E^*$$

由容许性定义可知, 系统 (11) 的容许性等价于系统 (9) 的容许性. 因此, 通过研究系统 (11) 的容许性即可得到系统 (9) 的容许控制结果.

定理 2. 考虑系统 (11), 设 $\dot{h}_k\ge\phi_k, \phi_k\le 0, k=1,2,\cdots,r$. 如果存在可逆矩阵 X_i^*, 满足

$$X_i^{*\mathrm{T}}E^{*\mathrm{T}}=E^*X_i^*\ge 0,\ i=1,2,\cdots,r \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}(A_i^*X_j^*+X_j^{*\mathrm{T}}A_i^{*\mathrm{T}}+A_j^*X_i^*+X_i^{*\mathrm{T}}A_j^{*\mathrm{T}})-$$
$$\sum_{k=1}^{r}\phi_kE^*X_k^*<0,\quad 1\le i\le j\le r \tag{13}$$

则系统 (11) 是容许的.

证明. 将定理 1 应用于系统 (11), 即可得证. □

由矩阵 E^* 的表示及条件 (12), 可将 X_i^* 分块记为 $\begin{bmatrix}X_i&0&0\\X_{21i}&X_{22i}&X_{23i}\\X_{31i}&X_{32i}&X_{33i}\end{bmatrix}$. 由式 (13) 可知 $\sum_{i=1}^{r}h_iX_i^*$ 是可逆的, 从而, 式 (10) 中的 $(\sum_{i=1}^{r}h_iX_i)^{-1}$ 是有意义的. 将 E^*, A_i^*, X_i^* 的具体表达式代入定理 2 中, 可得推论 2.

推论 2. 考虑系统 (4), 设 $\dot{h}_k\ge\phi_k,\phi_k\le 0, k=1,2,\cdots,r$. 如果存在可逆矩阵 X_i, X_{22i}, X_{33i}, 矩阵 $X_{21i}, X_{23i}, X_{31i}, X_{32i}, N_i$, 满足

$$X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_i\ge 0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&\Delta_{13}\\ *&\Delta_{22}&\Delta_{23}\\ *&*&\Delta_{33}\end{bmatrix}<0,\quad 1\le i\le j\le r \tag{15}$$

其中 $\Delta_{11}=A_iX_{21j}+A_jX_{21i}+B_iX_{31j}+B_jX_{31i}+X_{21j}^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}+X_{21i}^{\mathrm{T}}A_j^{\mathrm{T}}+X_{31j}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+X_{31i}^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}-2\sum_{k=1}^{r}\phi_kEX_k$, $\Delta_{12}=A_iX_{22j}+A_jX_{22i}+B_iX_{32j}+B_jX_{32i}+X_j^{\mathrm{T}}-X_{21j}^{\mathrm{T}}+X_i^{\mathrm{T}}-X_{21i}^{\mathrm{T}}$, $\Delta_{13}=A_iX_{23j}+A_jX_{23i}+B_iX_{33j}+B_jX_{33i}+N_i^{\mathrm{T}}+N_j^{\mathrm{T}}-X_{31i}^{\mathrm{T}}-X_{31j}^{\mathrm{T}}$, $\Delta_{22}=-X_{22i}-X_{22i}^{\mathrm{T}}-X_{22j}-X_{22j}^{\mathrm{T}}$, $\Delta_{23}=-X_{23i}-X_{23j}-X_{32i}^{\mathrm{T}}-X_{32j}^{\mathrm{T}}$, $\Delta_{33}=-X_{33i}-X_{33j}-X_{33i}^{\mathrm{T}}-X_{33j}^{\mathrm{T}}$. 则系统 (11) 是容许的.

注 3. 如果采用并行分布补偿 (Parallel distributed compensations, PDC) 控制器和模糊 Lyapunov 函数 $V(t)=\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}}(t)E^{*\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{r}h_iN_i(\sum_{i=1}^{r}h_iX_i^*)^{-1}\boldsymbol{x}^*(t)$, 则为了能够唯一确定控制增益, X_i^* 的第一个矩阵块只能取为 X. 通过采用形如式 (10) 的模糊控制器, 使得 X_i^* 的第一个矩阵块可以取为 X_i. 而且由于增广系统方法的使用, 容许性条件中不含有控制输入矩阵 B_i 与控制增益矩阵 N_i 的乘积项, 减少了求解过程中控制输入矩阵对控制增益的影响.

2　T-S 模糊广义系统的 H_∞ 控制

2.1　基于非严格 LMI 的 H_∞ 控制条件

结合控制器 (10), 系统 (2) 的增广系统可写为

$$E^*\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i[A_i^*\boldsymbol{x}^*(t)+C_i^*\boldsymbol{w}(t)]$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_ih_iA_i^*\boldsymbol{x}^*(t) \tag{16}$$

其中 E^*, A_i^*, $\boldsymbol{x}^*(t)$ 的含义同系统 (11), $C_i^*=\begin{bmatrix} C_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $A_{1i}^*=[\begin{matrix} A_{1i} & 0 & B_{1i}\end{matrix}]$.

结合第 1.3 节的结论并考察 H_∞ 指标, 可知系统 (16) 的 H_∞ 控制问题等价于系统 (2) 的 H_∞ 控制问题, 所以通过研究系统 (16) 就可以得到系统 (2) 的 H_∞ 控制结果.

注 4. 在 H_∞ 控制研究中, 如果 $B_{1i}=0$, 则可能导致在达到性能指标的同时控制项 $\|F(t)\boldsymbol{x}(t)\|$ 过大. 本文在受控输出 $\boldsymbol{z}(t)$ 中考虑了控制输入, 即 $B_{1i}\neq 0$, 使得在达到性能指标的同时获得较小的控制增益.

定理 3. 考虑系统 (16), 对于给定的 $\gamma>0$, 如果存在可逆矩阵 X_i^*, 满足

$$X_i^{*\mathrm{T}}E^{*\mathrm{T}}=E^*X_i^*\geq 0,\ i=1,2,\cdots,r \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \sum\limits_{j=1}^{r}h_jC_j^* & (\sum\limits_{k=1}^{r}h_kX_k^*)^{\mathrm{T}}(\sum\limits_{i=1}^{r}h_iA_{1i}^*)^{\mathrm{T}}\\ * & -\gamma^2I & 0\\ * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

其中
$\Theta_{11}=(\sum\limits_{k=1}^{r}h_kX_k^*)^{\mathrm{T}}(\sum\limits_{j=1}^{r}h_jA_j^*)^{\mathrm{T}}-(\sum\limits_{k=1}^{r}\dot{h}_kE^*X_k^*)+(\sum\limits_{j=1}^{r}h_jA_j^*)(\sum\limits_{k=1}^{r}h_kX_k^*)$, 则系统 (16) 是容许的, 并且满足 H_∞ 性能指标.

证明. 篇幅有限, 证明从略. □

2.2 基于严格 LMI 的放宽的 H_∞ 控制条件

首先考虑条件 (17), 由 E^*,X_i^* 的结构特点, 可将式 (17) 进一步表示为

$$X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,r$$

将 $\sum_{k=1}^{r}h_kX_k^*,\sum_{j=1}^{r}h_jA_j^*,\sum_{j=1}^{r}h_jC_j^*,\sum_{i=1}^{r}h_iA_{1i}^*$ 的具体表达式代入式 (18), 并且考虑到 $\dot{h}_r=-\sum_{k=1}^{r-1}\dot{h}_k$ 以及满足 $\dot{h}_k\geq\phi_k,\phi_k\leq 0$, $E(X_k-X_r)\geq 0,k=1,2,\cdots,r-1$ 时, 可知系统 (16) 是容许的, 且满足 H_∞ 性能指标的充分条件为

$$X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_i\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{19}$$

$$E(X_k-X_r)\geq 0,\quad k=1,2,\cdots,r-1 \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\Psi(ij)<0 \tag{21}$$

其中

$$\Psi(ij)=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & C_j & \Gamma_{15}\\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & \Gamma_{25}\\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & \Gamma_{35}\\ * & * & * & -\gamma^2I & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix},$$

$\Gamma_{11}=A_jX_{21i}+B_jX_{31i}+X_{21i}^{\mathrm{T}}A_j^{\mathrm{T}}+X_{31i}^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}-\sum_{k=1}^{r-1}\phi_kEX_k,\Gamma_{12}=A_jX_{22i}+B_jX_{32i}+X_i^{\mathrm{T}}-X_{21i}^{\mathrm{T}}$, $\Gamma_{13}=A_jX_{23i}+B_jX_{33i}+N_j^{\mathrm{T}}-X_{31i}^{\mathrm{T}},\Gamma_{15}=X_i^{\mathrm{T}}A_{1j}^{\mathrm{T}}+X_{31i}^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}},\Gamma_{22}=-X_{22i}-X_{22i}^{\mathrm{T}},\Gamma_{23}=-X_{23i}-X_{32i}^{\mathrm{T}}$, $\Gamma_{25}=X_{32i}^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}},\Gamma_{33}=-X_{33i}-X_{33j}-X_{33i}^{\mathrm{T}}-X_{33j}^{\mathrm{T}}$, $\Gamma_{35}=X_{33i}^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}}$.

由文献 [10] 中定理 2.2 可知, 如果满足

$$\Psi(ii)<0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{22}$$

$$\frac{1}{r-1}\Psi(ii)+\frac{1}{2}[\Psi(ij)+\Psi(ji)]<0,\ 1\leq i<j\leq r \tag{23}$$

则式 (21) 成立.

以上给出了一种保守性较小的 H_∞ 控制条件 (19), (20), (22), (23), 其中式 (19) 和 (20) 需要求解半定 LMI, 这类非严格 LMI 为进一步的数值求解带来了不便. 在文献 [5, 11] 给出的严格 LMI 的启发下, 本文得到了更加宽松的严格 LMI 条件.

由 $\mathrm{rank}(E)=q\leq n$, 不失一般性, 设 $E=\begin{bmatrix}I_q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 定义 $\Phi=\begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix}$, $E_L=\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}$, $E_R=\begin{bmatrix}I_q\\ 0\end{bmatrix}$, 其中 Φ 满足 $E\Phi=0$.

推论 3. 考虑系统 (16), 设 $\dot{h}_k\geq\phi_k,\phi_k\leq 0$, $k=1,2,\cdots,r$. 对于给定的 $\gamma>0$, 如果存在对称矩阵 $\bar{X}_i$, 可逆矩阵 X_{22i},X_{33i}, 矩阵 Y_i, X_{21i}, X_{23i}, X_{31i}, X_{32i}, N_i, 满足

$$E_L\bar{X}_iE_R>0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{24}$$

$$E_L(\bar{X}_k-\bar{X}_r)E_R>0,\quad k=1,2,\cdots,r-1 \tag{25}$$

$$\Xi(ii)<0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{26}$$

$$\frac{1}{r-1}\Xi(ii)+\frac{1}{2}[\Xi(ij)+\Xi(ji)]<0,\quad 1\leq i<j\leq r \tag{27}$$

其中

$$\Xi(ij)=\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & C_j & \Omega_{15}\\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & 0 & \Omega_{25}\\ * & * & \Omega_{33} & 0 & \Omega_{35}\\ * & * & * & -\gamma^2I & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix},\ \Omega_{11}=$$

$A_jX_{21i}+B_jX_{31i}+X_{21i}^{\mathrm{T}}A_j^{\mathrm{T}}+X_{31i}^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}-\sum_{k=1}^{r-1}\phi_kE(\bar{X}_k-\bar{X}_r)E^{\mathrm{T}}, \Omega_{12}=A_jX_{22i}+B_jX_{32i}+(\bar{X}_iE^{\mathrm{T}}+\Phi Y_i)^{\mathrm{T}}-X_{21i}^{\mathrm{T}}, \Omega_{13}=A_jX_{23i}+B_jX_{33i}+N_j^{\mathrm{T}}-X_{31i}^{\mathrm{T}}, \Omega_{15}=(\bar{X}_iE^{\mathrm{T}}+\Phi Y_i)^{\mathrm{T}}A_{1j}^{\mathrm{T}}+X_{31i}^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}}, \Omega_{22}=-X_{22i}-X_{22i}^{\mathrm{T}}, \Omega_{23}=-X_{23i}-X_{32i}^{\mathrm{T}}, \Omega_{25}=X_{32i}^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}}, \Omega_{33}=-X_{33i}-X_{33j}-X_{33i}^{\mathrm{T}}-X_{33j}^{\mathrm{T}}, \Omega_{35}=X_{33i}^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}}$, 则系统 (16) 是容许的, 并且满足 H_∞ 性能指标.

证明. 篇幅有限, 证明从略. □

注 5. 本文考虑 X_i 的结构为 $\bar{X}_iE^{\mathrm{T}}+\Phi Y_i$, 其中 Φ 满足 $E\Phi=0$. 文献 [5, 11] 中要求 $\bar{X}_i>0$, 这种 $\bar{X}_i$ 自然满足 $X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}=EX_i\geq 0$, 从而去掉了半定 LMI 约束. 但是对于 $\bar{X}_i$ 的要求较为苛刻, 本文只要求 $\bar{X}_i$ 满足 $E_L\bar{X}_iE_R>0$, 即只要求 $\bar{X}_i$ 的第一个 $q\times q$ 阶子块是正定的, 放宽了对于 $\bar{X}_i$ 的要求.

通过推论 3 可得系统 (11) 的另外一组容许性条件, 此条件以严格 LMI 形式给出.

推论 4. 考虑系统 (11), 设 $\dot{h}_k\geq\phi_k, \phi_k\leq 0$, $k=1,2,\cdots,r$. 如果存在对称矩阵 $\bar{X}_i$, 可逆矩阵 X_{22i}, X_{33i}, 矩阵 $Y_i, X_{21i}, X_{23i}, X_{31i}, X_{32i}, N_i$, 满足

$$E_L\bar{X}_iE_R>0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{28}$$

$$E_L(\bar{X}_k-\bar{X}_r)E_R>0,\quad k=1,2,\cdots,r-1 \tag{29}$$

$$\Pi(ii)<0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{30}$$

$$\frac{1}{r-1}\Pi(ii)+\frac{1}{2}[\Pi(ij)+\Pi(ji)]<0,\quad 1\leq i<j\leq r \tag{31}$$

其中 $\Pi(ij)=\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13}\\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23}\\ * & * & \Omega_{33}\end{bmatrix}$, 则系统 (11) 是容许的.

3 数值算例

例 1. 考虑由两条模糊规则描述的非线性广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{2}h_i[A_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}(t)]$$

其中隶属度函数为 $h_1=1/2(1+\sin x_1(t)), h_2=1/2(1-\sin x_1(t))$, 并且 $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 10 & 2\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}2 & a_{22}\\ 3 & 5\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1=[\,0\quad b_{12}\,]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}_2=[\,0\quad 1\,]^{\mathrm{T}}$. 取 $\phi_1=-0.9$, 系统矩阵中 a_{22}, b_{12} 取值范围分别为 $[-5,10], [-10,10]$ 的整数点. 图中 "*" 表示定理的可解区域. 从图 1～6 的比较中可以看出, 本文推论 4 的条件具有较小的保守性.

以下将举例说明不能够精确获得 $\dot{h}_k$ 的下界 ϕ_k 时, ϕ_k 估计值的选取对于问题的求解具有 "鲁棒性".

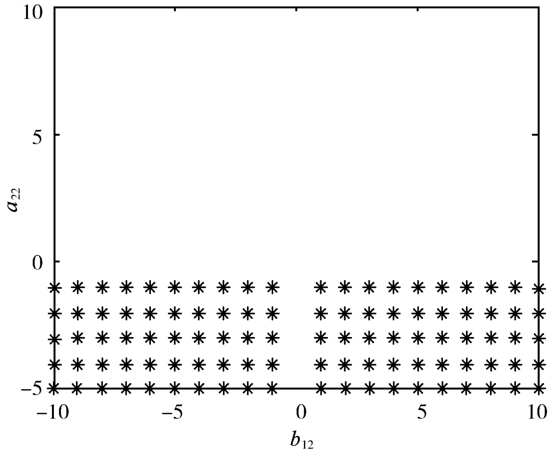

图 1 文献 [1] 中定理 3 的可解区域

Fig. 1 The feasible area of Theorem 3 in [1]

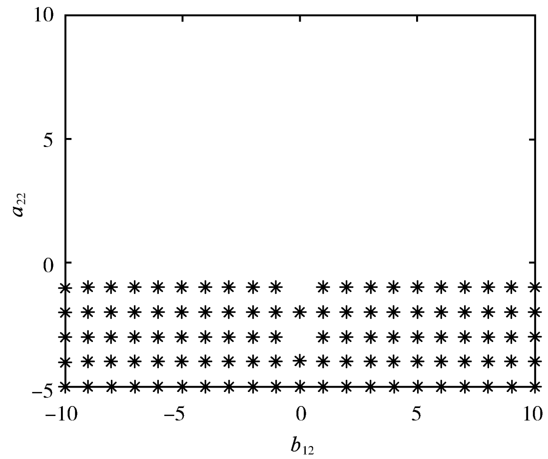

图 2 文献 [1] 中定理 6 的可解区域

Fig. 2 The feasible area of Theorem 6 in [1]

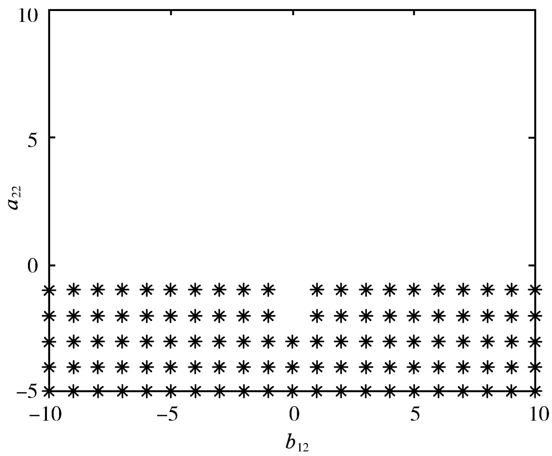

图 3 文献 [2] 中定理 2.2 的可解区域

Fig. 3 The feasible area of Theorem 2.2 in [2]

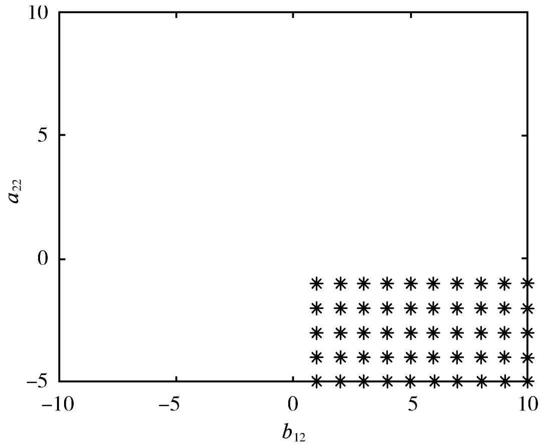

图 4 文献 [3] 中定理 3 的可解区域

Fig. 4 The feasible area of Theorem 3 in [3]

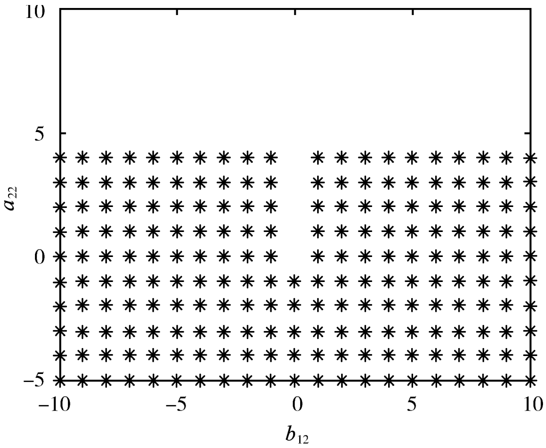

图 5 文献 [9] 中定理 4.1 的可解区域

Fig. 5 The feasible area of Theorem 4.1 in [9]

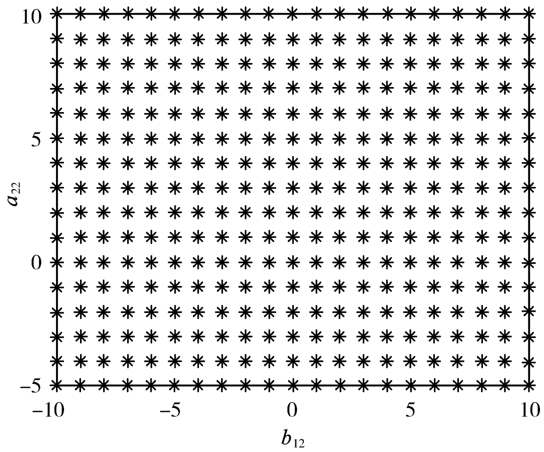

图 6 推论 4 的可解区域

Fig. 6 The feasible area of Corollary 4

例 2. 考虑文献 [5] 中例 5.1 研究的非线性系统

$$(1+a\cos\theta(t))\ddot{\theta}(t)=-b\dot{\theta}^3(t)+c\theta(t)+du(t) \quad (32)$$

其中 $\dot{\theta}(t)$ 满足 $|\dot{\theta}(t)|<\phi$.

引入新变量 $\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),x_3(t)]^{\rm T}=[\theta(t),\dot{\theta}(t),\ddot{\theta}(t)]^{\rm T}$, 系统 (32) 可由如下 T-S 模糊广义系统模型描述

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{3}h_i[A_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}(t)] \quad (33)$$

其中

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\c&-b(\phi^2+2)&a-1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\c&0&-a-1-a\phi^2\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\c&0&-a-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}0&0&d\end{bmatrix}^{\rm T}.$$

隶属度函数为 $h_1=x_2^2(t)/(\phi^2+2)$, $h_2=[1+\cos x_1(t)]/(\phi^2+2)$, $h_3=[\phi^2-x_2^2(t)+1-\cos x_1(t)]/(\phi^2+2)$. 计算可得

$$\phi_1\le\min_t\dot{h}_1=\min_{t,\dot{x}_2(t)\ge0}\frac{-2\phi\dot{x}_2(t)}{\phi^2+2}=\min_{t,0\le\dot{x}_2(t)\le w}\frac{-2\phi w}{\phi^2+2}$$

$$\phi_2\le\min_t\dot{h}_2=\min_{t,|\dot{x}_1(t)|<\phi}\frac{-\dot{x}_1(t)}{\phi^2+2}=\min_{t,|\dot{x}_1(t)|<\phi}\frac{-\phi}{\phi^2+2}$$

计算 ϕ_1 时, 由于未知 $\dot{x}_2(t)$ 的范围, 所以只能对其界 w 进行估计. 选取 $b=c=d=1,\phi=2$, 则 $\phi_1=-2w/3,\phi_2=-1/3$.

下面讨论 w (w 对应着隶属度函数的下界) 的选取对于可解区域的影响. 所讨论 w 的范围分别为 $0:1:10$, $0:10:100$, $0:100:1000$, $0:10^4:10^5$. 通过运算可知, 当 a 在 $[-10, 10]$ 之间的整数点取值时, 对 w 在较大范围内进行估计, 仍然可以判定系统是容许的.

例 2 中首先对非线性系统 (32) 建立了模糊模型 (33), 然后基于模型 (33) 得到了容许控制器, 现在将得到的控制器应用于原系统 (32), 看其是否可镇定原系统. 选取参数 $a=2,b=c=d=1,\phi=2,w=10$, 并限定 $X_1=X_2=X_3$. 运用推论 4 可得

$$\boldsymbol{N}_1=[\ 292.5915\quad 167.6996\quad 2.5068\ ]$$
$$\boldsymbol{N}_2=[\ 156.7437\quad 65.1441\quad -0.3510\ ]$$
$$\boldsymbol{N}_3=[\ 275.7329\quad 112.6689\quad 3.3799\ ]$$

将控制器 $u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i \boldsymbol{N}_i (\sum_{i=1}^{r} h_i X_i)^{-1} \boldsymbol{x}(t)$ 应用于系统 (32), 得到状态响应如图 7 所示. 可见, 所设计的模糊控制器对非线性系统有较好的控制效果, 达到了借助于 T-S 模糊广义系统模型研究非线性系统的目的.

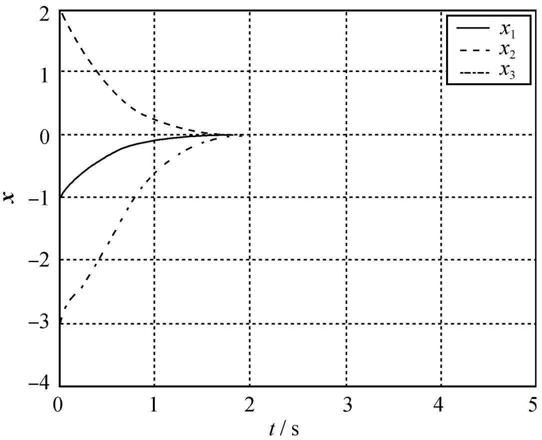

图 7　系统的状态响应

Fig. 7　The state rensposes of the system

例 3. 考虑如下非线性广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i [A_i \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_i u(t) + \boldsymbol{C}_i w(t)]$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i [\boldsymbol{A}_{1i} \boldsymbol{x}(t) + B_{1i} \boldsymbol{u}(t)]$$

其中隶属度函数分别为 $h_1 = 1/2(1 + \sin x_1(t))$, $h_2 = 1 - h_1 = 1/2(1 - \sin x_1(t))$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{A}_{12} = [\ 1 \quad 0.1\ ]$, $B_{11} = B_{12} = 1$, $\boldsymbol{C}_1 = [\ 0.1 \quad 0\ ]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{C}_2 = [\ 0 \quad 0.1\ ]^{\mathrm{T}}$, 并且取 $\phi_1 = -0.9$.

以下分别采用公共 Lyapunov 函数方法, 文献 [2] 中定理 3.2 和本文推论 3 这三种方法考虑 T-S 模糊广义系统的 H_∞ 控制问题, 得到的 H_∞ 性能指标的最小值如表 1 所示.

表 1　性能指标 γ 比较

Table 1　Comparison of performance γ

所用方法	性能指标 γ
公共 Lyapunov 函数方法	3.0013×10^{-2}
文献 [2] 中定理 3.2	1.3295×10^{-2}
本文推论 3	3.6658×10^{-6}

比较上述三组结果可以看出, 本文推论 3 给出的方法能够更加优化系统的 H_∞ 性能指标.

4　结论

本文研究了 T-S 模糊广义系统的容许条件和 H_∞ 控制器设计问题. 给出了保证系统正则、无脉冲、稳定且具有一定 H_∞ 性能指标的条件. 所得条件由于模糊 Lyapunov 函数和增广系统的结合使用得到了进一步放宽, 并在文献 [5, 11] 的基础上对严格 LMI 进行改进, 得到新的严格 LMI 形式的 H_∞ 控制条件. 本文所得结论可推广到 E 不变其他矩阵带有范数有界不确定性的情况.

References

1 Taniguchi T, Tanaka K, Yamafuji K, Wang H O. Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs. In: Proceedings of the American Control Conference. San Diego, USA: IEEE, 1999. 1827−1831

2 Yoneyama J, Ichikawa A. H_∞ control for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems. In: Proceedings of IEEE Conference Systems, Man, and Cybernetics. Tokyo, Japan: IEEE, 1999. 28−33

3 Wang Y, Sun Z Q, Sun F C. Robust fuzzy control of a class of nonlinear descriptor systems with time-varying delay. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2004, **2**(1): 76−82

4 Huang C P. Stability analysis of discrete singular fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, **151**(1): 155−165

5 Lin C, Wang Q G, Lee T H. Stability and stabilization of a class of fuzzy time-delay descriptor systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(4): 542−551

6 Wang Y, Zhang Q L, Liu W Q. Stability analysis and design for T-S fuzzy descriptor systems. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, Florida, USA: IEEE, 2001. 3962−3967

7 Wang Y, Zhang Q L, Liu X D. Robustness design of uncertain discrete-time fuzzy descriptor systems with guaranteed admissibility. In: Proceedings of the American Control Conference. Anchorage, Alaska, USA: IEEE, 2002. 1699−1704

8 Tanaka K, Ohtake H, Wang H O. A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(3): 333−341

9 Yuan Y H, Zhang Q L, Zhang D Q, Chen B. Admissible conditions of fuzzy descriptor systems based on fuzzy Lyapunov function approach. *International Journal of Information Systems Sciences*, 2008, **4**(2): 219−232

10 Tuan H D, Apkarian P, Narikiyo T, Yamamoto Y. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2001, **9**(2): 324−332

11 Xu S Y, Dooren P V, Stefan R, Lam J. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(7): 1122−1128

袁宇浩 东北大学系统科学研究所博士研究生. 主要研究方向为模糊控制. 本文通信作者. E-mail: yyhmds@sohu.com
(**YUAN Yu-Hao** Ph. D. candidate in the Institute of Systems Science at Northeastern University. Her main research interest is fuzzy control. Corresponding author of this paper.)

张庆灵 东北大学教授. 主要研究方向为分散控制, 鲁棒控制, 容错控制和广义系统理论.
E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn
(**ZHANG Qing-Ling** Professor at Northeastern University. His research interest covers decentralized control, robust control, fault-tolerant control, and theory of descriptor systems.)

陈 兵 青岛大学教授. 主要研究方向为非线性系统的鲁棒控制, 模糊控制.
E-mail: dongshuoch@sina.com
(**CHEN Bing** Professor at Qingdao University. His research interest covers robust control of nonlinear systems and fuzzy control.)

刘 超 东北大学系统科学研究所博士研究生. 主要研究方向为复杂非线性系统分析与控制.
E-mail: singularsystem@yahoo.com.cn
(**LIU Chao** Ph. D. candidate in the Institute of Systems Science at Northeastern University. His research interest covers analysis and control of complex nonlinear system.)