一类不确定切换奇异系统的动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制

付主木 [1,2] 费树岷 [2]

摘 要 研究一类由任意有限多个不确定子系统组成的切换奇异系统的动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制问题. 利用共同 Lyapunov 函数方法和凸组合技术, 给出由矩阵不等式表示的控制器存在的充分条件, 并设计了相应的子控制器和切换策略. 采用消元法, 将该矩阵不等式转化为一组线性矩阵不等式 (LMIs). 最后, 数值实例验证了所提方法的有效性.

关键词 不确定切换系统, 奇异系统, 鲁棒 H_∞ 控制, 动态输出反馈, 线性矩阵不等式

中图分类号 TP273

Robust H_∞ Dynamic Output Feedback Stabilization for a Class of Uncertain Switched Singular Systems

FU Zhu-Mu[1,2] FEI Shu-Min[2]

Abstract Robust H_∞ dynamic output feedback control problem for a class of uncertain switched singular systems is investigated. Based on common Lyapunov function approaches and convex combinations techniques, a sufficient condition for the existence of sub-controllers that is expressed by matrix inequalities is presented and both sub-controllers and switching strategy are designed. Then, using eliminated element method, the matrix inequalities are translated into linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example is given to show the effectiveness of the proposed method.

Key words Uncertain switched systems, singular systems, robust H_∞ control, dynamic output feedback, LMIs

奇异系统的研究始于 20 世纪 70 年代, 是一类更一般化、有着较强应用背景的动力系统, 它广泛存在于许多实际系统模型中, 如电力电子系统、能源系统、航天工程、化学反应过程、经济系统、社会系统和生物系统等[1]. 随着 H_∞ 控制理论的日趋成熟和完善[2], 奇异系统的 H_∞ 控制理论也相应地得到了发展, 并取得了许多重要成果[3−5].

与奇异系统及其 H_∞ 控制理论的蓬勃发展情况相类似的是切换系统的研究. 切换系统是一类模型简单而研究较多的混杂动态系统, 一般由一族子系统和描述它们之间联系的切换策略组成. 切换系统本质上是一种复杂的时变非线性系统, 利用切换可以获得较好的系统性能. 例如, 两个不稳定的子系统可以通过适当的切换使系统渐近稳定[6]. 由于切换系统在改善系统性能方面的作用, 切换系统在稳定性分析与综合、可控可达性条件以及 H_∞ 控制等方面取得了一系列研究成果[6−16], 其中对切换系统 H_∞ 控制的研究刚刚起步. 文献 [8] 研究了一类不确定切换系统具有 H_∞ 性能指标的鲁棒镇定问题, 文献 [9] 研究了一类切换线性系统的 H_∞ 状态反馈控制, 北京大学的王龙及其科研小组研究了一类不确定线性切换系统 H_∞ 状态反馈和静态输出反馈问题[10−12].

但目前研究的切换系统, 其子系统都是正常的线性或非线性系统, 而关于切换奇异系统的研究尚不多见. 文献 [13] 研究了切换线性奇异系统能达的一个必要条件; 文献 [14] 给出了一类由任意有限个子系统组成的切换线性奇异系统容许控制器的设计方法; 文献 [15−16] 利用共同 Lyapunov 函数方法, 分别研究了一类离散和连续切换线性奇异系统在任意切换律下的稳定性. 在此, 作者研究一类不确定切换奇异系统的动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制问题, 给出了控制器的存在条件和切换策略的设计方法, 并给出一个求解动态输出反馈控制器增益矩阵的算法.

1 问题描述

考虑如下不确定切换系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}} = (A_{\sigma(t)} + \Delta A_{\sigma(t)})\boldsymbol{x} + B_{1\sigma(t)}\boldsymbol{\omega} + \\ \qquad (B_{2\sigma(t)} + \Delta B_{\sigma(t)})\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = C_{1\sigma(t)}\boldsymbol{x} + D_{\sigma(t)}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C_{2\sigma(t)}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为系统的状态, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为控制输入, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{n_\omega}$ 且 $\boldsymbol{\omega} \in L_2[0,\infty)$ 为外部扰动, $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^{n_z}$ 为受控输出, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{n_y}$ 是量测输出; $\sigma : [0,\infty) \rightarrow \bar{\mathbf{N}} = \{1, 2, \cdots, N\}$ 为分段常值切换信号, $\sigma(t) = i$ 表示第 i 个子系统被激活. $E \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 且 $\mathrm{rank}\, E = r_p < n_x$; $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_i, \forall\, i \in \bar{\mathbf{N}}$ 为系统相应维数定常矩阵; $\Delta A_i(t), \Delta B_i(t)$ 表示时变不确定矩阵, 且具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & \Delta B_i(t) \end{bmatrix} = G_i \Sigma_i(t) \begin{bmatrix} F_{1i} & F_{2i} \end{bmatrix}, \forall\, i \in \bar{\mathbf{N}} \tag{2}$$

其中矩阵 $\Sigma_i(t) \in \mathbf{R}^{j \times k}$ 的元素 Lebegue 可测且满足

$$\Sigma_i^{\mathrm{T}}(t)\Sigma_i(t) \le I_k \tag{3}$$

对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 都成立, 这里 I_k 是 k 阶单位阵, G_i, F_{1i} 和 F_{2i} 是已知适当维数矩阵.

定义 1. 如果 $\sigma(t_k^-) \neq \sigma(t_k^+)$ 且 $\sigma(t) = \sigma(t_k^+) = i_k, t \in [t_k, t_{k+1})$, 则称序列 $\{(t_k, i_k)\}, k \in \{0, 1, \cdots\}$ 是由切换信号 $\sigma(t)$ 生成的切换序列. 称时间区间 $[t_k, t_{k+1})$ 为第 i_k 个子系统的驻留时间.

定义 2. 考虑系统 (1) 的自由系统 (Unforce system) 如下

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A_i \boldsymbol{x} \tag{4}$$

1) 对每个 $i \in \bar{\mathbf{N}}$, 存在 $s \in \mathbf{C}$, 使得 $\det(sE - A_i) \neq 0$, 则称切换奇异系统 (4) 是正则的;

2) 如果系统 (4) 是正则的, 对所有 $s \in \mathbf{C}$, 均满足 $deg(\det(sE - A_i)) = \mathrm{rank}\, E, i \in \bar{\mathbf{N}}, deg(P(s))$ 表示多项式 $P(s)$ 的次数, 则称切换奇异系统 (4) 是无脉冲的.

注 1. 本文所讨论的切换奇异系统均是正则和无脉冲的.

本文的控制目标为: 对于给定的正实数 γ, 设计系统 (1) 中各子系统动态输出反馈 H_∞ 控制器 $K_i(s)$, 其状态空间实

收稿日期 2006-12-14 收修改稿日期 2007-05-21
Received December 14, 2006; in revised form May 21, 2007
国家自然科学基金 (60574006), 江苏省自然科学基金 (BK2003405), 河南省教育厅自然科学研究计划项目 (2008B510003) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574006), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2003405), National Natural Science Foundation of Education Department in Henan Province (2008B510003)
1. 河南科技大学电子信息工程学院 洛阳 471003 2. 东南大学自动化学院 南京 210096
1. Electronic Information Engineering College, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003 2. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00482

现有如下形式

$$\begin{cases} E_K\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A_{K_i}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + B_{K_i}\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{u}(t) = C_{K_i}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + D_{K_i}\boldsymbol{y}(t),\ i \in \bar{\mathbf{N}} \end{cases} \tag{5}$$

以及切换策略 $\sigma: [0,\infty) \to \bar{\mathbf{N}}$, 使得闭环系统

$$\begin{cases} E_c\dot{\boldsymbol{\xi}} = (A_{c\sigma(t)} + \Delta A_{c\sigma(t)})\boldsymbol{\xi} + B_{c\sigma(t)}\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{z} = C_{c\sigma(t)}\boldsymbol{\xi} \end{cases} \tag{6}$$

满足如下鲁棒 H_∞ 性能:

1) 当外部干扰 $\boldsymbol{\omega} = 0$ 时, 闭环系统是渐近稳定的;

2) 当初态 $\boldsymbol{\xi}(0) = 0$ 时, 对于 $\forall T > 0$ 成立 $\int_0^T \boldsymbol{z}^{\rm T}(t)\boldsymbol{z}(t){\rm d}t < \gamma^2\int_0^T \boldsymbol{\omega}^{\rm T}(t)\boldsymbol{\omega}(t){\rm d}t,\ \forall\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0,T]$.

其中, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^{n_{\tilde{x}}}$ 是控制器状态, ${\rm rank}(E_K) = r_k < n_{\tilde{x}}, A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}, D_{K_i}$ 是待确定的控制器参数矩阵, 且

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= [\boldsymbol{x}^{\rm T}\ \ \tilde{\boldsymbol{x}}^{\rm T}]^{\rm T}, A_{ci} = A_i^{\rm o} + B_{2i}^{\rm o}K_iC_{2i}^{\rm o} \\
C_{ci} &= C_{1i}^{\rm o} + D_i^{\rm o}K_iC_{2i}^{\rm o}, C_{1i}^{\rm o} = [C_{1i}\ \ 0] \\
\Delta A_{ci} &= \Delta A_i^{\rm o} + \Delta B_i^{\rm o}K_iC_{2i}^{\rm o}, D_i^{\rm o} = [D_i\ \ 0] \\
B_{ci} &= B_{1i}^{\rm o} = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}, E_c = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_K \end{bmatrix} \\
A_i^{\rm o} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{2i}^{\rm o} = \begin{bmatrix} B_{2i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
\Delta A_i^{\rm o} &= \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta B_i^{\rm o} = \begin{bmatrix} \Delta B_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
C_{2i}^{\rm o} &= \begin{bmatrix} C_{2i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, K_i = \begin{bmatrix} D_{K_i} & C_{K_i} \\ B_{K_i} & A_{K_i} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2 主要结果

显然, 为完成设计任务, 需要分析和设计控制器 (5) 及切换策略 $\sigma(t)$. 本节首先介绍一个引理, 其证明参见文献 [17].

引理 1[17]**.** 对任意同维向量或矩阵 X 和 Y, 有

$$X^{\rm T}Y + Y^{\rm T}X \le X^{\rm T}PX + Y^{\rm T}P^{-1}Y,\ \ \forall P > 0$$

成立.

对系统 (1) 所描述的不确定切换奇异系统的动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制问题, 有如下结果:

定理 1. 若存在非奇异阵 X_c, 正实数 γ 和 ε, 实数 $\alpha_i \ge 0$, $\forall i \in \bar{\mathbf{N}}\ (\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1)$, 满足下列矩阵不等式

$$E_c^{\rm T}X_c = X_c^{\rm T}E_c \ge 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} A_c^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_c & * & * & * & * \\ \gamma^{-1}B_c^{\rm T}X_c & -I & * & * & * \\ C_c & 0 & -I & * & * \\ \varepsilon^{-1}G_c^{\rm T}X_c & 0 & 0 & -I & * \\ \varepsilon F_c & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

其中,

$$\begin{aligned}
A_c &= A^{\rm o} + B_2^{\rm o}KC_2^{\rm o},\quad C_c = C_1^{\rm o} + D^{\rm o}KC_2^{\rm o} \\
B_c &= B_1^{\rm o} = \left[\ \sqrt{\alpha_1}B_{11}^{\rm o}, \sqrt{\alpha_2}B_{12}^{\rm o}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}B_{1N}^{\rm o}\ \right] \\
B_2^{\rm o} &= \left[\ \alpha_1B_{21}^{\rm o}, \alpha_2B_{22}^{\rm o}, \cdots, \alpha_NB_{2N}^{\rm o}\ \right] \\
G_c &= G^{\rm o} = \left[\ \sqrt{\alpha_1}G_1^{\rm o}, \sqrt{\alpha_2}G_2^{\rm o}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}G_N^{\rm o}\ \right] \\
F_c &= F_1^{\rm o} + F_2^{\rm o}KC_2^{\rm o},\ G_{ci} = G_i^{\rm o} = \left[\ G_i^{\rm T}\ \ \ 0\ \right]^{\rm T} \\
F_{ci} &= F_{1i}^{\rm o} + F_{2i}^{\rm o}K_iC_{2i}^{\rm o},\ F_{1i}^{\rm o} = [F_{1i}\ \ 0],\ F_{2i}^{\rm o} = [F_{2i}\ \ 0] \\
C_1^{\rm o} &= \left[\ \sqrt{\alpha_1}(C_{11}^{\rm o})^{\rm T}, \sqrt{\alpha_2}(C_{12}^{\rm o})^{\rm T}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}(C_{1N}^{\rm o})^{\rm T}\ \ \right]^{\rm T} \\
C_2^{\rm o} &= \left[\ (C_{21}^{\rm o})^{\rm T}, (C_{22}^{\rm o})^{\rm T}, \cdots, (C_{2N}^{\rm o})^{\rm T}\ \ \right]^{\rm T} \\
D^{\rm o} &= {\rm diag}\left\{\ \sqrt{\alpha_1}D_1^{\rm o}, \sqrt{\alpha_2}D_2^{\rm o}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}D_N^{\rm o}\ \right\} \\
F_1^{\rm o} &= \left[\ \sqrt{\alpha_1}(F_{11}^{\rm o})^{\rm T}, \sqrt{\alpha_2}(F_{12}^{\rm o})^{\rm T}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}(F_{1N}^{\rm o})^{\rm T}\ \ \right]^{\rm T} \\
F_2^{\rm o} &= {\rm diag}\left\{\ \sqrt{\alpha_1}F_{21}^{\rm o}, \sqrt{\alpha_2}F_{22}^{\rm o}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}F_{2N}^{\rm o}\ \right\} \\
A^{\rm o} &= \sum_{i=1}^N \alpha_iA_i^{\rm o}\ \ , K = {\rm diag}\left\{\ K_1, K_2, \cdots, K_N\ \right\}
\end{aligned}$$

“ * ” 表示对称位置上的转置矩阵 (下文同). 则存在子控制器和切换策略使系统 (6) 满足鲁棒 H_∞ 性能 1) 和 2). 相应的子控制器和切换策略可选取为

$$\boldsymbol{u} = K_i(s)\boldsymbol{y} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\sigma(t) = \arg\min_{i\in\bar{\mathbf{N}}}\{&\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(A_{ci}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_{ci} + C_{ci}^{\rm T}C_{ci} + \varepsilon^2F_{ci}^{\rm T}F_{ci} + \\ &\gamma^{-2}X_c^{\rm T}B_{ci}B_{ci}^{\rm T}X_c + \varepsilon^{-2}X_c^{\rm T}G_{ci}G_{ci}^{\rm T}X_c)\boldsymbol{\xi}\}\end{aligned} \tag{10}$$

注 2. 1) 定理 1 中的条件表明, 通过控制器 (5) 和切换策略 $\sigma(t)$, 可使闭环系统满足鲁棒 H_∞ 性能指标, 而并不要求每个子系统在整个状态空间上都满足鲁棒 H_∞ 性能指标, 甚至不要求各子系统渐近稳定;

2) 系统 (1) 从控制输入到受控输出的增益矩阵并不受是否列满秩的约束;

3) 所获条件只是充分条件, 而非必要的.

证明. 1) 假设外部干扰 $\boldsymbol{\omega}(t) = 0, X_c, \gamma, \varepsilon$ 和 α_i 满足定理 1 条件. 由 Schur 补引理, 式 (8) 可化为

$$\begin{aligned}&A_c^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_c + \gamma^{-2}X_c^{\rm T}B_cB_c^{\rm T}X_c + \\ &\varepsilon^{-2}X_c^{\rm T}G_cG_c^{\rm T}X_c + \varepsilon^2F_c^{\rm T}F_c + C_c^{\rm T}C_c < 0\end{aligned}$$

由各矩阵的定义, 对 $\forall\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{n_x+n_{\tilde{x}}}\backslash\{0\}$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^N \alpha_i(\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(A_{ci}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_{ci} + \gamma^{-2}X_c^{\rm T}B_{ci}B_{ci}^{\rm T}X_c + \\ &\varepsilon^{-2}X_c^{\rm T}G_{ci}G_{ci}^{\rm T}X_c + \varepsilon^2F_{ci}^{\rm T}F_{ci} + C_{ci}^{\rm T}C_{ci})\boldsymbol{\xi}) < 0\end{aligned}$$

由切换策略 (10), 对 $\forall t \ge 0$, 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(A_{c\sigma(t)}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_{c\sigma(t)} + \gamma^{-2}X_c^{\rm T}B_{c\sigma(t)}B_{c\sigma(t)}^{\rm T}X_c + \\ &\varepsilon^{-2}X_c^{\rm T}G_{c\sigma(t)}G_{c\sigma(t)}^{\rm T}X_c + \varepsilon^2F_{c\sigma(t)}^{\rm T}F_{c\sigma(t)} + \\ &C_{c\sigma(t)}^{\rm T}C_{c\sigma(t)})\boldsymbol{\xi} < 0\end{aligned} \tag{11}$$

令 $\{(t_k, i_k)|i_k \in \bar{\mathbf{N}};\ k = 0, 1, \cdots;\ 0 = t_0 \le t_1 \le \cdots\}$ 是由切换策略 (10) 在时间间隔 $[0,\infty)$ 上生成的切换序列. 在该切换序列作用下, 取 Lyapunov 函数为 $V(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^{\rm T}E_c^{\rm T}X_c\boldsymbol{\xi}$, 沿着切换系统 (6) 轨迹的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{\xi}) = &\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(A_{ci_k}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_{ci_k})\boldsymbol{\xi} + (B_{ci_k}^{\rm T}X_c\boldsymbol{\xi})^{\rm T}\boldsymbol{\omega} + \\ &\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(\Delta A_{ci_k}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}\Delta A_{ci_k})\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}^{\rm T}(B_{ci_k}^{\rm T}X_c\boldsymbol{\xi}) \\ &t \in [t_k, t_{k+1}),\ k = 0, 1, \cdots\end{aligned} \tag{12}$$

由式 (2) 和各矩阵的定义, 可得到 $\Delta A_{ci_k} = G_{ci_k}\Sigma_{i_k}F_{ci_k}$, 代

入式 (11) 并由式 (3) 和引理 1, 有

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol\xi) \le\ & \boldsymbol\xi^{\rm T}(A_{c\sigma(t)}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_{c\sigma(t)} + \\ & \gamma^{-2}X_c^{\rm T}B_{c\sigma(t)}B_{c\sigma(t)}^{\rm T}X_c + \varepsilon^2 F_{c\sigma(t)}^{\rm T}F_{c\sigma(t)} + \\ & \varepsilon^{-2}X_c^{\rm T}G_{c\sigma(t)}G_{c\sigma(t)}^{\rm T}X_c)\boldsymbol\xi + \gamma^2\boldsymbol\omega^{\rm T}\boldsymbol\omega \\ & t\in[t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,\cdots\end{aligned} \tag{13}$$

则当 $\boldsymbol\omega = 0$ 时, 在切换策略 (10) 的作用下, 根据式 (7) 和 (11), $V(\boldsymbol\xi)\ge 0, \dot V(\boldsymbol\xi) < 0$ 对所有 $t \ge 0$ 都成立. 从而, 当外部扰动输入 $\boldsymbol\omega = 0$ 时, 闭环系统 (6) 在切换策略 (10) 的作用下是渐近稳定的.

2) 假设 $\boldsymbol\xi(0) = 0$, 对任意给定的 $T > 0$, 引入性能指标

$$J_T = \int_0^T (\boldsymbol z^{\rm T}(t)\boldsymbol z(t) - \gamma^2\boldsymbol\omega^{\rm T}(t)\boldsymbol\omega(t)){\rm d}t$$

令 $\{(t_k,i_k)|i_k\in\bar{\mathbf N}, k=0,1,\cdots,s;\ 0=t_0\le t_1\le\cdots\le t_s=T\}$ 是由切换策略 (10) 在区间 $[0,T]$ 上生成的切换序列. 在该切换序列作用下, 仍取 Lyapunov 函数为 $V(\boldsymbol\xi) = \boldsymbol\xi^{\rm T}E_c^{\rm T}X_c\boldsymbol\xi$, 注意到 $\boldsymbol\xi(t_0)=\boldsymbol\xi(0)=0$, 对 $\forall\boldsymbol\omega\in L_2[0,T]$, 利用式 (13) 和系统 (6), 有

$$\begin{aligned}J_T =\ & \sum_{k=0}^{s-1}(\int_{t_k}^{t_{k+1}}(\boldsymbol z^{\rm T}\boldsymbol z - \gamma^2\boldsymbol\omega^{\rm T}\boldsymbol\omega + \dot V(\boldsymbol\xi)){\rm d}t - \\ & (V(\boldsymbol\xi(t_{k+1})) - V(\boldsymbol\xi(t_k)))) \le \\ & \sum_{k=0}^{s-1}(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol\xi^{\rm T}(A_{ci_k}^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A_{ci_k} + \\ & \gamma^{-2}X_c^{\rm T}B_{ci_k}B_{ci_k}^{\rm T}X_c + C_{ci_k}^{\rm T}C_{ci_k} + \\ & \varepsilon^{-2}X_c^{\rm T}G_{ci_k}G_{ci_k}^{\rm T}X_c + \varepsilon^2F_{ci_k}^{\rm T}F_{ci_k})\boldsymbol\xi{\rm d}t)\end{aligned}$$

由矩阵不等式 (11) 可从上式得到 $J_T < 0$. 故对于 $\forall T > 0$, $\forall\boldsymbol\omega\in L_2[0,T]$, 有 $\int_0^T\boldsymbol z^{\rm T}\boldsymbol z{\rm d}t < \gamma^2\int_0^T\boldsymbol\omega^{\rm T}\boldsymbol\omega{\rm d}t$. □

在矩阵不等式 (8) 中, 关于矩阵变量 X_c 和控制器参数矩阵 $A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}, D_{K_i}$ 是非线性的, 不能直接求解. 以下采用消元法将问题的求解变为 LMIs 的形式, 以方便求解.

为论述方便, 不失一般性, 假设

$$E = \begin{bmatrix} I_{r_p} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \ E_K = \begin{bmatrix} I_{r_k} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{14}$$

注 3. 对于一般形式的 E, 可以通过非奇异变换化为式 (14).

显然, 若定义 H_{X_c}, T_{X_c} 为

$$\begin{aligned}H_{X_c} &= \begin{bmatrix}(A^\circ)^{\rm T}X_c + X_c^{\rm T}A^\circ & * & * & * & * \\ \gamma^{-1}(B_1^\circ)^{\rm T}X_c & -I & * & * & * \\ C_1^\circ & 0 & -I & * & * \\ \varepsilon^{-1}(G^\circ)^{\rm T}X_c & 0 & 0 & -I & * \\ \varepsilon F_1^\circ & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix} \\ T_{X_c} &= \begin{bmatrix}A^\circ X_c^{-1} + X_c^{-{\rm T}}(A^\circ)^{\rm T} & * & * & * & * \\ \gamma^{-1}(B_1^\circ)^{\rm T} & -I & * & * & * \\ C_1^\circ X_c^{-1} & 0 & -I & * & * \\ \varepsilon^{-1}(G^\circ)^{\rm T} & 0 & 0 & -I & * \\ \varepsilon F_1^\circ X_c^{-1} & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

则矩阵不等式 (8) 可表示为

$$H_{X_c} + P_{X_c}^{\rm T}KQ + Q^{\rm T}K^{\rm T}P_{X_c} < 0 \tag{16}$$

式中, $P_{X_c} = \begin{bmatrix}(B_2^\circ)^{\rm T}X_c & 0 & (D^\circ)^{\rm T} & 0 & \varepsilon(F_2^\circ)^{\rm T}\end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix}C_2^\circ & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 为得到 LMIs 形式, 需要如下引理.

引理 2[18]**.** 设 P, Q 和 H 是给定的适当维数矩阵, 且 H 是对称的, $P^\perp$ 和 $Q^\perp$ 分别表示 P 和 Q 的核空间, 即 $PP^\perp = 0$, $QQ^\perp = 0$, 则存在矩阵 X, 使得

$$H + P^{\rm T}XQ + Q^{\rm T}X^{\rm T}P < 0$$

当且仅当

$$P^{\perp{\rm T}}HP^\perp < 0,\ Q^{\perp{\rm T}}HQ^\perp < 0$$

引理 3. 假定 X_c 非奇异, 矩阵 $P = [(B_2^\circ)^{\rm T}\ 0\ (D^\circ)^{\rm T}\ 0\ \varepsilon(F_2^\circ)^{\rm T}], H_{X_c}, T_{X_c}$ 如式 (15), 则 $P_{X_c}^{\perp{\rm T}}H_{X_c}P_{X_c}^\perp < 0 \Longleftrightarrow P^{\perp{\rm T}}T_{X_c}P^\perp < 0$.

证明. 注意到 $P_{X_c} = PS$, $S = {\rm diag}\{X_c, I, I, I, I\}$, 进一步结合 P_{X_c} 和 $P^\perp$ 的定义, 得 $P_{X_c}^\perp = S^{-1}P^\perp$. 从而由 $S^{-{\rm T}}H_{X_c}S^{-1} = T_{X_c}$, 得 $P_{X_c}^{\perp{\rm T}}H_{X_c}P_{X_c}^\perp < 0 \Longleftrightarrow P^{\perp{\rm T}}S^{-{\rm T}}H_{X_c}S^{-1}P^\perp < 0 \Longleftrightarrow P^{\perp{\rm T}}T_{X_c}P^\perp < 0$, 即引理结论成立. □

引理 4. 对系统 (1), 若采用动态输出反馈 H_∞ 控制器式 (5), 则条件 (7)、(8) 成立的充要条件为存在非奇异阵 X_c, 使得下列不等式成立

$$\begin{aligned}& E_c^{\rm T}X_c = X_c^{\rm T}E_c \ge 0 \\ & Q^{\perp{\rm T}}H_{X_c}Q^\perp < 0, P^{\perp{\rm T}}T_{X_c}P^\perp < 0\end{aligned} \tag{17}$$

证明. 由引理 2 和 3 可直接得到式 (17). □

为了简化条件 (17), 由 $E_c^{\rm T}X_c = X_c^{\rm T}E_c \ge 0$, 可将矩阵 X_c 和 X_c^{-1} 写成如下形式

$$\begin{aligned}X_c &= \left[\begin{array}{cc|cc} X_1 & 0 & N_1 & 0 \\ X_3 & X_4 & N_3 & N_4 \\ \hline N_1^{\rm T} & 0 & L_1 & 0 \\ N_7 & N_8 & L_3 & L_4\end{array}\right] \\ X_c^{-1} &= \left[\begin{array}{cc|cc} Y_1 & 0 & M_1 & 0 \\ Y_3 & Y_4 & M_3 & M_4 \\ \hline M_1^{\rm T} & 0 & S_1 & 0 \\ M_7 & M_8 & S_3 & S_4\end{array}\right] \\ X_1 &= X_1^{\rm T}, L_1 = L_1^{\rm T}, Y_1 = Y_1^{\rm T}, S_1 = S_1^{\rm T}\end{aligned} \tag{18}$$

其中, X_1、$Y_1 \in \mathbf R^{r_p\times r_p}$, X_4、$Y_4 \in \mathbf R^{(n_x-r_p)\times(n_x-r_p)}$, L_1、$S_1 \in \mathbf R^{r_k\times r_k}$, L_4、$S_4 \in \mathbf R^{(n_{\tilde x}-r_k)\times(n_{\tilde x}-r_k)}$, 其他子矩阵具有相应维数. 根据上述 X_c 和 X_c^{-1} 的形式, 有如下引理:

引理 5. 假定存在如式 (18) 的 X_c 和 X_c^{-1} 使得式 (17) 成立, 对系统矩阵进行如下分解

$$\begin{aligned}& A_i = \begin{bmatrix}A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22}\end{bmatrix}, B_{1i} = \begin{bmatrix}B_{i11} \\ B_{i12}\end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix}G_{i1} \\ G_{i2}\end{bmatrix} \\ & C_{1i} = \begin{bmatrix}C_{i11} & C_{i12}\end{bmatrix}, F_{1i} = \begin{bmatrix}F_{i11} & F_{i12}\end{bmatrix} \\ & A_{i11}\in\mathbf R^{r_p\times r_p}, B_{i11}\in\mathbf R^{r_p\times n_\omega}, C_{i11}\in\mathbf R^{n_z\times r_p} \\ & G_{i1}\in\mathbf R^{r_p\times r_p}, F_{i11}\in\mathbf R^{r_p\times n_\omega}\end{aligned}$$

则 $Q^{\perp{\rm T}}H_{X_c}Q^\perp < 0, P^{\perp{\rm T}}T_{X_c}P^\perp < 0$ 可等价于下列矩阵不

等式

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c|c}\bar{A}_{21} & C_2\\ \bar{A}_{22} & \\ \hline \bar{B}_{12} & 0\\ 0 & 0\\ \bar{G}_2 & 0\\ 0 & 0\end{array}\end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}X_0+X_0^{\mathrm{T}}A & * & * & * & *\\ \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}}X_0 & -I & * & * & *\\ C_1 & 0 & -I & * & *\\ \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}X_0 & 0 & 0 & -I & *\\ \varepsilon F_1 & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}}_{H_0}\times$$

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c|c}\bar{A}_{21} & C_2\\ \bar{A}_{22} & \\ \hline \bar{B}_{12} & 0\\ 0 & 0\\ \bar{G}_2 & 0\\ 0 & 0\end{array}\end{bmatrix}^{\perp}<0,\ \ X_0=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c|c}\bar{A}_{12}^{\mathrm{T}} & B_2^{\mathrm{T}}\\ \bar{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \\ \hline \bar{C}_{12}^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\\ \bar{F}_{12}^{\mathrm{T}} & \varepsilon F_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}AY_0+Y_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & * & * & * & *\\ C_1Y_0 & -I & * & * & *\\ \varepsilon F_1Y_0 & 0 & -I & * & *\\ \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I & *\\ \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}}_{T_0}\times$$

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c|c}\bar{A}_{12}^{\mathrm{T}} & B_2^{\mathrm{T}}\\ \bar{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \\ \hline \bar{C}_{12}^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\\ \bar{F}_{12}^{\mathrm{T}} & \varepsilon F_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\end{bmatrix}^{\perp}<0,\ \ Y_0=\begin{bmatrix}Y_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{20}$$

其中,

$$A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_i,\bar{A}_{12}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_{i12},\bar{A}_{21}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_{i21}$$

$$\bar{A}_{22}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_{i22},B_2=\left[\begin{array}{c}\alpha_1B_{21},\alpha_2B_{22},\cdots,\alpha_NB_{2N}\end{array}\right]$$

$$B_1=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}B_{11},\sqrt{\alpha_2}B_{12},\cdots,\sqrt{\alpha_N}B_{1N}\end{array}\right]$$

$$\bar{B}_{12}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}B_{112},\sqrt{\alpha_2}B_{212},\cdots,\sqrt{\alpha_N}B_{N12}\end{array}\right]$$

$$C_1=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}C_{11}^{\mathrm{T}},\sqrt{\alpha_2}C_{12}^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}C_{1N}^{\mathrm{T}}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{C}_{12}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}C_{112}^{\mathrm{T}},\sqrt{\alpha_2}C_{212}^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}C_{N12}^{\mathrm{T}}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$C_2=\left[\begin{array}{c}C_{21}^{\mathrm{T}},C_{22}^{\mathrm{T}},\cdots,C_{2N}^{\mathrm{T}}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$D=\mathrm{diag}\left\{\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}D_1,\sqrt{\alpha_2}D_2,\cdots,\sqrt{\alpha_N}D_N\end{array}\right\}$$

$$G=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}G_1,\sqrt{\alpha_2}G_2,\cdots,\sqrt{\alpha_N}G_N\end{array}\right]$$

$$\bar{G}_2=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}G_{12},\sqrt{\alpha_2}G_{22},\cdots,\sqrt{\alpha_N}G_{N2}\end{array}\right]$$

$$F_1=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}F_{11}^{\mathrm{T}},\sqrt{\alpha_2}F_{12}^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}F_{1N}^{\mathrm{T}}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{F}_{12}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}F_{112}^{\mathrm{T}},\sqrt{\alpha_2}F_{212}^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}F_{N12}^{\mathrm{T}}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$F_2=\mathrm{diag}\left\{\begin{array}{c}\sqrt{\alpha_1}F_{21},\sqrt{\alpha_2}F_{22},\cdots,\sqrt{\alpha_N}F_{2N}\end{array}\right\}$$

证明. 引入如下简写矩阵

$$X_l=\left[\begin{array}{cc}X_3, & X_4\end{array}\right],\ Y_l=\left[\begin{array}{cc}Y_3, & Y_4\end{array}\right]$$
$$X_c=\left[\begin{array}{cc}X & N_u\\ N_l & L\end{array}\right],\ X_c^{-1}=\left[\begin{array}{cc}Y & M_u\\ M_l & S\end{array}\right]$$

根据各矩阵的定义, 可以得到

$$H_{X_c}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A & * & * & * & * & *\\ N_u^{\mathrm{T}}A & 0 & * & * & * & *\\ \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}}X & \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}}N_u & -I & * & * & *\\ C_1 & 0 & 0 & -I & * & *\\ \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}X & \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}N_u & 0 & 0 & -I & *\\ \varepsilon F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}$$
$$T_{X_c}=\begin{bmatrix}AY+Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & * & * & * & * & *\\ M_u^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & 0 & * & * & * & *\\ \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -I & * & * & *\\ C_1Y & C_1M_u & 0 & -I & * & *\\ \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -I & *\\ \varepsilon F_1Y & \varepsilon F_1M_u & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix} \tag{21}$$

$Q^{\perp}$ 和 $P^{\perp}$ 可以表示如下

$$Q^{\perp\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}C_2^{\perp\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & I & I & I\end{bmatrix}$$
$$P^{\perp\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}B_2^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} & 0 & 0 & D^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} & 0 & F_1^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}\\ 0 & 0 & I & 0 & I & 0\end{bmatrix}$$

由于 $Q^{\perp}$ 和 $P^{\perp}$ 中有全零行, 则不等式 (17) 等价于

$$\begin{bmatrix}C_2^{\perp} & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A & * & * & * & *\\ \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}}X & -I & * & * & *\\ C_1 & 0 & -I & * & *\\ \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}X & 0 & 0 & -I & *\\ \varepsilon F_1 & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}}_{H'}\times$$
$$\begin{bmatrix}C_2^{\perp} & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}B_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ D^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ \varepsilon F_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}AY+Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & * & * & * & *\\ C_1Y & -I & * & * & *\\ \varepsilon F_1Y & 0 & -I & * & *\\ \varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I & *\\ \gamma^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}}_{T'}\times$$
$$\begin{bmatrix}B_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ D^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ \varepsilon F_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

令 $P_H=[C_2\ 0\ 0\ 0\ 0]$, $P_T=\left[B_2^{\mathrm{T}}\ D^{\mathrm{T}}\ \varepsilon F_2^{\mathrm{T}}\ 0\ 0\right]$, 则不等式 (22)、(23) 可写为

$$P_H^{\perp\mathrm{T}}H'P_H^{\perp}<0,P_T^{\perp\mathrm{T}}T'P_T^{\perp}<0 \tag{24}$$

引入矩阵 $Q_H=\left[\begin{array}{ccccc}I_{n_x} & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$, $Q_T=\left[\begin{array}{ccccc}I_{n_x} & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$, 则

$$Q_H^{\perp\mathrm{T}}H'Q_H^{\perp}<0,\ \ Q_T^{\perp\mathrm{T}}T'Q_T^{\perp}<0 \tag{25}$$

由引理 2, 存在适当维数矩阵 β, δ 可将式 (22)、(23) 化为

$$\begin{array}{l}H'+P_H^{\mathrm{T}}\beta Q_H+Q_H^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}P_H<0\\ T'+P_T^{\mathrm{T}}\delta Q_T+Q_T^{\mathrm{T}}\delta^{\mathrm{T}}P_T<0\end{array} \tag{26}$$

将 H_0 从 H' 分离出来 (对 T_0 类似)

$$\begin{aligned} H' = {} & H_0 + \left[\begin{array}{cc|cccc} \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{B}_{12} & 0 & \bar{G}_2 & 0 \end{array}\right]^{\mathrm{T}} X_l \times \\ & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\ & X_l^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc|cccc} \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{B}_{12} & 0 & \bar{G}_2 & 0 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{27}$$

由式 (26) 和 (27), 有

$$\begin{aligned} & H_0 + \left[\begin{array}{c|cccc} \bar{A}_{21}\ \bar{A}_{22} & \bar{B}_{12} & 0 & \bar{G}_2 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X_l \\ \beta \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\ & \begin{bmatrix} X_l \\ \beta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{c|cccc} \bar{A}_{21}\ \bar{A}_{22} & \bar{B}_{12} & 0 & \bar{G}_2 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] < 0 \end{aligned}$$

由引理 2 即可得证. □

引理 6[18]**.** 设 X_{11}、Y_{11} 是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中给定的对称正定阵, r 是一个正整数, 则存在矩阵 X_{12}、$Y_{12} \in \mathbf{R}^{n\times r}$, 对称矩阵 X_{22}、$Y_{22} \in \mathbf{R}^{r\times r}$, 满足

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^{\mathrm{T}} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{bmatrix} \geq 0,\ \ \mathrm{rank} \begin{bmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{bmatrix} \leq n + r.$$

引理 7. X_c 和 X_c^{-1} 的参数如式 (18), 则 $E_c^{\mathrm{T}} X_c = X_c^{\mathrm{T}} E_c \geq 0$ 成立, 当且仅当下式成立

$$\begin{bmatrix} X_1 & I \\ I & Y_1 \end{bmatrix} \geq 0,\ \ X_1 > 0,\ Y_1 > 0 \tag{28}$$

证明. 由 $E_c^{\mathrm{T}} X_c = X_c^{\mathrm{T}} E_c$ 可得式 (18). 根据 $\mathrm{rank}(E_c^{\mathrm{T}} X_c) = r_p + r_k$, 故 $E_c^{\mathrm{T}} X_c \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} X_1 & N_1 \\ N_1^{\mathrm{T}} & L_1 \end{bmatrix} > 0$, 由式 (18) 进一步可推出 $\begin{bmatrix} X_1 & N_1 \\ N_1^{\mathrm{T}} & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & M_1 \\ M_1^{\mathrm{T}} & S_1 \end{bmatrix} = I$, 即 $Y_1 > 0$, 根据引理 7 即可得不等式 (28). □

定理 2. 对系统 (1), 若采用动态输出反馈 H_∞ 控制器式 (5)(矩阵 E 和 E_K 如式 (14)), 则其闭环系统 (6) 满足鲁棒 H_∞ 性能指标 1) 和 2) 的条件是: 对给定的正实数 γ 和 ε, 以及实数 $\alpha_i \geq 0, \forall i \in \bar{\mathbf{N}}(\ \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1\ )$, 线性矩阵不等式 (19)、(20) 和 (28) 有解 X_1, Y_1. 相应的控制器和切换策略分别为式 (9) 和 (10).

证明. 只需证明式 (19)、(20) 和 (28) 与定理 1 的条件式 (7) 和 (8) 等价即可. 由引理 4, 条件式 (7) 和 (8) 等价于式 (17), 又由引理 5 和引理 7, 式 (17) 等价于式 (19)、(20) 和 (28), 即可得到定理 2 结论成立. □

对如式 (17) 的 X_c 进行如下变形

$$X_c \Pi_1 = \Pi_2, \Pi_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} Y_1 & 0 & I_{r_p} & 0 \\ Y_3 & Y_4 & 0 & I_{(n_x - r_p)} \\ \hline M_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ M_7 & M_8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Pi_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} I_{r_p} & 0 & X_1 & 0 \\ 0 & I_{(n_x - r_p)} & X_3 & X_4 \\ \hline 0 & 0 & N_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 & N_7 & N_8 \end{array}\right] \tag{29}$$

由于 X_l, Y_l 不影响到式 (18) 或 (29) 中矩阵 X_c 的存在性, 如果给定矩阵 $X_j, Y_j, j \in \{1, 3, 4\}$, 我们总能选择 $M_k, N_k, k \in \{1, 7, 8\}$, 使得 Π_1, Π_2 非奇异, 这样使式 (17) 成立的 X_c 也为非奇异阵.

根据以上得到的鲁棒 H_∞ 控制器存在条件, 可以按以下的步骤设计所需要的动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制器:

步骤 1. 求取满足定理 2 条件式 (19)、(20) 和 (28) 的矩阵 X_1、Y_1;

步骤 2. 将步骤 1 解得的矩阵 X_1、Y_1 代入式 (22)、(23), 求解 X_l 和 Y_l;

步骤 3. 选择使 (29) 中 Π_1, Π_2 为非奇异阵的矩阵 $M_k, N_k, k \in \{1, 7, 8\}$, 计算矩阵 $X_c = \Pi_2 \Pi_1^{-1}$;

步骤 4. 随即产生满足约束条件的 α_i, 将由步骤 3 所得矩阵 X_c 代入到矩阵不等式 (16) 中, 可得到只包含控制增益矩阵变量集 K 的线性矩阵不等式, 从而可以应用求解 LMIs 的工具求出 K.

3 数值算例

考虑由 2 个不确定子系统组成的切换奇异系统 (1), $i \in \{1, 2\}$, 参数如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -100 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -100 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{12} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{22} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = 2$$

$$\boldsymbol{C}_{11} = \boldsymbol{C}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{C}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = 1, \boldsymbol{F}_{11} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, F_{21} = 0.2$$

$$F_{22} = 0.3, \Sigma_1(t) = \sin(t), \Sigma_2(t) = \cos(t)$$

取 H_∞ 指标 $\gamma = 1, \alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.4$, 常数 $\varepsilon = 1$, 初始状态 $\boldsymbol{\xi}(0) = [\,3\ \ -1\ \ 2\ \ 1\,]^{\mathrm{T}}$. 根据定理 2, 由 Matlab 中的 LMI 工具箱, 求得 X_1, Y_1 的一个可行解为

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2.4952 & -0.0805 \\ -0.0805 & 2.0062 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 2.8204 & -0.0030 \\ -0.0030 & 2.0087 \end{bmatrix}$$

由式 (16), 求得 2 个动态输出反馈子控制器增益矩阵为

$$K_1 = \left[\begin{array}{c|cc} -0.4891 & 0.0251 & 0.0209 \\ \hline -7.8482 & -96.8061 & -19.0481 \\ -3.1077 & 23.2422 & -79.6014 \end{array}\right]$$

$$K_2 = \left[\begin{array}{c|cc} -0.9600 & 0.1247 & -0.1540 \\ \hline -27.6270 & -4.3455 & -18.0171 \\ 25.8217 & 1.3917 & -71.8225 \end{array}\right]$$

4　结论

本文针对一类由任意有限多个不确定子奇异系统组成的切换线性奇异系统, 建立了动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制器和切换策略的设计方法. 利用消元法, 得到了一组由线性矩阵不等式表示的使相应闭环系统渐近稳定且满足鲁棒 H_∞ 性能指标的充分条件. 利用 Matlab 中 LMI 工具箱, 给出了一个数值仿真实例, 验证了该方法的有效性. 本文所得结果只是针对一类特殊不确定切换奇异系统 (各子系统的奇异阵 E_i 均相同), 如何对更一般的不确定切换奇异系统 (各子系统的奇异阵 E_i 均不相同) 进行分析将是后续工作的重点.

References

1 Dai L Y. *Singular Control Systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1989

2 Shen Tie-Long. *H_∞ Control Theory and Application*. Beijing: Tsinghua University Press, 1996
(申铁龙. H_∞ 控制理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996)

3 Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 1997, **33**(4): 669−673

4 Huang J C, Wang H S, Chang F R. Robust H_∞ control for uncertain linear time invariant descriptor systems. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2000, **147**(6): 648−654

5 Dong X Z, Zhang Q L. Robust H_∞ control for singular systems with state delay and parameter uncertainty. In: Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, China: IEEE, 2004. 1035−1039

6 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59−70

7 Sun Z D, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, 2005, **41**(2): 181−195

8 Nie H, Zhao J. Hybrid state feedback H_∞ robust control for a class of linear systems with time-varying norm-bounded uncertainty. In: Proceedings of the American Control Conference. Denver, USA: IEEE, 2003. 3608−3613

9 Fu Zhu-Mu, Fei Shu-Min, Long Fei. H_∞ state feedback control for a class of switched linear systems: an LMI approach. *Control and Decision*, 2006, **21**(2): 197−200
(付主木, 费树岷, 龙飞. 一类线性切换系统 H_∞ 状态反馈控制: LMI 方法. 控制与决策, 2006, **21**(2): 197−200)

10 Ji Z J, Wang L, Xie D M. Robust H_∞ control and quadratic stabilization of uncertain switched linear systems. In: Proceedings of the 2004 American Control Conference. Boston, USA: IEEE, 2004. 4543−4548

11 Ji Z J, Wang L. Disturbance attenuation of uncertain switched linear systems. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis, Bahamas: IEEE, 2004. 3708−3713

12 Ji Z J, Wang L. Robust H_∞ control and quadratic stabilization of uncertain discrete-time switched linear systems. In: Proceedings of the American Control Conference. Portland, USA: IEEE, 2005. 24−29

13 Meng Bin, Zhang Ji-Feng. Necessary condition for reach ability of switched linear singular systems . *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 2005, **26**(2): 224−228
(孟斌, 张纪峰. 切换线性奇异系统能达的必要条件. 航空学报, 2005, **26**(2): 224−228)

14 Meng B, Zhang J F. Admissible switched control of singular systems. In: Proceedings of the 23rd Chinese Control Conference. Shanghai, China: East China University of Science and Technology Press, 2004. 1615−1619

15 Xie G M, Wang L. Stability and stabilization of switched descriptor systems under arbitrary switching. In: Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Hague, Netherlands: IEEE, 2004. 779−783

16 Yin Yu-Juan, Liu Yu-Zhong, Zhao Jun. Stability of a class of switched linear singular systems. *Control and Decision*, 2006, **21**(1): 24−27
(尹玉娟, 刘玉忠, 赵军. 一类切换线性广义系统的稳定性. 控制与决策, 2006, **21**(1): 24−27)

17 Gahinet P, Apkarian P. An LMI-based parametrization of all H_∞ controllers with applications. In: Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control. San Antonlo, USA: IEEE, 1993. 656−661

18 Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4**(4): 421−448

付主木　河南科技大学电子信息工程学院副教授. 2007 年在东南大学获博士学位, 主要研究方向为切换系统的建模与优化、鲁棒 H_∞ 控制和时滞系统. 本文通信作者. E-mail: fzm1974@163.com
(**FU Zhu-Mu**　Associate professor at Electronic Information Engineering College, Henan University of Science and Technology. He received his Ph. D. degree from Southeast University in 2007. His research interest covers modeling and optimization of switched systems, robust H_∞ control, and time-delay systems. Corresponding author of this paper.)

费树岷　东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为混杂系统、非线性系统控制. E-mail: smfei@seu.edu.cn
(**FEI Shu-Min**　Professor at School of Automation, Southeast University. His research interest covers hybrid systems and nonlinear systems control.)