

# SLAM 问题中机器人定位误差分析与控制

季秀才<sup>1</sup> 郑志强<sup>1</sup> 张辉<sup>1</sup>

**摘要** 移动机器人同步定位与建图问题 (Simultaneous localization and mapping, SLAM) 是机器人能否在未知环境中实现完全自主的关键问题之一. 其中, 机器人定位估计对于保持地图的一致性非常重要. 本文分析了 SLAM 问题中机器人定位误差的收敛特性. 分析表明随着机器人的运动, 机器人定位误差总体上逐渐增大; 在完全未知环境中无法预测机器人定位误差的上限. 根据理论分析, 本文提出了一种控制机器人定位误差在单位距离上增长速度的算法. 该算法通过搜索获得满足定位误差限制的最佳的机器人运动速度, 从而控制机器人定位误差的增长.

**关键词** SLAM 问题, 移动机器人, 定位误差, 误差控制  
**中图分类号** TP242

## Analysis and Control of Robot Position Error in SLAM

JI Xiu-Cai<sup>1</sup> ZHENG Zhi-Qiang<sup>1</sup> ZHANG Hui<sup>1</sup>

**Abstract** The simultaneous localization and mapping (SLAM) problem is one of the key problems for mobile robots to be completely autonomous in unknown environments. The robot position estimation is very important to the consistency of SLAM. This paper presents an analysis of the convergence properties of the robot position error. It is found that as a whole, the robot position error increases with the movement of the robot. Based on theoretical analysis, an algorithm is designed to control the increasing speed of the robot position error. This algorithm searches for the best speed of the robot that satisfies the limitation to the robot position error increasing.

**Key words** SLAM, mobile robots, position error, error control

可靠导航是移动机器人实现自主的先决条件之一. 它包括回答: “我在哪里?”, “我要去哪里?” 和 “我怎样到达那里?” 这三个问题<sup>[1-2]</sup>. 移动机器人的同步定位和地图创建问题 (Simultaneous localization and map building, SLAM) 要求机器人在一个完全未知的环境中从一个未知的位置出发, 利用传感器对环境的观测递增地建立环境的导航地图, 同时根据已建立的地图同步确定自己的位置<sup>[3-4]</sup>, 从而全面地回答 “我在哪里?” 这一问题. SLAM 技术具有重要的理论和应用价值, 被很多学者认为是移动机器人实现真正自主的关键, 甚至称其为自主移动机器人界的 “圣杯 (Holy grail)”<sup>[5]</sup>. 随着移动机器人应用环境日趋复杂和非结构化, 其已成为急需解决的重要性基础性难题, 日益受到关注.

目前, SLAM 问题的解决方法大致分为两类: 基于概率估计的方法和非概率估计的方法. 其中, 基于概率模型的方法占主导地位<sup>[6-10]</sup>. SLAM 问题中机器人定位和建图两者是相辅相生、不断迭代的过程. 机器人由自身的定位信息估计观测到的环境路标的位置, 然后根据环境路标的估计校正机器人

定位, 二者的估算是高度相关的, 任何一方都无法独立获取. 机器人的运动和传感器观测中都存在不可避免的噪声, 另外估计理论基本上是 “估计 - 校正” 过程, 这两点是 SLAM 方法中普遍应用概率估计技术的根本原因. 基于概率估计的 SLAM 方法在很恰当地表示 SLAM 问题的同时也揭示了 SLAM 问题的一些本质特性. Smith 等人<sup>[5-6, 11-12]</sup> 研究了 SLAM 中地图估计的收敛特性. Mourikis 等人<sup>[13]</sup> 应用黎卡提方程推导出了理想情况下机器人定位和建图估计误差的一个上界. 这些研究表明 SLAM 问题有解存在, 可以建立环境地图.

SLAM 问题包括地图建立和机器人定位两个方面. 机器人定位精度决定了后续建图的精度和一致性<sup>[5]</sup>, 所以有必要专门分析机器人定位误差的变化规律. 本文基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法分析了 SLAM 问题中机器人定位误差的收敛特性. 根据理论分析本文提出了一种限制机器人定位误差增长速度的运动控制算法. 该算法假定机器人的运动误差的大小与其运动速度成正比, 并通过二分法搜索获得满足要求的最佳运动速度, 从而通过调整机器人对路标的观测次数控制其定位误差在单位距离上的变化率. 仿真实验验证了本文的理论分析和算法.

## 1 SLAM 问题及算法

图 1 描述了 SLAM 问题的基本场景<sup>[14]</sup>: 移动

收稿日期 2007-06-08 收修改稿日期 2007-09-22  
Received June 8, 2007; in revised form September 22, 2007  
1. 国防科技大学机电工程与自动化学院自动控制系 长沙 410073  
1. Department of Automatic Control, College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00323

机器人从一个未知的位置出发, 在一个分布着人造或者自然路标 (或称为特征) 的未知环境中运动. 机器人根据已知的运动学模型或者里程计信息推定自己的位置 (Dead reckoning), 同时利用自身安装的传感器测量其附近的路标相对于自己的位置. SLAM 技术的目标就是在实现机器人全局定位的同时, 根据观测到的环境路标递增地建立机器人的导航地图, 地图中所描述的即为所观测到的路标. 本文沿用文献 [5] 中描述 SLAM 问题的数学框架和符号. 离散时间  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\mathbf{x}_v(k)$  表示机器人在  $k$  时刻的定位;  $\mathbf{p}_i$  表示第  $i$  个路标的位置; 系统的状态由机器人的定位和所有路标的位置组成, 表示为

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_v^T(k), \mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_N^T]^T \quad (1)$$

其中  $N$  表示路标的个数.

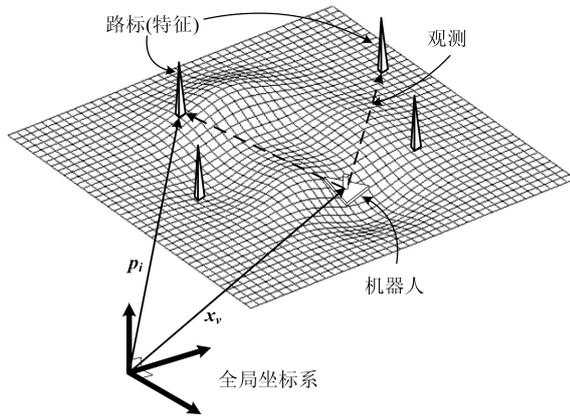


图 1 SLAM 场景示意图<sup>[14]</sup>

Fig. 1 A scenario of SLAM<sup>[14]</sup>

基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法采用线性方程描述系统的运动模型和路标的观测.

### 1.1 系统运动模型

用如下离散线性方程描述机器人的运动模型

$$\mathbf{x}_v(k+1) = F_v(k)\mathbf{x}_v(k) + \mathbf{u}_v(k) + \mathbf{v}_v(k) \quad (2)$$

其中,  $F_v(k)$  为机器人状态转移矩阵,  $\mathbf{u}_v(k)$  为  $(k, k+1]$  时间段的控制输入向量,  $\mathbf{v}_v(k)$  为时序无关的服从零均值协方差矩阵  $Q_v(k)$  的正态随机噪声向量, 即  $\mathbf{v}_v(k) \sim N(0, Q_v(k))$ . 假定环境中的路标为静止物体, 即

$$\mathbf{p}_i(k+1) = \mathbf{p}_i(k) = \mathbf{p}_i \quad (3)$$

综合式 (1)~(3), 可用如下方程描述系统的运动模

型

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_v(k+1) \\ \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v(k) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{p_1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I_{p_N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v(k) \\ \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_v(k) \\ \mathbf{0}_{p_1} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{p_N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{v}_v(k) \\ \mathbf{0}_{p_1} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{p_N} \end{pmatrix} \quad (4)$$

简写为

$$\mathbf{x}(k+1) = F(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (5)$$

### 1.2 路标观测模型

如图 1 所示, 根据几何关系可以得到如下的系统观测模型

$$\mathbf{z}_i(k) = H_i\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\omega}_i(k) = H_{p_i}\mathbf{p}_i - H_{vp_i}\mathbf{x}_v(k) + \boldsymbol{\omega}_i(k) \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{z}_i$  为传感器对于第  $i$  个路标的观测输出,  $\boldsymbol{\omega}_i(k)$  为时序无关的服从零均值协方差矩阵  $R_i(k)$  的正态随机观测噪声向量, 即  $\boldsymbol{\omega}_i(k) \sim N(0, R_i(k))$ ,  $H_i$  称为观测矩阵.

$$H_i = [-H_{vp_i}, 0 \dots 0, H_{p_i}, 0 \dots 0] \quad (7)$$

### 1.3 基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法

基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法应用 Kalman 滤波估计机器人和路标的位置状态, 分为以下三个循环递推的过程:

1) 预测. 首先根据  $k$  时刻系统状态  $\mathbf{x}(k)$  的估计值  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  和控制输入  $\mathbf{u}(k)$ , 利用系统的运动模型, 预测系统在  $k+1$  时刻的状态  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ 、第  $i$  个路标相对于机器人的观测  $\hat{\mathbf{z}}_i(k+1|k)$  和状态估计的协方差矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= F(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{z}}_i(k+1|k) &= H_i\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ P(k+1|k) &= F(k)P(k|k)F^T(k) + Q(k) \end{aligned} \quad (8)$$

2) 观测. 接下来, 机器人获得了第  $i$  个路标的实际观测  $\mathbf{z}_i(k+1)$ , 其满足式 (6). 结合  $\hat{\mathbf{z}}_i(k+1|k)$ , 获得由观测所得的新息

$$\mathbf{v}_i(k+1) = \mathbf{z}_i(k+1) - \hat{\mathbf{z}}_i(k+1|k) \quad (9)$$

以及该新息的协方差矩阵

$$S_i(k+1) = H_i(k)P(k+1|k)H_i^T(k) + R_i(k+1) \quad (10)$$

3) 更新. 根据预测和观测, 应用如下公式更新系统在  $k+1$  时刻的状态估计及相应的协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + W_i(k+1)\mathbf{v}_i(k+1) \quad (11)$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - W_i(k+1)S(k+1)W_i^T(k+1) \quad (12)$$

其中,  $W_i(k+1) = P(k+1|k)H_i^T S_i^{-1}(k+1)$  称为增益矩阵.

基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法随着机器人的不断运动循环执行上述三个过程, 递推估计机器人和路标的位置, 从而实现了机器人的自定位并递推建立环境地图. 上述三个步骤中变量的协方差矩阵体现了算法状态估计的好坏, 所以协方差矩阵的计算非常重要. 本文通过分析协方差矩阵随时间变化的情况研究机器人定位估计的收敛特性.

## 2 机器人定位误差的收敛性分析

### 2.1 预备知识

设矩阵  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  均为 (半) 正定的, 如果  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ , 则称  $A$  大于等于  $B$ , 记为  $A \geq B$ . 显然 (半) 正定矩阵大于零矩阵. 正定矩阵的下述性质对于本文的后续分析非常重要.

**性质 1.** 如果  $A \geq B$ , 则  $A^{-1} \leq B^{-1}$ .

**性质 2.** 如果  $A \geq B$ , 则  $\det A \geq \det B$ , 仅当  $A = B$  时, 等号成立.

**性质 3.** 设矩阵  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  正定, 且  $A \geq B$ , 如果矩阵  $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$  满秩, 则  $CAC^T \geq CBC^T$ . 反之, 若  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  正定,  $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$  满秩, 如果  $CAC^T \geq CBC^T$ , 则  $A \geq B$ .

**性质 4.** 如果  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为半正定矩阵, 则存在可逆矩阵  $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 使得  $A = CH_1C^T, B = CH_2C^T$ , 其中,  $H_1 = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), H_2 = \text{diag}(b_1, \dots, b_n); a_i, b_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ .

**引理 1.** 当机器人某一时刻观测到多个路标时, 无论是将所有的观测看作一个整体进行状态更新, 还是根据各个路标观测逐一更新, 状态估计的结果相同, 而且与更新顺序无关.

因为任意时刻路标的观测相互独立, 根据联邦滤波器原理<sup>[15]</sup> 很容易证明引理 1 的结论.

**引理 2.** 机器人定位估计在  $k+1$  时刻的更新仅与  $k$  时刻的定位估计和  $k+1$  时刻观测到的路标有关, 而与  $k+1$  时刻未观测到的路标无关.

文献 [7] 给出了相似结论的证明. 为了分析机器人定位误差的收敛特性, 根据引理 2, 本文只考虑当前时刻机器人观测到的路标.

### 2.2 线性-高斯 SLAM 中机器人定位误差分析

假定机器人的状态转移矩阵  $F_v(k) = I$ , 观测矩

阵  $H_i$  中的  $H_{v p_i} = I$  和  $H_{P_i} = I$ . 取

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_{vm} & H_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -I & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \quad (13)$$

满足上述假设的 SLAM 问题称为线性-高斯 SLAM (LG-SLAM)<sup>[16]</sup>. 虽然 LG-SLAM 比较简单, 但是由于基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法可以获得该问题的最小方差无偏估计, 所以对该问题收敛特性的研究能够使我们了解一般的 SLAM 问题的收敛性质.

系统状态的协方差矩阵可以表示为分块矩阵形式

$$P = \begin{pmatrix} P_{vv} & P_{vm} \\ P_{vm}^T & P_{mm} \end{pmatrix} \quad (14)$$

记  $P^- = P(k|k-1), P^+ = P(k|k), M_1 = P_{vv}^- H_{vm}^T - P_{vm}^- H_m^T, M_2 = P_{mv}^- H_{vm}^T - P_{mm}^- H_m^T$ , 由式 (12) 得

$$P^+ = P^- - P^- H^T S^{-1} H P^- = P^- - \begin{bmatrix} M_1 S^{-1} M_1^T & M_1 S^{-1} M_2^T \\ M_2 S^{-1} M_1^T & M_2 S^{-1} M_2^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

则机器人定位估计的方差矩阵满足下式

$$P_{vv}(k+1|k+1) = P_{vv}(k|k) + Q(k) - M_1(k+1)S^{-1}(k+1)M_1^T(k+1) \quad (16)$$

并且  $M_1, M_2$  和  $S$  满足如下的递推公式

$$\begin{cases} M_1(k+1) = M_1(k)S^{-1}(k)R(k) + Q(k)H_{vm}^T \\ M_2(k+1) = M_2(k)S^{-1}(k)R(k) \\ S(k+1) = H_{vm}Q(k)H_{vm}^T + R(k) - R(k)S^{-1}(k)R(k) + R(k+1) \end{cases} \quad (17)$$

首先, 考虑理想情况: 机器人从零时刻起始终观测到  $N$  个路标  $p_1, \dots, p_N$ , 机器人定位的初始方差为  $P_{vv}(0)$ , 运动噪声方差为常值:  $\forall k > 0, Q(k) = Q$ ; 各个路标的观测噪声方差为常值且相等:  $\forall k > 0, R_i(k) = R (i = 1, \dots, N)$ .

**定理 1.** 上述情况下, 机器人定位估计协方差矩阵的行列式值单调递增, 即

$$\det P_{vv}(k+1) > \det P_{vv}(k)$$

而且收敛.

**证明.** 根据引理 1, 可以将各路标看作整体进行状态更新. 取  $R = \text{diag}(R', \dots, R')$ , 初始时刻

$$P(1|0) = \begin{pmatrix} P_{vv}(0) + Q & P_{vv}(0)H_{vm}^T \\ H_{vm}P_{vv}(0) & H_{vm}P_{vv}(0)H_{vm}^T + R \end{pmatrix}$$

$M_1(1) = QH_{vm}^T$ ,  $M_2(1) = -R$ ,  $S(1) = H_{vm}QH_{vm}^T + 2R$ . 根据式 (17) 可得递推公式

$$\begin{cases} M_1(k+1) = M_1(k)S^{-1}(k)R + QH_{vm}^T \\ M_2(k+1) = M_2(k)S^{-1}(k)R \\ S(k+1) = H_{vm}QH_{vm}^T + 2R - RS^{-1}(k)R \end{cases} \quad (18)$$

因为  $Q$  为正定矩阵, 所以  $P(k|k-1) = P(k-1|k-1) + Q$  正定. 又因为  $R$  正定, 所以新息方差矩阵  $S(k) = P(k|k-1) + R$  正定, 而且  $S(k) > R$ . 根据正定矩阵的性质 1, 可得  $RS^{-1}(k)R < R$ . 由式 (18) 可得  $S(2) = H_{vm}QH_{vm}^T + 2R - RS^{-1}(1)R < H_{vm}QH_{vm}^T + 2R = S(1)$ , 所以  $S^{-1}(2) > S^{-1}(1)$ , 即  $S^{-1}(1) - S^{-1}(2) < 0$ . 由式 (18) 可得

$$S(k+1) - S(k) = R[S^{-1}(k-1) - S^{-1}(k)]R \quad (19)$$

根据递推关系可知  $S(k+1) - S(k) < 0$ , 所以矩阵序列  $\{S(k)\}$  为递减序列. 又因为  $S(k) > H_{vm}QH_{vm}^T + R$ , 所以  $\{S(k)\}$  有下限, 记为  $\underline{S}$ . 由式 (18) 可得

$$\underline{S} = H_{vm}QH_{vm}^T + 2R - R\underline{S}^{-1}R \quad (20)$$

因为  $Q$  为  $n$  阶正定矩阵, 所以  $H_{vm}QH_{vm}^T$  为  $nN$  阶半正定矩阵, 并在  $n$  维子空间中正定. 又因为  $R$  为  $nN$  阶正定矩阵, 根据性质 4, 存在  $nN$  阶可逆矩阵  $C$ , 使得

$$H_{vm}QH_{vm}^T = CH_qC^T, \quad R = CH_rC^T$$

其中,  $H_q = \text{diag}(q_1, \dots, q_{nN})$ ,  $H_r = \text{diag}(r_1, \dots, r_{nN})$ ,  $q_i, r_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, nN)$ . 因为  $S(1) = H_{vm}QH_{vm}^T + 2R$ , 所以  $S(1) = C(H_q + 2H_r)C^T = CH_{s_1}C^T$ , 其中,  $H_{s_1} = \text{diag}(s_{11}, \dots, s_{1n})$ ,  $s_{1i} = q_i + 2r_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 根据递推关系可得  $S(k) = CH_{s_k}C^T$ , 其中,  $H_{s_k} = \text{diag}(s_{k1}, \dots, s_{kn})$ , 而且  $q_i + r_i < s_{ki} \leq q_i + 2r_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $s_{(k+1)i} < s_{ki}$ .

取  $N(k) = H_{vm}M_1(k)$ . 因为  $N(1) = H_{vm}M_1(1) = H_{vm}QH_{vm}^T = CH_qC^T$ ,  $S^{-1}(k) = C^{-T}H_{s_k}^{-1}C^{-1}$ , 以及序列  $\{S(k)\}$  的递推公式, 可得  $N(k) = CH_{Nk}C^T$ , 其中,  $H_{Nk} = \text{diag}(m_{N1}, \dots, m_{Nn})$ ,  $m_{Ni} > 0$ . 所以  $N(k)$  为半正定矩阵.

取矩阵序列  $\{T(k)\}$ , 满足:  $T(1) = H_{vm}QH_{vm}^T$ ,  $T(k+1) = T(k)\underline{S}^{-1}R + H_{vm}QH_{vm}^T$ . 显然  $\{T(k)\}$  为半正定矩阵序列, 且容易证明:  $T(k) \geq N(k)$ ,

$T(k+1) - T(k) = H_{vm}QH_{vm}^T (\underline{S}^{-1}R)^k$ . 则  $T(k+1) \geq T(k)$ , 而且  $\lim_{k \rightarrow \infty} [T(k+1) - T(k)] = 0$ , 即序列  $\{T(k)\}$  递增有上限, 记该上限为  $\bar{T}$ , 则

$$\bar{T} = \bar{T}\underline{S}^{-1}R + H_{vm}QH_{vm}^T = H_{vm}QH_{vm}^T (I - \underline{S}^{-1}R)^{-1} \quad (21)$$

所以

$$\begin{aligned} H_{vm}M_1(k)S^{-1}(k)M_1^T(k)H_{vm}^T &< \\ H_{vm}M_1(k)\underline{S}^{-1}M_1^T(k)H_{vm}^T &= \\ N(k)\underline{S}^{-1}N^T(k) &< \\ \bar{T}\underline{S}^{-1}\bar{T}^T &= H_{vm}QH_{vm}^T \end{aligned} \quad (22)$$

所以  $M_1(k)S^{-1}(k)M_1^T(k) < Q$ . 根据式 (16) 可得  $P_{vv}(k+1|k+1) > P_{vv}(k|k)$ , 所以

$$\det P_{vv}(k+1) > \det P_{vv}(k) \quad (23)$$

同理可以证明  $P_{vm}(k)$ ,  $P_{mm}(k)$  有限. 又因为

$$\begin{aligned} S(k+1) &= H_{vm}P_{vv}(k)H_{vm}^T + H_{vm}QH_{vm}^T - \\ &H_{vm}P_{vm}(k)H_m^T - H_mP_{vm}^T(k)H_{vm}^T + \\ &H_mP_{mm}(k)H_m^T + R \end{aligned} \quad (24)$$

而  $S(k)$  存在极限, 所以  $P_{vv}(k)$  有上限, 所以  $\det P_{vv}(k)$  收敛.  $\square$

**定理 2.** 当机器人从零时刻起始终观测到多个路标时, 如果运动噪声  $Q(k)$  和观测噪声  $R(k)$  时变, 那么对于任意时刻  $k$ , 均有

$$\det P_{vv}(k) > \det P_{vv}(0)$$

即机器人定位估计的协方差矩阵行列式值在任何时刻均大于初始时刻, 而且如果  $Q(k)$  和  $R(k)$  有限, 则  $P_{vv}(k)$  有上界.

**证明.** 取  $Q = \min\{Q(i)\}$ ,  $R = \text{diag}\{\min\{R_1(i)\}, \dots, \min\{R_N(i)\}\}$ , 其中,  $N$  为路标个数. 设运动误差和观测误差的方差分别为  $Q$  和  $R$  时, 机器人定位估计的方差矩阵为  $P'_{vv}$ . 显然有  $P_{vv}(i) \geq P'_{vv}(i) (i = 1, \dots, k)$ .

根据定理 1 可知:  $\forall i, P'_{vv}(i) > P_{vv}(0) (i = 1, \dots, k)$ . 所以有  $P_{vv}(k) > P_{vv}(0)$ , 则

$$\det P_{vv}(k) > \det P_{vv}(0)$$

如果  $Q(k)$  和  $R(k)$  有限, 取  $Q = \max\{Q(i)\}$ ,  $R = \text{diag}\{\max\{R_1(i)\}, \dots, \max\{R_N(i)\}\}$ . 设机器人运动误差和路标观测误差的方差分别为  $Q$  和  $R$  时, 机器人定位估计的协方差为  $P''_{vv}$ . 显然  $P''_{vv}(i) \geq P_{vv}(i)$ . 根据定理 1,  $P''_{vv}$  有上界. 所以  $P_{vv}(k)$  有上界.  $\square$

关于上述定理更详细的证明可参见文献 [17]. 定理 1 和定理 2 说明对于 LG-SLAM 问题, 机器人某一时刻的定位误差比观测到当前路标中最早一个时刻的定位误差大. 也就是说机器人的定位误差总体上是逐渐递增的.

### 2.3 进一步分析

实际的 SLAM 过程远比上述定理描述的情况复杂: 机器人不可能同时观测到环境中的所有路标, 在某一时刻一般仅能观测到少数几个路标, 有时只能观测到一个甚至观测不到任何路标; 另外, 机器人对于任何路标的观测只能持续有限的一段时间, 随着不断运动, 它将逐渐丧失对以前路标的观测, 同时观测到一些新的路标.

定理 1 的证明过程表明, 在观测到新路标的前几个时间段内机器人的定位误差的增长速度比后面时间段的快, 所以相对于前面观测的路标, 新观测的路标对机器人定位估计的贡献较小. 假定在某一 SLAM 过程中任何时刻最多可以观测到  $N$  个路标, 取  $R' = \min\{R_i(k)\} (\forall i)$ ,  $Q = \min\{Q(i)\} (i = 1, \dots, k)$ ,  $R = \text{diag}\{R', \dots, R'\}$  为  $nN \times nN$  阶块对角矩阵. 假设机器人运动噪声和观测噪声的方差分别为  $Q$  和  $R$ , 在这种理想情况下机器人的定位误差为一般情况下定位误差的下限, 如图 2 中的实线所示. 如果机器人对于任何路标只观测一次, 那么其定位误差的方差为

$$P_{vv}(k) = P_{vv}(0) + kQ \quad (25)$$

它为定位误差方差的上限, 如图 2 中的点划线所示. 一般情况下, 机器人定位误差方差的变化位于上述上、下限之间, 如图 2 中的虚线所示.

尽管上述分析大多是讨论理想情况下机器人定位误差的变化情况, 但是, 只有当机器人始终能够观测到所有路标或者对任何路标进行无限多次观测时, 其定位误差才会趋近于某一极限值而不再增加. 然而这两种情况在实际应用中一般都无法实现. 另外, 绝大多数的 SLAM 问题均为非线性的, 在线性化过程中会引入更大的系统误差, 在 LG-SLAM 中机器人定位误差总体上是逐渐增大的, 所以非线性 SLAM 问题中机器人定位误差总体上也应该是逐渐增大的. 除了运动模型和观测模型外, 机器人定位估计还与某一时刻观测到的路标数量和对路标的观测次数有关. 所以对于完全未知的环境, 无法估计定位误差的上界, 因此范围比较大的环境当中闭环问题 (Closing loop problem)<sup>[18]</sup> 将不可避免. 如果路标只分布在一些局部区域, 机器人在一些时候无法观测到路标时, 其定位误差将迅速增大. 所以对于这种环境, 基于拓扑-度量地图的混合式 SLAM 方

法<sup>[19]</sup> 的效果要好于仅基于度量地图的 SLAM 方法.

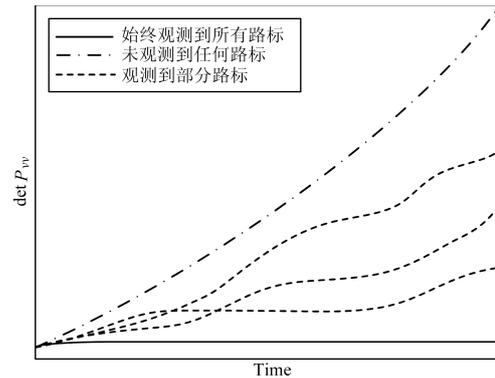


图 2 SLAM 中机器人定位误差变化示意图

Fig. 2 A sketch of the evolution of robot position errors

### 3 一种限制机器人定位误差增长速度的机器人控制算法

上一节的分析表明, SLAM 中机器人定位误差总体上是递增的, 而且在完全未知的环境中无法估计定位误差的上限, 所以无法控制定位误差的上限. 但是可以采取限制措施限制机器人定位误差随其运动的增长速度. 一般情况下机器人的运动模型误差与控制输入的大小直接相关, 而运动模型误差的大小直接影响其定位误差的增长速度. 所以可以通过控制机器人的运动速度来限制其运动模型误差, 从而限制定位误差的增长速度. 首先必须定义一个度量机器人定位误差大小的准则, 因为基于 Kalman 滤波的 SLAM 算法中定位估计的方差矩阵通过矩阵加法更新, 为了便于计算并兼顾机器人定位的各个自由度, 本文将定位估计方差矩阵迹的大小作为定位误差大小的度量. 设该度量为  $\sigma$ , 则

$$\sigma(k) = \text{tr}(P_{vv}) \quad (26)$$

设机器人定位误差相对于其运动的增长速度的限制为  $\delta$ , 即要求

$$\frac{\sigma(k+1) - \sigma(k)}{\xi(k)\Delta t} \leq \delta \quad (27)$$

其中,  $\xi(k) = \|\mathbf{u}(k)\|$  为机器人在  $\Delta t = (k, k+1]$  时间段内的运动速度的大小.

移动机器人的运动模型误差主要与其运动速度有关, 本文假定机器人运动模型误差的大小与机器人运动距离成正比, 即  $Q(k) = \xi(k)\Delta t Q$ , 其中  $Q$  为单位距离下机器人运动模型误差的方差矩阵. 假定下一时刻机器人观测到相同的路标, 且  $F_v(k) = I$ ,

根据式 (16) 和 (17) 可得

$$\begin{cases} M_1(k+1) = M_1(k)S^{-1}(k)R(k) + \\ \quad \xi(k)\Delta tQH_{vm}^T \\ S(k+1) = H_{vm}\xi(k)\Delta tQH_{vm}^T + \\ \quad R(k) - R(k)S^{-1}(k)R(k) + R(k+1) \end{cases} \quad (28)$$

$$\sigma(k+1) = \sigma(k) + \text{tr}[\xi(k)\Delta tQ - M_1(k+1)S^{-1}(k+1)M_1^T(k+1)] \quad (29)$$

将式 (27) 代入式 (29), 可得不等式

$$\text{tr}[\xi(k)\Delta tQ - M_1(k+1)S^{-1}(k+1)M_1^T(k+1)] \leq \xi(k)\Delta t\delta \quad (30)$$

设  $\xi'(k) = \max\{\xi(k) | \xi(k) \text{ 满足式 (30)}\}$ , 可取控制量为  $\mathbf{u}(k) = \xi'(k)\mathbf{u}'(k)$ , 其中  $\|\mathbf{u}'(k)\| = 1$ . 直接求解  $\xi'(k)$  比较困难, 可以先取一个较大的  $\xi''$ , 然后在区间  $[0, \xi'']$  应用二分法进行搜索求解. 具体算法如表 1 所示.

上述算法控制机器人的运动速度, 从而可以控制对路标的观测次数, 进而控制 SLAM 中机器人定位误差的增长速度. 在路标比较密集的区域机器人

的运动速度比较快, 而在路标比较稀少的区域机器人的运动速度比较慢, 从而能够防止机器人定位误差在某些区域迅速增长.

## 4 仿真实验

第 3 节主要分析了 LG-SLAM 问题中机器人定位误差的收敛特性. 对于非线性 SLAM 问题, 很难分析其收敛特性. 因为 LG-SLAM 问题中机器人的定位误差总体上是递增的, 所以非线性 SLAM 问题中机器人的定位误差肯定总体上是递增的. 本文将用仿真实验验证这一点, 并检验本文理论分析的正确性.

本文应用开放的 SLAM 仿真软件 EKFSLAM\_v1.0<sup>[20]</sup> 进行了多次仿真实验. 该软件应用基于扩展 Kalman 滤波的 SLAM 算法仿真汽车式 (Car-like) 机器人在布有路标的环境中的 SLAM 过程, 这是一个典型的非线性 SLAM 问题, 本文仿真了以下几种情况:

**情况 1.** 环境中没有路标, 机器人根据自身的运动模型估计定位;

**情况 2.** 环境中只有 1 个路标, 机器人始终可以观测到该路标;

**情况 3.** 环境中有 8 个路标, 机器人始终可以观测到这些路标;

表 1 限制机器人定位误差增长速度的机器人控制算法

Table 1 A robot control algorithm limiting the increasing speed of robot position error

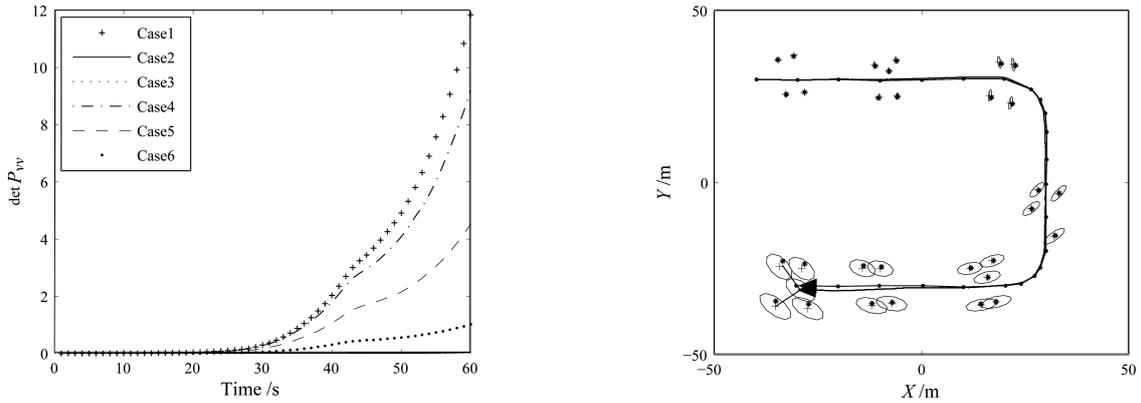
---

```

 $\mathbf{u}(k) = \text{ErrorContrl}(\mathbf{u}'(k), H_{vm}, M_1(k), S(k), R(k), R(k+1))$ 
{
   $\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = \alpha; \quad // \alpha > 0$  为一初始值
  do {
     $M_1(k+1) = M_1(k)S^{-1}(k)R(k) + \xi_2\Delta tQH_{vm}^T$  //  $Q$  为单位速度下机器人运动误差的方差矩阵
     $S(k+1) = H_{vm}\xi_2\Delta tQH_{vm}^T + R(k) - R(k)S^{-1}(k)R(k) + R(k+1)$ 
     $Temp = \text{tr}[\xi_2\Delta tQ - M_1(k+1)S^{-1}(k+1)M_1^T(k+1)] - \xi_2\Delta t\delta$  //  $\Delta t, \delta$  已知
    If ( $Temp < 0$ ) {
       $\xi_1 = \xi_2; \quad \xi_2 = p\xi_2$  //  $p > 1$  为放大系数
    }
  } while( $Temp < 0$ );
  do {
     $\xi = (\xi_1 + \xi_2)/2;$ 
     $M_1(k+1) = M_1(k)S^{-1}(k)R(k) + \xi\Delta tQH_{vm}^T$ 
     $S(k+1) = H_{vm}\xi\Delta tQH_{vm}^T + R(k) - R(k)S^{-1}(k)R(k) + R(k+1)$ 
     $Temp = \text{tr}[\xi\Delta tQ - M_1(k+1)S^{-1}(k+1)M_1^T(k+1)] - \xi\Delta t\delta$ 
    if ( $Temp < 0$ )
       $\xi_1 = \xi;$ 
    else
       $\xi_2 = \xi;$ 
  } while(  $\text{abs}(Temp) > \gamma$  ); //  $\gamma$  为设定的阈值
  return  $\xi\mathbf{u}'(k);$ 
}

```

---



(a) 机器人定位方差矩阵行列式随时间变化曲线

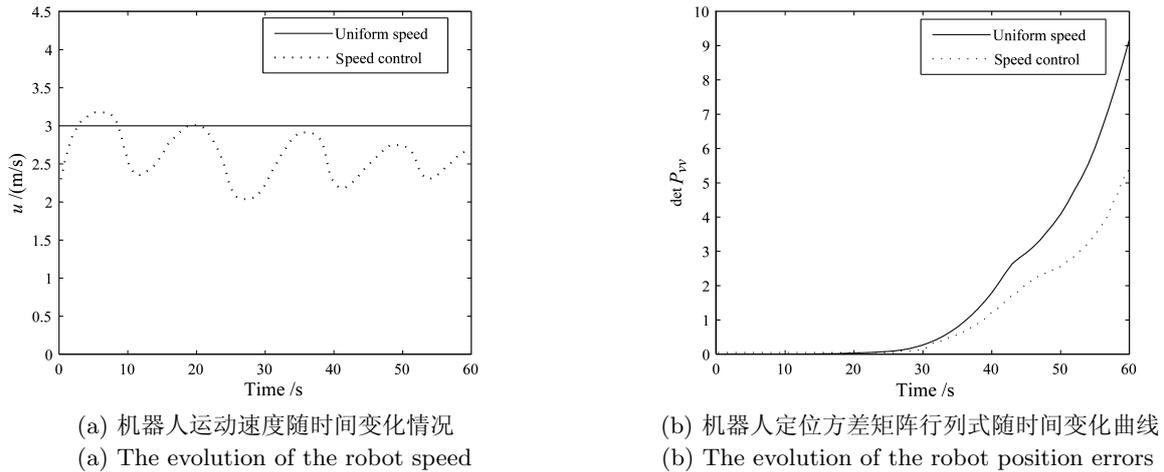
(a) The evolution of the robot position errors

(b) 情况 4 的仿真实验场景

(b) The simulation scene of case 4

图 3 仿真实验结果及实验场景

Fig. 3 Simulation experiment results and a typical simulation scene



(a) 机器人运动速度随时间变化情况

(a) The evolution of the robot speed

(b) 机器人定位方差矩阵行列式随时间变化曲线

(b) The evolution of the robot position errors

图 4 速度控制实验结果

Fig. 4 Speed control experiment results

**情况 4.** 环境中有 30 个路标, 它们分布并不均匀, 机器人的观测范围为 15 m;

**情况 5.** 环境中均匀分布有 30 个路标, 机器人的观测范围为 15 m;

**情况 6.** 环境中均匀分布有 30 个路标, 机器人的观测范围为 30 m.

图 3(a) 显示了在不同情况下机器人定位估计方差矩阵行列式值随时间变化的情况, 图 3(b) 为在情况 4 下的仿真场景. 实验结果与本文的理论分析完全一致, 这既说明了本文分析的正确性, 同时也说明非线性 SLAM 问题中机器人的定位误差总体上确实是逐渐增大的.

另外, 本文应用仿真实验检验了第 4 节中提出的控制机器人定位误差增长速度的算法的正确性和可行性. 本文仿真了情况 4 下, 机器人匀速运动  $u = 3 \text{ m/s}$  时和进行速度控制时机器人定位误差的

变化情况. 实验结果如图 4 所示. 图 4(a) 中的实验结果显示在图 3(b) 中路标比较密集的区域机器人的速度较快, 在路标比较稀少的区域机器人的速度较慢. 这与期望的结果非常符合. 实验结果表明: 可以利用第 4 节提出的方法通过控制机器人的运动速度限制其定位误差在单位距离上的增长速度.

## 5 结论

本文首先从理论上分析了 SLAM 问题中机器人定位误差的收敛特性. 最主要的结论是: 随着机器人的不断运动, 其定位误差总体上是递增的. 另外, 机器人的定位误差同时受到其观测的路标数量、观测路标的频率以及路标的空间分布情况的影响. 根据理论分析, 本文提出了通过控制机器人运动速度限制其定位误差增长速度的算法, 从而可以防止机器人定位误差在某时间段迅速增长. 仿真实验验证

了本文理论分析的正确性和控制机器人定位误差增长速度算法的可行性. 本文的结论将有助于 SLAM 问题的研究者认识 SLAM 问题的本质特性, 从而提出更好的 SLAM 方法. 另外, 本文提出的算法的计算量相对比较大, 如何获得解析的最优的机器人运动速度将是作者以后的研究目标.

## References

- 1 Frese U. A discussion of simultaneous localization and mapping. *Autonomous Robots*, 2006, **20**(1): 25–42
- 2 Leonard J J, Durrant-Whyte H F, Cox I J. Dynamic map building for an autonomous mobile robot. *International Journal of Robotics Research*, 1992, **11**(4): 286–298
- 3 Chen Wei-Dong, Zhang Fei. Review on the achievements in simultaneous localization and map building for mobile robot. *Control Theory and Applications*, 2005, **22**(3): 455–460  
(陈卫东, 张飞. 移动机器人的同步自定位与地图创建研究进展. 控制理论与应用, 2005, **22**(3): 455–460)
- 4 Li Mao-Hai, Hong Bing-Rong, Luo Rong-Hua. Simultaneous localization and map building for mobile robot. *Journal of Harbin Institute Technology*, 2004, **36**(7): 874–876  
(厉茂海, 洪炳镛, 罗荣华. 移动机器人的同时定位和地图创建方法. 哈尔滨工业大学学报, 2004, **36**(7): 874–876)
- 5 Dissanayake M W M G, Newman P, Clark S, Durrant-Whyte H F, Csorba M. A solution to the simultaneous localization and map building (SLAM) problem. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, **17**(3): 229–241
- 6 Smith R, Self M, Cheeseman P. Estimating uncertain spatial relationships in robotics autonomous robot vehicles. *Autonomous Robot Vehicles*. New York: Springer-Verlag, 1988. 167–193
- 7 Guivant J E, Nebot E M. Optimization of the simultaneous localization and map-building algorithm for real-time implementation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, **17**(3): 242–257
- 8 Montemerlo M, Thrun S, Koller D, Wegbreit B. FastSLAM: a factored solution to the simultaneous localization and mapping problem. In: Proceedings of the AAAI National Conference on Artificial Intelligence. Edmonton, Canada: AAAI, 2002. 593–598
- 9 Thrun S, Koller D, Ghahramani Z, Durrant-Whyte H F, Ng Y A. Simultaneous mapping and localization with sparse extended information filters: theory and initial results. In: Proceedings of the 5th International Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics. Nice, France: IEEE, 2002. 363–380
- 10 Thrun S. Robotic Mapping: A Survey, Technical Report CMU-CS-02-111, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, USA, 2002
- 11 Cheeseman P, Smith R C. On the representation and estimation of spatial uncertainty. *The International Journal of Robotics Research*, 1986, **5**(4): 56–68
- 12 Durrant-Whyte H F. Uncertain geometry in robotics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1988, **4**(1): 23–31
- 13 Mourikis A I, Roumeliotis S I. Analysis of positioning uncertainty in simultaneous localization and mapping (SLAM). In: Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Sendai, Japan: IEEE, 2004. 13–20
- 14 Nebot E M. Simultaneous localization and mapping 2002 summer school [Online], available: [http://www.cas.kth.se/SLAM/Presentations/slam\\_nebot.pdf](http://www.cas.kth.se/SLAM/Presentations/slam_nebot.pdf), September 18, 2007
- 15 Han Chong-Zhao, Zhu Hong-Yan, Duan Zhan-Sheng. *Information Fusion from Multiple Sources*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006  
(韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合. 北京: 清华大学出版社, 2006)
- 16 Montemerlo M, Thrun S, Koller D, Wegbreit B. Fastslam 2.0: an improved particle filtering algorithm for simultaneous localization and mapping that provably converges. In: Proceedings of the 6th International Conference on Artificial Intelligence. Acapulco, Mexico: 2003. 1151–1156
- 17 Ji X C, Zheng Z Q, Zhang H. Robot position convergency in simultaneous localization and mapping. In: Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Harbin, China: IEEE, 2007. 320–325
- 18 Martinelli A I, Tomatis A N, Siegwart R. Some results on SLAM and the closing the loop problem. In: Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Edmonton, Canada: IEEE, 2005. 2917–2922
- 19 Thrun S, Gutmann J S, Fox D, Burgard W, Kuipers B J. Integrating topological and metric maps for mobile robot navigation: a statistical approach. In: Proceedings of the 15th Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence. Wisconsin, USA: AAAI Press/The MIT Press Madison, 1998. 989–995
- 20 Bailey T. EKFSLAM\_v1.0. [Online], available: [http://www.personal.acfr.usyd.edu.au/tbailey/software/slam\\_sims/ekfslam.v1.0.zip](http://www.personal.acfr.usyd.edu.au/tbailey/software/slam_sims/ekfslam.v1.0.zip), September 22, 2007



季秀才 国防科技大学机电工程与自动化学院博士研究生. 主要研究方向为机器人同步定位与建图技术. 本文通讯作者. E-mail: [jxc\\_nudt@hotmail.com](mailto:jxc_nudt@hotmail.com)  
(JI Xiu-Cai Ph.D. candidate at College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defence Technology. His main research interest is SLAM. Corresponding author of this paper.)



郑志强 国防科技大学教授. 主要研究方向为多机器人协作控制技术.  
(ZHENG Zhi-Qiang Professor, Ph.D. at National University of Defence Technology. His main research interest is multi-robot coordination control.)



张辉 国防科技大学副教授. 主要研究方向为机器人控制以及机器人同步定位与建图技术.  
(ZHANG Hui Associate professor at National University of Defence Technology. His research interest covers robot control and SLAM.)