

相关观测融合稳态 Kalman 滤波器及其最优性

冉陈键¹ 惠玉松¹ 顾磊¹ 邓自立¹

摘要 对于带相关观测噪声和带不同观测阵的多传感器系统, 用加权最小二乘 (Weighted least squares, WLS) 法提出了两种相关观测融合稳态 Kalman 滤波算法. 其原理是用加权局部观测方程得到一个融合观测方程, 它伴随状态方程实现观测融合稳态 Kalman 滤波. 用信息滤波器证明了它们功能等价于集中式融合稳态 Kalman 滤波算法, 因而具有渐近全局最优性, 且可减少计算负担. 它们可应用于多通道自回归滑动平均 (Autoregressive moving average, ARMA) 信号观测融合滤波和反卷积. 两个数值仿真例子验证了它们的功能等价性.

关键词 传感器信息融合, 观测融合, 相关观测噪声, 稳态 Kalman 滤波, 最优性

中图分类号 O211.64

Correlated Measurement Fusion Steady-state Kalman Filtering Algorithms and Their Optimality

RAN Chen-Jian¹ HUI Yu-Song¹ GU Lei¹ DENG Zi-Li¹

Abstract For the multisensor systems with correlated measurement noises and different measurement matrices, two correlated measurement fusion steady-state Kalman filtering algorithms are presented by using the weighted least squares (WLS) method. The principle is that a fused measurement equation is obtained by weighting the local measurement equations, and then it accompanies the state equation to realize the measurement fusion steady-state Kalman filtering. By using the information filter, it is proved that they are functionally equivalent to the centralized fusion steady-state Kalman filtering algorithm, so that they have the asymptotic global optimality, and they can reduce the computational burden. They can be applied to the measurement fusion filtering and deconvolution for multichannel autoregressive moving average (ARMA) signals. Two numerical simulation examples verify their functional equivalence.

Key words Multisensor information fusion, measurement fusion, correlated measurement noises, steady-state Kalman filtering, optimality

由于军事、国防、制导、跟踪、GPS 定位、机器人等许多高科技领域的迫切需要, 多传感器信息融合技术已成为备受关注的热门技术^[1]. 对于基于 Kalman 滤波的信息融合技术, 目前有两种融合方法, 即状态融合和观测融合^[2]. 状态融合分为集中式融合和分布式融合. 集中式状态融合方法用直接合并所有局部观测方程得到一个扩维融合观测方程, 然后伴随状态方程给出全局最优 Kalman 滤波器; 而分布式状态融合方法用加权局部 Kalman 估值器给出全局最优或全局次优 Kalman 融合器^[3-4]. 观测融合方法也分为集中式和分布式观测融合方法. 集中式观测融合方法与集中式状态融合方法相同; 而分布式观测融合方法也叫加权观测融合方法, 它

通过加权局部观测方程得到一个融合观测方程, 然后伴随状态方程引出加权观测融合 Kalman 滤波器. 文献 [2] 对带相同观测阵和带不相关噪声的多传感器系统证明了加权观测融合 Kalman 滤波算法功能等价于集中式融合 Kalman 滤波算法, 因而是全局最优的. Roy 和 Iltis^[5] 指出在许多应用问题中出现带相关观测噪声的多传感器信息融合问题, 例如各传感器有公共的附加干扰噪声或干扰源. 文献 [6] 对带相关观测噪声的多传感器系统用 Lagrange 乘数法^[7] 提出了一种加权观测融合 Kalman 滤波算法, 并用信息滤波器证明了它功能等价于集中式融合 Kalman 滤波算法, 因而具有全局最优性; 但其局限性是仍假设所有传感器具有相同的观测阵. 本文去掉这一限制性假设, 对带不同观测阵和带相关观测噪声的多传感器系统用不同于文献 [6] 的加权最小二乘 (Weighted least squares, WLS)^[7] 法提出了两种新的加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法, 并用稳态信息滤波器证明了它们功能等价于集中式稳态 Kalman 滤波算法, 因而具有渐近全局最优性^[8]. 通常, 加权观测融合算法的观测阵维数要明显低于集

收稿日期 2007-05-29 收修改稿日期 2007-09-05
Received May 29, 2007; in received form September 5, 2007
国家自然科学基金 (60374026), 黑龙江大学自动控制重点实验室项目 (F04-01) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60374026), Automatic Control Key Laboratory of Heilongjiang University (F04-01)
1. 黑龙江大学自动化系 哈尔滨 150080
1. Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00233

中式融合算法观测阵维数, 因而它们可明显减少计算负担, 便于实时应用. 本文还给出了它们在多通道自回归滑动平均 (Autoregressive moving average, ARMA) 信号观测融合滤波与反卷积中的应用.

1 带不同观测阵和带相关噪声的两种加权观测融合算法

考虑带多传感器线性离散时不变随机控制系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \Gamma \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = H_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, \dots, L \quad (2)$$

其中 t 为离散时间, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$ 为控制, $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 为第 i 传感器的观测, $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 为观测噪声, $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$ 为输入白噪声. Φ, B, Γ 和 H_i 是已知的适当维数常阵.

假设 1. $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{v}_i(t)$ ($i = 1, \dots, L$) 为零均值不相关白噪声, 而 $\mathbf{v}_i(t)$ 和 $\mathbf{v}_j(t)$ ($i \neq j$) 是相关观测噪声, 则

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T(k) & \mathbf{v}_j^T(k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R_{ij} \end{bmatrix} \delta_{tk} \quad (3)$$

其中 \mathbf{E} 为数学期望, $\delta_{tt} = 1, \delta_{tk} = 0$ ($t \neq k$).

假设 2. 各传感器带不同观测阵 H_i ($i = 1, \dots, L$), 假设 H_i 有公共的右因子 $m \times n$ 矩阵 $H^{(1)}$, 即

$$H_i = M_i H^{(1)}, \quad i = 1, \dots, L \quad (4)$$

且假设矩阵 $M^{(0)T} R^{(0)-1} M^{(0)}$ 是非奇异的, 或假设矩阵 $H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)}$ 是非奇异的, 其中定义

$$M^{(0)} = [M_1^T, \dots, M_L^T]^T \quad (5)$$

$$H^{(0)} = [H_1^T, \dots, H_L^T]^T \quad (6)$$

$$R^{(0)} = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1L} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{L1} & \dots & R_{LL} \end{bmatrix} \quad (7)$$

假设 3. $(\Phi, H^{(0)})$ 为完全可观对, $(\Phi, H^{(1)})$ 为完全可观对, (Φ, Γ) 为完全可控对.

1.1 集中式观测融合稳态 Kalman 滤波算法

合并式 (2) 的 L 个观测方程可得集中式观测融合方程

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) = H^{(0)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^{(0)}(t) \quad (8)$$

其中 $H^{(0)}$ 由式 (6) 定义, 且定义

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) = [\mathbf{y}_1^T(t), \dots, \mathbf{y}_L^T(t)]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{v}^{(0)}(t) = [\mathbf{v}_1^T(t), \dots, \mathbf{v}_L^T(t)]^T \quad (10)$$

易知观测白噪声 $\mathbf{v}^{(0)}(t)$ 的方差阵 $R^{(0)}$ 由式 (7) 给出. 对系统式 (1) 和式 (8) 应用标准稳态 Kalman 滤波算法^[9] 可得集中式融合稳态 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t|t)$ 和预报器 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t+1|t)$ 及其相应的稳态误差方差阵 $P^{(0)}$ 和 $\Sigma^{(0)}$.

1.2 加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (I)

由式 (4) 和 (8) 有集中式观测融合方程

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) = M^{(0)} H^{(1)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^{(0)}(t) \quad (11)$$

于是有 $H^{(1)} \mathbf{x}(t)$ 的加权最小二乘 (Gauss-Markov) 估值为^[7]

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = (M^{(0)T} R^{(0)-1} M^{(0)})^{-1} M^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) \quad (12)$$

其中定义 $R^{(0)-1} = (R^{(0)})^{-1}$, 故有新的融合观测方程

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = H^{(1)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^{(1)}(t) \quad (13)$$

将式 (11) 代入式 (12), 引出式 (13), 且有

$$\mathbf{v}^{(1)}(t) = (M^{(0)T} R^{(0)-1} M^{(0)})^{-1} M^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{v}^{(0)}(t) \quad (14)$$

于是有观测白噪声 $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ 的方差阵为

$$R^{(1)} = (M^{(0)T} R^{(0)-1} M^{(0)})^{-1} \quad (15)$$

由 $\mathbf{y}^{(0)}(t)$ 的定义和式 (12) 引出 $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ 是 $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_L(t)$ 的加权和. 对加权观测融合系统式 (1) 和 (13) 应用标准稳态 Kalman 滤波可得加权观测融合 Kalman 滤波算法 (I), 记相应的稳态 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t)$ 和预报器 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t+1|t)$ 的稳态误差方差阵分别为 $P^{(1)}$ 和 $\Sigma^{(1)}$.

1.3 加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (II)

式 (8) 可看成是 $\mathbf{x}(t)$ 的观测模型, 于是应用 WLS 法有 $\mathbf{x}(t)$ 的 Gauss-Markov 估值为

$$\mathbf{y}^{(II)}(t) = (H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)})^{-1} H^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) \quad (16)$$

由式 (9) 可知 $\mathbf{y}^{(II)}(t)$ 是 $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_L(t)$ 的加权和, 于是有 $\mathbf{x}(t)$ 的加权观测融合模型

$$\mathbf{y}^{(II)}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^{(II)}(t) \quad (17)$$

将式 (8) 代入式 (16), 引出式 (17), 且有

$$\mathbf{v}^{(II)}(t) = (H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)})^{-1} H^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{v}^{(0)}(t) \quad (18)$$

故有白噪声 $\mathbf{v}^{(II)}(t)$ 的方差阵为

$$R^{(II)} = (H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)})^{-1} \quad (19)$$

式 (17) 可写成融合观测方程

$$\mathbf{y}^{(II)}(t) = H^{(II)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^{(II)}(t) \quad (20)$$

其中

$$H^{(II)} = I_n \quad (21)$$

对观测融合系统式 (1) 和 (20) 应用标准稳态 Kalman 滤波算法可得加权观测融合 Kalman 滤波算法 (II), 记相应的稳态 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}^{(II)}(t|t)$ 和预报器 $\hat{\mathbf{x}}^{(II)}(t+1|t)$ 的稳态误差方差阵分别为 $P^{(II)}$ 和 $\Sigma^{(II)}$.

2 两种加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法的功能等价性和全局最优性

集中式观测融合系统式 (1) 和 (8), 加权观测融合系统式 (1) 和 (13) 及式 (1) 和 (20) 的稳态 Kalman 滤波器有稳态信息滤波器形式^[2,7]

$$\hat{\mathbf{z}}^{(i)}(t|t-1) = \Sigma^{(i)-1} \Phi P^{(i)} \hat{\mathbf{z}}^{(i)}(t-1|t-1) + \Sigma^{(i)-1} B \mathbf{u}(t), \quad i = 0, \text{I, II} \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{z}}^{(i)}(t|t) = \hat{\mathbf{z}}^{(i)}(t|t-1) + H^{(i)T} R^{(i)-1} \mathbf{y}^{(i)}(t), \quad i = 0, \text{I, II} \quad (23)$$

$$\Sigma^{(i)} = \Phi P^{(i)} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad i = 0, \text{I, II} \quad (24)$$

$$P^{(i)-1} = \Sigma^{(i)-1} + H^{(i)T} R^{(i)-1} H^{(i)}, \quad i = 0, \text{I, II} \quad (25)$$

其中定义 $\Sigma^{(i)-1}$ 和 $P^{(i)-1}$ 为信息矩阵, 定义 $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}(t|t-1) = \Sigma^{(i)-1} \hat{\mathbf{x}}^{(i)}(t|t-1)$ 和 $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}(t|t) = P^{(i)-1} \hat{\mathbf{x}}^{(i)}(t|t)$ 分别为信息状态预报和滤波向量.

定理 1 (两种加权观测融合算法的功能等价性). 多传感器系统式 (1) 和 (2) 在假设 1~3 下, 两种加权观测融合稳态 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}(t|t)$ 和预报器 $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}(t+1|t)$ ($i = \text{I, II}$), 与集中式融合稳态 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t|t)$ 和预报器 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t+1|t)$ 是功能等价的, 即它们分别是数值上恒等的, 即

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}^{(I)}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}^{(II)}(t|t), \quad \forall t \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t+1|t) = \hat{\mathbf{x}}^{(I)}(t+1|t) = \hat{\mathbf{x}}^{(II)}(t+1|t), \quad \forall t \quad (27)$$

且有相同的误差方差阵

$$P^{(0)} = P^{(I)} = P^{(II)}, \quad \Sigma^{(0)} = \Sigma^{(I)} = \Sigma^{(II)} \quad (28)$$

假如它们取相同的初值

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(0|0) = \hat{\mathbf{x}}^{(I)}(0|0) = \hat{\mathbf{x}}^{(II)}(0|0) \quad (29)$$

证明. 由式 (24) 和 (25) 看到, 为了证明式 (28), 只要验证

$$H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)} = H^{(I)T} R^{(I)-1} H^{(I)} = H^{(II)T} R^{(II)-1} H^{(II)} \quad (30)$$

在式 (28) 成立下, 由式 (22) 和 (23) 看到, 为了证明式 (26) 和 (27), 只要验证

$$H^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) = H^{(I)T} R^{(I)-1} \mathbf{y}^{(I)}(t) = H^{(II)T} R^{(II)-1} \mathbf{y}^{(II)}(t) \quad (31)$$

事实上由式 (11)、(15)、(19) 和 (21) 有

$$H^{(I)T} R^{(I)-1} H^{(I)} = H^{(I)T} M^{(0)T} R^{(0)-1} \times M^{(0)} H^{(I)} = H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)} \quad (32)$$

$$H^{(II)T} R^{(II)-1} H^{(II)} = I_n H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)} I_n = H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)} \quad (33)$$

由此证明了式 (30), 从而证明了式 (28). 类似地, 由式 (12) 和 (16) 有

$$H^{(I)T} R^{(I)-1} \mathbf{y}^{(I)}(t) = H^{(I)T} M^{(0)T} R^{(0)-1} M^{(0)} \times (M^{(0)T} R^{(0)-1} M^{(0)})^{-1} M^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) = H^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) \quad (34)$$

$$H^{(II)T} R^{(II)-1} \mathbf{y}^{(II)}(t) = I_n H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)} \times (H^{(0)T} R^{(0)-1} H^{(0)})^{-1} H^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) = H^{(0)T} R^{(0)-1} \mathbf{y}^{(0)}(t) \quad (35)$$

由此证明了式 (31), 从而证明了式 (26) 和 (27). \square

定理 2 (两种加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法的渐近全局最优性). 多传感器系统式 (1) 和 (2) 在假设 1~3 下, 两种加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法是渐近全局最优的.

证明. 对集中式融合系统式 (1) 和 (8), 取初始时刻 $t_0 = 0$, 由射影理论^[7], 在线性最小方差最优估计准则下, 它的标准 Kalman 滤波器是全局最优时变 Kalman 滤波器. 因为它利用了各传感器提供的全部观测信息, 因而是全局最优的, 且滤波器增益是时变的, 故它又是时变 Kalman 滤波器. 取 $t_0 = 0$, 同采用集中式稳态 Kalman 滤波器 (即带稳态滤波增益的次优 Kalman 滤波器) 相比, 文献 [8] 的定理 6.3 证明了: 两者之差在均方收敛意义下按指数律收敛于零, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时系统式 (1) 和 (8) 的集中式稳态 Kalman 滤波器渐近于全局最优 Kalman 时变滤波器, 因而具有渐近全局最优性. 定理 1 证明了在相同初值下, 两种加权观测融合稳态 Kalman 滤

波器在数值上恒同于相应的集中式稳态 Kalman 滤波器, 因而它们也是渐近全局最优的. 类似地, 两种加权观测融合稳态 Kalman 预报器也具有渐近全局最优性. \square

3 应用于多通道 ARMA 信号观测融合滤波与反卷积

3.1 多通道 ARMA 信号观测融合滤波

考虑多传感器多通道 ARMA 信号 $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{R}^m$,

$$A(q^{-1})\mathbf{s}(t) = C(q^{-1})\mathbf{w}(t) \quad (36)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{v}_i(t) \quad (37)$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{e}_i(t), \quad i, \dots, L \quad (38)$$

其中 $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为待估信号, $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 为第 i 传感器观测, $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 为观测噪声, 它由公共干扰噪声 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 和传感器噪声 $\mathbf{e}_i(t)$ 相加合成. 假设 $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$, $\boldsymbol{\xi}(t)$ 和 $\mathbf{e}_i(t)$ 是零均值, 且方差阵分别为 Q_w , Q_ξ 和 Q_{e_i} 的相互独立的白噪声. 记白噪声 $\mathbf{v}_i(t)$ 的方差阵为 R_{ii} , $\mathbf{v}_i(t)$ 和 $\mathbf{v}_j(t)$ 的互协方差阵为 R_{ij} , 则有 $R_{ii} = Q_\xi + Q_{e_i}$, $R_{ij} = Q_\xi$ ($i \neq j$), 即观测 $\mathbf{y}_i(t)$ (i, \dots, L) 带相关观测噪声. q^{-1} 为单位滞后算子, $A(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 是 q^{-1} 的多项式矩阵, 形如 $X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_{n_x}q^{-n_x}$, $X_{n_x} \neq 0$, $X_j = 0$ ($j > n_x$), 且 $A_0 = I_m$, $C_0 = 0$, $n_a \geq n_c$.

定理 3. 带相关观测噪声的多传感器 ARMA 信号式 (36)~(38) 的渐近全局最优稳态融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}(t|t)$ 在数值上恒同于基于如下加权观测融合系统

$$A(q^{-1})\mathbf{s}(t) = C(q^{-1})\mathbf{w}(t) \quad (39)$$

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{v}^{(1)}(t) \quad (40)$$

的稳态最优滤波器 $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}(t|t)$, 其中 $\mathbf{y}^{(1)}(t)$, $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ 及其方差阵 $R^{(1)}$ 各由式 (12)、(14) 和 (15) 定义, 且 $M^{(0)} = [I_m, \dots, I_m]^T$, $R^{(0)}$ 由式 (7) 定义.

证明. 式 (36) 和 (37) 有等价的块伴随状态空间模型^[9]

$$\mathbf{x}(t+1) = \bar{A}\mathbf{x}(t) + \bar{C}\mathbf{w}(t) \quad (41)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = H\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, \dots, L \quad (42)$$

$$\mathbf{s}(t) = H\mathbf{x}(t), \quad H = [I_m, 0, \dots, 0] \quad (43)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -A_1 & & & \\ \vdots & I_{m(n_a-1)} & & \\ -A_{n_a} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{n_a} \end{bmatrix} \quad (44)$$

其中 (\bar{A}, H) 称为块伴随形. 因多传感器有相同观测阵 H , 应用算法 (I), 有 $M_i = I_m$, $H_i = H$, 且应用定理 1, 系统式 (41) 和 (42) 的集中式渐近全局最优稳态融合器 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t|t)$ 等价于系统式 (41) 和融合观测方程

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = H\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^{(1)}(t) \quad (45)$$

的稳态最优融合器 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t)$, 其中 $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ 和 $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ 的定义相同于在式 (40) 中的定义. 从而由式 (43) 有信号 $\mathbf{s}(t)$ 的渐近全局最优稳态融合估计 $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}(t|t) = H\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t)$. 注意系统式 (41) 和 (45) 具有块伴随形, 故其等价于系统式 (39) 和 (40). 故问题归结为求系统式 (39) 和 (40) 的稳态最优滤波器 $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}(t|t)$, 这可用 Kalman 滤波方法和现代时间序列分析方法解决问题^[9]. \square

3.2 多通道 ARMA 信号观测融合反卷积滤波

考虑多通道多传感器反卷积系统

$$\mathbf{y}_i(t) = P^{-1}(q^{-1})B(q^{-1})\mathbf{s}(t) + \mathbf{v}_i(t) \quad (46)$$

$$A(q^{-1})\mathbf{s}(t) = C(q^{-1})\mathbf{w}(t) \quad (47)$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{e}_i(t), \quad i = 1, \dots, L \quad (48)$$

其中多通道 ARMA 信号 $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为待估输入信号, $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 为第 i 传感器输出 (观测) 信号, $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 为观测噪声, 它由公共干扰噪声 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 和白噪声 $\mathbf{e}_i(t)$ 相加合成. 假设 $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$, $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{e}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 是零均值, 且方差阵分别为 Q , Q_ξ 和 Q_{e_i} 的相互独立的白噪声. $P(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $A(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 是 q^{-1} 的多项式矩阵, 且系数阵 $P_0 = I_m$, $B_0 = 0$, $C_0 = 0$, $A_0 = I_n$. 问题归结为由观测 $\mathbf{y}_i(t)$ ($i = 1, \dots, L$) 求输入 $\mathbf{s}(t)$ 的观测融合反卷积滤波器 $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}(t|t)$.

式 (47) 有块伴随状态空间模型

$$\boldsymbol{\alpha}(t+1) = \bar{A}\boldsymbol{\alpha}(t) + \bar{C}\mathbf{w}(t) \quad (49)$$

$$\mathbf{s}(t) = \bar{H}_1\boldsymbol{\alpha}(t) \quad (50)$$

由式 (46) 有块伴随状态空间模型

$$\boldsymbol{\beta}(t+1) = \bar{P}\boldsymbol{\beta}(t) + \bar{B}\mathbf{s}(t) \quad (51)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \bar{H}_2\boldsymbol{\beta}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, \dots, L \quad (52)$$

定义

$$H = [0, \bar{H}_2], \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(t) \\ \boldsymbol{\beta}(t) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ \bar{B}\bar{H}_1 & \bar{P} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

则有带相关观测噪声 $\mathbf{v}_i(t)$ 的增广系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + \Gamma \mathbf{w}(t) \tag{54}$$

$$\mathbf{y}_i(t) = H \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), i = 1, \dots, L \tag{55}$$

$$\mathbf{s}(t) = C \mathbf{x}(t), C = [I_n, 0] \tag{56}$$

其中 $\mathbf{v}_i(t)$ 与 $\mathbf{v}_j(t)$ 的互协方差为 $R_{ij} = Q_\xi + Q_{e_i} \delta_{ij}$. 于是由式 (56) 可以将问题转化为用定理 1 求状态 $\mathbf{x}(t)$ 的加权观测融合 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t)$, 从而 $\mathbf{s}(t)$ 的观测融合反卷积滤波器为 $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}(t|t) = C \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t)$.

注 1. 同 ARMA 信号分布式融合滤波器相比^[10], 文献 [10] 的分布式信号融合器是次优的, 且要求计算 L 个局部滤波器和最优加权. 用算法 (I) 给出的 ARMA 信号加权观测融合滤波器和反卷积滤波器的优点是: 它具有渐近全局最优性, 且可明显减少计算负担.

注 2. 通常加权观测融合系统观测向量的维数明显小于集中式融合系统观测向量的维数, 因而采用加权观测融合算法可显著减少计算负担, 便于实时应用. 这可以在第 4 节的两个仿真例子中得到验证.

注 3. 文献 [6] 在各传感器具有相同观测阵假设下提出了一种相关观测融合 Kalman 滤波器. 它可看作是算法 (I) 的特例, 即 $M_i = I_m, H^{(1)} = H$. 算法 (I) 也包括文献 [2] 中带相同观测阵和不相关观测噪声的情况, 即 $M_i = I_{m_i}, H^{(1)} = H, R_{ij} = 0 (i \neq j)$.

注 4. 本文算法可平行推广到非稳态相关观测融合 Kalman 滤波算法, 所得加权观测融合算法是全局最优的.

4 数值仿真例子

例 1. 考虑带相关观测噪声的 7 传感器跟踪系

统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + \Gamma \mathbf{w}(t) \tag{57}$$

$$\mathbf{y}_i(t) = H_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), i = 1, \dots, 7 \tag{58}$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) + e_{i1}(t) \\ \xi(t) + e_{i2}(t) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 5, \tag{59}$$

$$v_i(t) = \xi(t) + e_i(t), i = 6, 7$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 & 0.5 T_0^2 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = H^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{60}$$

其中 $T_0 = 0.5$ 为采样周期, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T, w(t), \xi(t), e_{ij}(t)$ 和 $e_i(t)$ 是零均值, 且方差分别为 $Q_w = 1$ 和 $\sigma_\xi^2 = 1, \sigma_{e_{i1}}^2 = 1 + 0.5i, \sigma_{e_{i2}}^2 = 0.25 + 0.8i (i = 1, \dots, 5), \sigma_{e_6}^2 = 1, \sigma_{e_7}^2 = 2.25$ 的独立的高斯白噪声, $y_i(t)$ 为第 i 个传感器的观测, $v_i(t)$ 为观测噪声, 问题是验证集中式融合和加权观测融合稳态 Kalman 滤波器的等价性.

本例根据假设 2, 显然有 $M_1 = \dots = M_5 = I_2, M_6 = [1, 0], M_7 = [0, 1]$, 应用集中式观测融合稳态 Kalman 滤波算法和加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (I) 可以得到其 Matlab 仿真结果如表 1 和表 2 所示. 由表 1 可以看出 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t|t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t)$ 在指定时刻都是相等的, 由表 2 可以看出稳态误差方差阵也是完全相等的, 从而验证了两种算法的功能等价性. 另一方面采用集中式观测融合稳态 Kalman 滤波算法时融合观测 $\mathbf{y}^{(0)}(t)$ 的维数为 12×1 , 而采用加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (I) 时融合观

表 1 集中式融合算法和加权观测融合算法 (I) 的稳态 Kalman 滤波器的等价性

Table 1 The equivalence between the steady-state Kalman filters for the centralized fusion algorithm and weighted measurement fusion algorithms (I)

t	50	200	500
$\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t t)$	$\begin{bmatrix} -337.084\ 804\ 361\ 834 \\ -35.489\ 684\ 266\ 055\ 9 \\ -2.138\ 738\ 792\ 388\ 81 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -17\ 937.634\ 086\ 495\ 1 \\ -415.733\ 626\ 663\ 509 \\ -3.244\ 524\ 599\ 695\ 36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -139\ 306.520\ 758\ 907 \\ -1\ 245.829\ 514\ 522\ 93 \\ -3.038\ 600\ 681\ 105\ 05 \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t t)$	$\begin{bmatrix} -337.084\ 804\ 361\ 834 \\ -35.489\ 684\ 266\ 055\ 9 \\ -2.138\ 738\ 792\ 388\ 81 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -17\ 937.634\ 086\ 495\ 1 \\ -415.733\ 626\ 663\ 509 \\ -3.244\ 524\ 599\ 695\ 36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -139\ 306.520\ 758\ 907 \\ -1\ 245.829\ 514\ 522\ 93 \\ -3.038\ 600\ 681\ 105\ 05 \end{bmatrix}$

表 2 集中式融合算法和加权观测融合算法 (I) 的稳态 Kalman 滤波器的误差方差的等价性

Table 2 The equivalence between error variances of the steady-state Kalman filters for the centralized fusion algorithm and weighted measurement fusion algorithms (I)

$P^{(0)}$	$\begin{bmatrix} 0.726\ 827\ 926\ 847\ 59 & 0.578\ 237\ 335\ 281\ 69 & 0.283\ 844\ 771\ 158\ 18 \\ 0.578\ 237\ 335\ 281\ 69 & 0.703\ 433\ 481\ 584\ 53 & 0.532\ 735\ 307\ 690\ 41 \\ 0.283\ 844\ 771\ 158\ 18 & 0.532\ 735\ 307\ 690\ 41 & 1.107\ 059\ 948\ 786\ 66 \end{bmatrix}$
$P^{(I)}$	$\begin{bmatrix} 0.726\ 827\ 926\ 847\ 59 & 0.578\ 237\ 335\ 281\ 69 & 0.283\ 844\ 771\ 158\ 18 \\ 0.578\ 237\ 335\ 281\ 69 & 0.703\ 433\ 481\ 584\ 53 & 0.532\ 735\ 307\ 690\ 41 \\ 0.283\ 844\ 771\ 158\ 18 & 0.532\ 735\ 307\ 690\ 41 & 1.107\ 059\ 948\ 786\ 66 \end{bmatrix}$

表 3 集中式融合算法和加权观测融合算法 (II) 的稳态 Kalman 预报器的等价性

Table 3 The equivalence between the steady-state Kalman predictors for the centralized fusion algorithm and weighted measurement fusion algorithms (II)

t	50	200	500
$\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t+1 t)$	$\begin{bmatrix} -24.555\ 557\ 832\ 101\ 3 \\ -1.954\ 003\ 111\ 594\ 35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -279.442\ 599\ 151\ 762 \\ -2.161\ 797\ 162\ 221\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -836.601\ 449\ 590\ 392 \\ -2.911\ 440\ 017\ 841\ 49 \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{x}}^{(II)}(t+1 t)$	$\begin{bmatrix} -24.555\ 557\ 832\ 101\ 3 \\ -1.954\ 003\ 111\ 594\ 35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -279.442\ 599\ 151\ 762 \\ -2.161\ 797\ 162\ 221\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -836.601\ 449\ 590\ 392 \\ -2.911\ 440\ 017\ 841\ 49 \end{bmatrix}$

表 4 集中式融合算法和加权观测融合算法 (II) 的稳态 Kalman 预报器的误差方差的等价性

Table 4 The equivalence between error variances of the steady-state Kalman predictors for the centralized fusion algorithm and weighted measurement fusion algorithms (II)

$\Sigma^{(0)}$	$\begin{bmatrix} 0.815\ 408\ 075\ 422\ 71 & 0.537\ 914\ 051\ 741\ 55 \\ 0.537\ 914\ 051\ 741\ 55 & 0.615\ 208\ 789\ 310\ 69 \end{bmatrix}$
$\Sigma^{(II)}$	$\begin{bmatrix} 0.815\ 408\ 075\ 422\ 71 & 0.537\ 914\ 051\ 741\ 55 \\ 0.537\ 914\ 051\ 741\ 55 & 0.615\ 208\ 789\ 310\ 69 \end{bmatrix}$

测 $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ 的维数为 2×1 , 从而可减少计算负担. 另外, 从 Matlab 仿真时间也可以看出加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (I) 可以减小计算负担, 因为采用集中式观测融合稳态 Kalman 滤波算法 500 步的仿真时间是 0.219s, 而采用加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (I) 500 步的仿真时间是 0.188s.

例 2. 考虑带相关观测噪声的 10 传感器跟踪系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + \Gamma \mathbf{w}(t) \quad (61)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = H_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t) \quad (62)$$

$$v_i(t) = \xi(t) + e_i(t), i = 1, \dots, 10 \quad (63)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5 T_0^2 \\ T_0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \dots = H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_9 = H_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

其中 $T_0 = 0.5$ 为采样周期, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $w(t)$ 各为在采样时刻 tT_0 处的运动目标的位置、速度和加速度, $w(t)$, $\xi(t)$ 和 $e_i(t)$ 是零均值, 且方差分别为 $Q_w = 0.81$ 和 $\sigma_\xi^2 = 0.64$, $\sigma_{e_i}^2 = 1 + 0.2i$ ($i = 1, \dots, 10$) 的独立的高斯白噪声, $y_i(t)$ 为第 i 个传感器对位置或速度的观测, $v_i(t)$ 为观测噪声, 问题是验证集中式融合和加权观测融合稳态 Kalman 预报器的等价性.

本例根据假设 2, 应用集中式观测融合稳态 Kalman 滤波算法和加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (II) 可以得到其 Matlab 仿真结果如表 3 和表 4 所示. 由表 3 可以看出 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}(t+1|t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}^{(II)}(t+1|t)$ 在指定时刻都是相等的, 且由表 4 可看出稳态误差方差阵也是完全相等的, 从而验证了两种算法的功能等价性. 另一方面采用集中式观测融

合稳态 Kalman 滤波算法时融合观测 $\mathbf{y}^{(0)}(t)$ 的维数为 10×1 , 而采用加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (II) 时融合观测 $\mathbf{y}^{(II)}(t)$ 的维数为 2×1 , 从而可减少计算负担。从 Matlab 仿真时间也可以看出加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (II) 可以减小计算负担, 因为采用集中式观测融合稳态 Kalman 滤波算法 500 步的仿真时间是 0.187 s, 而采用加权观测融合稳态 Kalman 滤波算法 (II) 500 步的仿真时间是 0.172 s。

5 结论

1) 本文用 WLS 方法提出了两种加权观测融合 Kalman 滤波算法, 可处理带相关观测噪声和带不同观测阵的多传感器系统。它们可将文献 [2, 6] 的结果作为特例。用信息滤波器证明了它们是功能等价于集中式观测融合算法, 因而具有渐近全局最优性。两个仿真例子验证了其功能等价性。

2) 本文结果可应用于多通道 ARMA 信号加权观测融合滤波与反卷积。

3) 当集中式观测融合系统的观测向量的维数明显大于加权观测融合系统的观测向量的维数时, 采用加权观测融合 Kalman 滤波算法可明显减少计算负担。

References

- Han Chong-Zhao, Zhu Hong-Yan, Duan Zhan-Sheng. *Multisource Information Fusion*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. 1-13
(韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合. 北京: 清华大学出版社, 2006. 1-13)
- Gao Q, Harris C J. Comparison of two measurement fusion methods for Kalman-filter-based multisensor data fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, **37**(1): 273-279
- Zhu Y M, You Z S, Zhao J, Zhang K S, Li X R. The optimality for the distributed Kalman filtering fusion with feedback. *Automatica*, 2001, **37**(9): 1489-1493
- Deng Z L, Gao Y, Mao L, Li Y, Hao G. New approach to information fusion steady-state Kalman filtering. *Automatica*, 2005, **41**(10): 1695-1707
- Roy S, Iltis R A. Decentralized linear estimation in correlated measurement noise. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1991, **27**(6): 939-941
- Ou Lian-Jun, Qiu Hong-Zhuan, Zhang Hong-Yue. Multi-fusion algorithm and optimality. *Information and Control*, 2005, **34**(6): 690-695
(欧连军, 邱红专, 张洪钺. 多个相关测量的融合算法及其最优性. 信息与控制, 2005, **34**(6): 690-695)
- Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. *Linear Estimation*. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. 44-99
- Chui C K, Chen G R. *Kalman Filtering with Real-time Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 93-95

9 Deng Zi-Li. *Optimality Estimation Theory with Applications, Modeling, Filtering and Information Fusion Estimation*. Harbin: Harbin Institute of Technology University Press, 2005. 1-115

(邓自立. 最优状态估计理论及其应用 — 建模滤波信息融合估计. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005. 1-115)

10 Deng Zi-Li, Gao Yuan, Li Yun, Wang Xin. Multisensor information fusion steady-state optimal Wiener deconvolution filter. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2005, **27**(4): 670-672

(邓自立, 高媛, 李云, 王欣. 多传感器信息融合稳态最优 Wiener 反卷积滤波器. 电子与信息学报, 2005, **27**(4): 670-672)

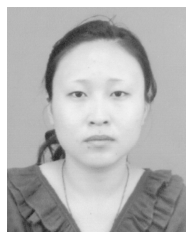


冉陈键 黑龙江大学硕士研究生。主要研究方向为状态估计, 多传感器信息融合和 Kalman 滤波。

E-mail: ranchj0927@hotmail.com

(RAN Chen-Jian Master student at Heilongjiang University. Her research interest covers state estimation, multisensor information fusion, and

Kalman filtering.)



惠玉松 黑龙江大学硕士研究生。主要研究方向为状态估计, 多传感器信息融合和 Kalman 滤波。

E-mail: lihuaimin_2007@sohu.com

(HUI Yu-Song Master student at Heilongjiang University. Her research interest covers state estimation, multi-sensor information fusion, and Kalman

filtering.)



顾磊 黑龙江大学硕士研究生。主要研究方向为状态估计, 多传感器信息融合和 Kalman 滤波。

E-mail: gulei2005@163.com

(GU Lei Master student at Heilongjiang University. His research interest covers state estimation, multisensor information fusion, and Kalman

filtering.)



邓自立 黑龙江大学自动化系教授。主要研究方向为状态估计, 时间序列分析, 信息融合滤波。本文通信作者。

E-mail: dzl@hlju.edu.cn

(DENG Zi-Li Professor at Department of Automation, Heilongjiang University. His research interest covers state estimation, time series analysis,

and information fusion filtering. Corresponding author of this paper.)