

# 基于依参数分离算子的鲁棒可靠滤波器设计

欧阳高翔<sup>1</sup> 倪茂林<sup>1</sup> 孙承启<sup>1</sup>

**摘要** 针对凸面体不确定系统并考虑传感器发生故障的情况, 基于二次型分离算子进行了鲁棒可靠滤波器设计的研究. 利用不确定系统鲁棒镇定时的拓扑解释, 采用分离算子将不含故障描述的系统矩阵与故障描述矩阵进行解耦, 从而获得对故障不敏感的鲁棒可靠滤波器. 为进一步降低设计的保守性, 文中还给出了一种依参数分离算子的滤波器存在条件, 并将滤波器设计转化为线性矩阵不等式 (LMIs) 表述的凸优化问题. 仿真实例验证了文中所提出设计方法的有效性.

**关键词** 鲁棒可靠滤波器, 拓扑分离, 依参数分离算子, 线性矩阵不等式  
**中图分类号** TP202.1

## Parameter-dependent Separator-based Robust Reliable Filter Design

OUYANG Gao-Xiang<sup>1</sup> NI Mao-Lin<sup>1</sup> SUN Cheng-Qi<sup>1</sup>

**Abstract** Based on a quadratic separator, a robust reliable filter design method for a class of systems with polytopic type uncertainty is presented against sensor failures. By making use of interpretation of system robust stabilization from the topological separation viewpoint, the matrix meaning plant can be decoupled from the matrix expressing faults via the quadratic separator, and a satisfactory robust reliable filter, which is less sensitive to the sensor failures, can be obtained. In order to reduce the design conservativeness, a condition for the existence of a parameter-dependent separator is proposed, and further the filter design can be converted into the optimization problem involving linear matrix inequalities (LMIs). An example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Robust reliable filter, topological separation, parameter-dependent separator, linear matrix inequalities

实际系统中通常都会含有不确定参数, 它们可能是随时间变化或未确知的, 与此同时, 复杂多变的外界环境和长时间的运行工作都可能会诱发诸如传感器等部件故障. 故障的产生会导致滤波器设计性能不同程度的损害, 轻者可能会偏离实际要求的估计精度, 严重的甚至会造成滤波器信号的发散. 上述现象对许多工程实际问题, 如航空航天器控制, 是非常不利的. 为此, 很有必要针对参数不确定系统进行鲁棒可靠滤波器的研究设计, 使其在故障发生时不仅能够保证闭环系统渐近稳定, 而且原有的设计性能指标也不会有明显降低.

对系统可靠性的考虑始于完整性控制概念的提出, 1985 年 Shimemura 等<sup>[1]</sup>就对部件失效情况下系统完整性问题进行了研究. 在此基础上, 文献 [2-3] 分别采用一种变形的 Riccati 方程和 Lyapunov 方程对上述问题进行了研究, 其结果不仅能保证系统在故障情况下具有容错能力, 而且在正常工作条件下也具有良好的动态特性和最优性. 目前,

随着鲁棒控制理论的发展和高效数值计算工具——线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的成功运用, 系统可靠性设计不再单纯地只考虑实现故障稳定, 而且更加关心故障发生时如何维护可接受的设计性能. 另外, 关于描述传感器故障的数学模型, 已由连续模型<sup>[4]</sup>取代了过去的离散模型<sup>[5]</sup>, 它能更好地反映真实故障的发生情况. 文献 [6] 采用一种迭代的 LMI 算法对一类确定性连续系统进行具有保性能方差的滤波器设计, 但该算法的收敛性和收敛速度对初始起点的选取都比较敏感, 使得它的实际应用受到一定的局限. 文献 [7] 针对一类范数有界的不确定连续系统进行可靠滤波器设计, 为了能够数值求解, 该文对故障采用范数逼近而忽略了故障模型的结构信息, 另外在对原问题进行凸化时采用的是有损 S-procedure<sup>[8]</sup>, 由此导出的滤波器存在条件是一个充分条件, 因此具有一定的保守性. 另外, 我们注意到目前关于凸面体不确定连续系统的鲁棒可靠滤波器设计问题的研究成果还未见报道.

本文针对凸面体不确定连续系统, 同时考虑在传感器通道内发生故障的情况, 设计了一种适用范围更广和鲁棒性更强的可靠滤波器. 基于描述传感器连续故障的数学模型及其特殊的结构形式, 而将传感器连续故障等效为范数有界的结构化不确定项, 本文把与故障描述无关的不确定系统视为标称系统. 于是在鲁棒可靠滤波器设计中, 利用不确定性系统在鲁棒镇定标称系统的图与不确定性的逆图在拓

收稿日期 2007-05-25 收修改稿日期 2007-09-05  
Received May 25, 2007; in revised form September 5, 2007  
国家自然科学基金 (60774002, 90405017) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60774002, 90405017)  
1. 北京控制工程研究所空间智能控制技术国家级重点实验室 北京 100080  
1. National Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00225

扑空间上存在分离的特性<sup>[9]</sup>, 通过二次型分离算子将故障与标称不确定系统进行参数空间上的解耦, 在此基础上采用凸胞模型对故障进行刻画, 达到利用其结构信息的目的. 此外, 上述分离算子由 LMI 间接描述, 可通过数值工具包<sup>[10]</sup> 计算获得. 在滤波器设计分析过程中由于采用了无损 S-procedure 而没有引入保守性; 在综合阶段为降低因分离算子的结构约束而带来的保守性, 还将依参数 Lyapunov 函数的思想<sup>[11]</sup> 推广到分离算子中, 即采用依参数分离算子的滤波器实现, 以增加系统设计的自由度.

## 1 问题描述和准备

考虑如下带有不确定参数  $\theta$  的连续系统<sup>[7, 12]</sup>

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) & B \\ C & D \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是系统状态变量,  $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^m$  是系统测量信号,  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{R}^q$  是系统所有外部输入信号,  $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbf{R}^l$  是系统估计信号. 系统参数矩阵  $A$  是包含有变参数  $\theta$  的不确定性矩阵. 如果该不确定性矩阵  $A$  可由凸胞集合  $\mathcal{A}$  中的顶点线性组合表示, 即

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i, \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i = 1 \right\} \quad (2)$$

其中  $A_i$  是凸胞集合  $\mathcal{A}$  中的顶点,  $N$  为顶点个数, 则把满足式 (2) 的不确定系统 (1) 称为凸面体不确定系统<sup>[8]</sup>.

在进行鲁棒可靠滤波器设计之前, 首先参照文献 [6] 和 [12] 中的说明给出如下假设:

1) 所考虑的系统是一个稳定系统, 即系统 (1) 中的参数矩阵  $A(\theta)$  是 Hurwitz 的;

2) 可靠滤波器的阶数和系统阶数相等.

另外, 需要设计的可靠滤波器形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中  $A_f, B_f, C_f, D_f$  是要设计的滤波器增益阵. 将滤波器 (3) 和不确定系统 (1) 合写为

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \\ \tilde{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{cl} & \tilde{B}_{cl} \\ \tilde{C}_{cl} & \tilde{D}_{cl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中  $\tilde{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{x}^T \hat{\boldsymbol{x}}^T]^T$ ,  $\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}$ , 而闭环传递函数的状

态空间描述形式为

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{cl} & \tilde{B}_{cl} \\ \tilde{C}_{cl} & \tilde{D}_{cl} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ B_f C & A_f & B_f D \\ \hline L - D_f C & -C_f & -D_f D \end{array} \right) \quad (5)$$

下面考虑描述传感器连续故障的数学模型

$$\boldsymbol{y}^f = (I - F)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\xi} \quad (6)$$

其中  $\boldsymbol{\xi}$  是外界的随机噪声或测量噪声,  $F \in \mathbf{R}^{m \times m}$  为描述传感器连续故障的矩阵形式, 即  $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ , 且  $0 \leq f_j \leq 1$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),  $m$  是传感器通道个数, 而  $I$  是一单位阵.

**注 1.** 当  $f_j = 1$  时, 表示传感器第  $j$  条通道信号中断; 当  $f_j = 0$  时, 表示传感器第  $j$  条通道正常工作; 当  $0 < f_j < 1$  时, 表示传感器由于部件老化或干扰使得第  $j$  条通道部分失效.

不难看出传感器故障描述矩阵  $F$  是一个包含不确定参数  $f_j$  且具有对角结构的不确定矩阵. 另外, 在本文中  $f_j$  也被称为故障模态参数. 下面把形如结构 (7) 的这一类不确定矩阵全体记为  $\Delta$ , 即

$$\Delta = \left\{ \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_m \end{pmatrix} : \delta_i \in [0, 1] \right\} \quad (7)$$

紧集  $\Delta$  中的元素都具有对角结构, 于是可将传感器连续故障视为范数有界的结构化不确定项.

进一步把传感器故障 (6) 也考虑进去, 则在闭环系统 (4) 下所对应的输入输出映射  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{z}}$  的状态空间实现为

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_F & \tilde{B}_F \\ \tilde{C}_F & \tilde{D}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ B_f C & A_f & B_f D & B_f \\ \hline L - D_f C & -C_f & -D_f D & -D_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_f \\ -D_f \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} -C & 0 & -D & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\xi}^T]^T$ .

于是基于凸面体描述 (2) 的不确定系统 (1), 同时考虑传感器连续故障模型 (6), 对所有可能取值的故障矩阵  $F \in \Delta$ , 设计可靠滤波器 (3) 使得最终系统满足如下控制任务:

1) 当传感器发生故障时闭环系统保持渐近稳定;

2) 外部干扰信号  $\tilde{\omega}$  对系统输出信号  $\tilde{z}$  的影响在 2 范数度量下最小, 并且在故障发生时系统的设计性能不会有显著降低.

引理 1<sup>[13]</sup>.  $\mathcal{S}_U$  的定义为

$$\mathcal{S}_U = \{x \in \mathcal{S} : UTx = 0, \mathcal{S} \in \mathbf{R}^n, T \in \mathbf{R}^{l \times n}\} \quad (9)$$

则下面两个条件是等价的:

1) 对于  $\forall U \in \mathcal{U}$

$$\forall \zeta \in \text{Im}(\mathcal{S}_U), \zeta^T N \zeta < 0, \mathcal{S}_U \cap \mathcal{S}_0 = \{0\} \quad (10)$$

其中  $\mathcal{U} \in \mathbf{R}^{k \times l}$  是一个行满秩矩阵的紧集, 而  $\mathcal{S}_0$  是  $\mathcal{S}$  一个固定的线性子空间, 同时满足  $\dim(\mathcal{S}_0) \geq k$ ,  $\forall \zeta \in \text{Im}(\mathcal{S}_0)$  都有  $\zeta^T N \zeta \geq 0$ .

2) 存在一个对称矩阵  $P$  使得对  $\forall U \in \mathcal{U}$  都有

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \text{Im}(\mathcal{S}), \zeta^T (N + T^T P T) \zeta < 0 \\ \forall \zeta \in \text{Ker}(U), \zeta^T P \zeta > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

注 2. 这里可将  $\mathcal{S}$  看作是无故障标称滤波器, 而  $T$  代表了滤波器  $\mathcal{S}$  与故障  $U$  之间的级联关系, 因此  $\mathcal{S}_U$  可视为含故障的滤波器,  $N$  在  $\mathcal{S}_0$  子空间上的非负定性表示了滤波器设计的性能指标. 条件  $\mathcal{S}_U \cap \mathcal{S} = 0$  表示了该系统是适定的<sup>[14]</sup>.

引理 2. 若  $\theta(\Delta)$  关于  $\Delta$  的线性分式变换存在, 则下面给出的条件 (12) 与式 (14)、(15) 是等价的

$$\begin{pmatrix} I \\ \theta(\Delta) \end{pmatrix}^T \Xi \begin{pmatrix} I \\ \theta(\Delta) \end{pmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中  $\Xi$  是对称矩阵,  $\theta(\Delta)$  是关于  $\Delta$  的线性分式变换

$$\theta(\Delta) = \theta_{22} + \theta_{21} \Delta (I - \theta_{11} \Delta)^{-1} \theta_{12} \quad (13)$$

如果式 (13) 中  $(I - \theta_{11} \Delta)$  可逆, 则称之为适定. 此外, 若不等式 (12) 成立, 当且仅当存在一个无结构二次型分离算子  $P$  使得如下条件成立

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \theta_{22} & \theta_{21} \\ 0 & I \\ \theta_{12} & \theta_{11} \end{pmatrix}^T \text{diag} \{ \Xi, P \} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \theta_{22} & \theta_{21} \\ 0 & I \\ \theta_{12} & \theta_{11} \end{pmatrix} < 0 \quad (14)$$

且同时满足

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

证明. 下面引入

$$N = \begin{pmatrix} \Xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{S} = \text{Im} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \theta_{22} & \theta_{21} \\ 0 & I \\ \theta_{12} & \theta_{11} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_0 = \text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{21} \\ I \\ \theta_{11} \end{pmatrix} \subset \mathcal{S}$$

以及

$$U = \begin{pmatrix} I & -\Delta \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\text{Ker}(U) = \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}$$

可得

$\mathcal{S}_U =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ \theta_{22} & \theta_{21} \\ 0 & I \\ \theta_{12} & \theta_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} : -\Delta \theta_{12} \eta_1 + (I - \Delta \theta_{11}) \eta_2 = 0 \right\}$$

由于给定的线性分式存在, 因此  $(I - \theta_{11} \Delta)$  可逆, 则  $\mathcal{S}_U \perp \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_U$  可进一步写成

$$\mathcal{S}_U = \text{Im} \begin{pmatrix} I \\ \theta(\Delta) \\ (I - \theta_{11} \Delta)^{-1} \Delta \theta_{12} \\ \theta_{12} + \theta_{11} (I - \theta_{11})^{-1} \Delta \theta_{12} \end{pmatrix}$$

不难看出  $N$  在  $\mathcal{S}_U$  空间上是负定的, 而  $N + T^T R T$  在  $\mathcal{S}$  空间上也是负定的, 直接运用引理 1 命题得证.  $\square$

另外, 本文将所有满足式 (15) 的二次型分离算子  $P \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$  的全体集合定义为  $\mathcal{P}$ , 即

$$\mathcal{P} = \left\{ (* )^T P \begin{pmatrix} F \\ I \end{pmatrix} \geq 0, F \in \Delta \right\} \quad (16)$$

本文将  $Y^T Z Y$  记为  $(*)^T Z Y$ , 其中  $Y, Z$ , “\*” 为适维矩阵.

## 2 鲁棒可靠滤波器设计

下面给出设计鲁棒可靠滤波器的具体过程.

引理 3. 伴有传感器故障的不确定系统 (8) 若渐近稳定, 即存在一正定对称矩阵  $X$  使得

$$\tilde{A}_F^T X + X \tilde{A}_F < 0 \quad (17)$$

则与如下叙述等价: 对  $\forall F \in \Delta$  都存在二次型分离算子  $P \in \mathcal{P}$  和正定对称矩阵  $X$ , 使得不等式 (18) 成立

$$(*)^T \left( \begin{array}{cc|c} 0 & X & 0 \\ X & 0 & \\ \hline 0 & & P \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ A & 0 & 0 \\ \hline B_f C & A & B_f \\ 0 & 0 & I \\ -C & 0 & 0 \end{array} \right) < 0 \quad (18)$$

**证明.** 由于式 (8) 给出的闭环系统状态方程描述的是关于故障矩阵  $F$  仿射依赖, 因此该系统是适定的, 直接利用引理 2 命题可证.  $\square$

若系统还需要满足给定的干扰抑制水平  $\gamma$ , 则有如下引理.

**引理 4.** 含有传感器故障的不确定系统 (4) 若渐近稳定, 且同时满足条件  $\|\tilde{z}\|_2 \leq \gamma \|\tilde{\omega}\|_2$ , 则可等价于对  $\forall F \in \Delta, \forall \tilde{\omega} \in L^2$ , 且  $\tilde{x}(0) = 0$ , 存在正定对称矩阵  $X$  及  $P \in \mathcal{P}$ , 使得如下不等式成立

$$(*)^T \left( \begin{array}{cc|c|c} 0 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & & \\ \hline 0 & P & & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \\ & & 0 & \gamma^2 I \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{F0} & \tilde{B}_{F0} & \tilde{B}_0 \\ 0 & 0 & I \\ C_0 & D_0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ L_C & L_D & -D_f \end{array} \right) < 0 \quad (19)$$

其中不等式 (19) 中的中间变量由下式给出

$$\left( \begin{array}{ccc} \tilde{A}_{F0} & \tilde{B}_{F0} & \tilde{B}_0 \\ L_C & L_D & -D_f \\ C_0 & D_0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc|c} A & 0 & B & 0 & 0 \\ B_f C & A_f & B_f D & B_f & B_f \\ \hline L - D_f C & -C_f & -D_f D & -D_f & -D_f \\ -C & 0 & -D & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**证明.** 首先对式 (19) 左右两边进行合同变换  $T$

$$= \left( \begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{array} \right),$$

然后展开经变换后得到的矩阵,

$$\begin{aligned} & (*)^T \left( \begin{array}{cc} 0 & X \\ X & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} I & 0 \\ \tilde{A}_{F0} & \tilde{B}_0 \end{array} \right) + (*)^T P \left( \begin{array}{cc} 0 & I \\ C_0 & 0 \end{array} \right) + \\ & (*)^T \left( \begin{array}{cc} -I & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} I \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ L_C & -D_f \end{array} \right) < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

另外式 (20) 中不等号左边的第 3 项是非负的, 并由引理 3 不难得出伴有传感器故障的不确定系统 (4) 是渐近稳定的.

下面对系统状态空间 (8) 的实现形式作进一步等价处理

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{F0} & \tilde{B}_{F0} & \tilde{B}_0 \\ L_C & L_D & -D_f \\ C_0 & D_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\omega} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  都是假想信号, 此外  $\mathbf{p} = F\mathbf{q}, F \in \Delta$ . 考虑 Lyapunov 能量函数  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T X \tilde{x}$  以及式 (19) 可得出

$$\begin{aligned} & \frac{dV}{dt} + (*)^T P \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + (*)^T \left( \begin{array}{cc} -I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \\ & (*)^T \left( \begin{array}{cc|c|c} 0 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & & \\ \hline 0 & P & & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 \\ & & 0 & \gamma^{-2} I \end{array} \right) \times \\ & \left( \begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{F0} & \tilde{B}_{F0} & \tilde{B}_0 \\ 0 & 0 & I \\ C_0 & D_0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ L & L & -D_f \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\omega} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

对不等式 (22) 进行 0 到  $T$  积分可得到

$$\begin{aligned} & V(T) - V(0) + \int_0^T (*)^T P \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} dt + \\ & \int_0^T (*)^T \left( \begin{array}{cc} -I & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} I \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} dt < 0 \end{aligned}$$

注意到当  $T \rightarrow \infty$  时  $\tilde{x}(T) \rightarrow 0$ , 并且考虑式 (15), 可进一步得到如下不等式

$$\int_0^\infty (-\tilde{\omega}^2 + \gamma^{-2} \tilde{z}^2) dt \leq 0$$

因此有结论  $\|\tilde{z}\|_2 \leq \gamma\|\tilde{\omega}\|_2$ .  $\square$

引理 4 给出了在给定干扰抑制水平  $\gamma$  下, 一个与 Lyapunov 稳定条件等价的鲁棒可靠滤波器存在条件. 如果不考虑传感器故障 (6), 则滤波器设计可转化为以下可行解的存在问题

$$(*)^T \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{F0} & \tilde{B}_{F0} \\ I & 0 \\ L_C & L_D \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (23)$$

其证明过程完全类似于引理 4 的证明.

**注 3.** 从引理 4 给出的条件可以看到, 故障描述矩阵  $F$  和不确定系统的参数矩阵通过无结构分离算子  $P$  在参数空间上解耦了.

需要指出, 此时不等式 (19) 还不是一个可数值求解的 LMI. 另外, 在集合  $\mathcal{P}$  上的验证条件式 (15) 对应着无限多个 LMI<sup>[15]</sup>, 为此需要对集合  $\mathcal{P}$  作一定的简化处理. 下面定义  $\mathcal{P}$  的一个子集合  $\mathcal{P}^S$

$$\mathcal{P}^S = \left\{ P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}, Q < 0, R \geq 0 \right\} \quad (24)$$

于是对原集合  $\Delta$  中的所有元素的检验等价于仅对有

限个元素的检验, 亦即不等式 (15) 的成立当且仅当以下不等式成立

$$(*)^T P \begin{pmatrix} \Delta_j \\ I \end{pmatrix} \geq 0, P \in \mathcal{P}^S, j = 1, \dots, 2^m \quad (25)$$

其中  $m$  是凸胞集合  $\Delta$  的顶点个数, 在本文中也是传感器通道个数. 对集合  $\mathcal{P}$  简化的好处是: 对故障描述矩阵  $F$  可采用多胞模型进行描述, 能充分利用其结构信息<sup>[12]</sup>.

**注 4.** 一般而言,  $\mathcal{P}^S \subset \mathcal{P}$ , 但在本次可靠滤波器设计中  $\mathcal{P}^S = \mathcal{P}$ . 这是因为不确定系统与传感器故障的仿射依赖决定了  $Q < 0$ <sup>[13]</sup>. 另外  $R \geq 0$  也不会引入保守性, 因为  $\Delta$  是一个包含零点的连通紧集.

下面给出本文的主要结果, 即凸面体不确定系统在传感器多通道内同时发生故障时, 鲁棒可靠滤波器存在的充分条件可用矩阵不等式 (26) 进行表述.

**定理 1.** 若存在正定对称矩阵  $X$  和无结构分离算子  $P \in \mathcal{P}^S$ , 使得不等式 (26) 成立, 则伴有传感器故障的不确定系统 (4) 渐近稳定, 且满足给定的干扰抑制水平  $\gamma > 0$ , 即  $\|\tilde{z}\|_2 \leq \gamma\|\tilde{\omega}\|_2$ .

$$\begin{pmatrix} AY_s + Y_s A^T & * & * & * & * & * & * \\ \hat{A}_f + A^T & X_s A + A^T X_s & * & * & * & * & * \\ B^T & B^T X_s + D^T \hat{B}_f^T & -I & * & * & * & * \\ 0 & \hat{B}_f^T & 0 & -I & * & * & * \\ 0 & \hat{B}_f^T & 0 & 0 & Q & * & * \\ LY_s - \hat{C}_f & L - \hat{D}_f C & -\hat{D}_f D & -\hat{D}_f & -\hat{D}_f & -\gamma^2 I & * \\ CY_s & C & D & 0 & -R^{-1} S^T & 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (26)$$

式 (26) 中的中间变量定义为

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_f & \hat{B}_f \\ \hat{C}_f & \hat{D}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_s A Y_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C Y_s & I \end{pmatrix} \quad (27)$$

**证明.** 首先定义

$$X = \begin{pmatrix} X_s & U \\ U^T & * \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} Y_s & V \\ V^T & * \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} Y_s & I \\ V^T & 0 \end{pmatrix}$$

以及

$$\Pi = \begin{pmatrix} \text{sym}(AY_s) + Y_s C^T R C Y_s & * & * & * & * & * \\ \hat{A}_f + A^T + C^T R C Y_s & X_s A + A^T X_s + C^T R C & * & * & * & * \\ B^T + D^T R C Y_s & B^T X_s + D^T \hat{B}_f^T + D^T R C & -I + D^T R D & * & * & * \\ 0 & \hat{B}_f^T & 0 & -I & * & * \\ -S C Y_s & \hat{B}_f^T - S C & -S D & 0 & Q & * \\ LY_s - \hat{C}_f & L - \hat{D}_f C & -\hat{D}_f D & -\hat{D}_f & -\hat{D}_f & -\gamma^2 I \end{pmatrix}$$

另外  $\text{sym}(A) = A^T + A$ , 然后对式 (19) 左右两边进行  $T = \text{diag}\{Z, I, I\}$  的合同变换, 并运用 Schur 补引理<sup>[8]</sup>, 可得到不等式 (28):

$$\Pi < 0 \tag{28}$$

再考虑如下不等式

$$\Pi \leq (*) (-R) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -SR^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}^T \tag{29}$$

当  $-R < 0$  时, 不等式 (29) 的成立一定能够推导出不等式 (28) 的成立, 反之则不一定. 将式 (29) 中不等号右边项移至左边, 再一次运用 Schur 补引理即得不等式 (26).  $\square$

**注 5.** 从定理 1 的证明过程中可以看到, 可靠滤波器设计的一部分保守性是由于不等式 (29) 的约束而引入的. 如果能让  $R \rightarrow 0$ , 则滤波器设计的保守性可以得到改善. 为此引入罚变量, 即在不等式 (26) 中的  $R^{-1}$  项添加系数  $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  越小则会使  $R^{-1}$  的数值计算结果越大, 这等于让  $R \rightarrow 0$ , 因此标量  $\alpha$  将作为 LMI 优化问题的自由变量, 以降低系统设计的保守性.

另外, 在滤波器综合过程中, 由于数值计算的需要而将  $R^{-1}$  限制为对角阵结构, 为降低这种处理所

引入的保守性, 进一步将依参数 Lyapunov 函数的思想引入到分离算子中, 为此分离算子  $P$  采用依参数形式, 并用凸胞描述, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{SC} &= \{\tilde{P}(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i \tilde{P}_i, \\ \tilde{P}_i &= \begin{pmatrix} Q_i & M_i \\ M_i^T & \alpha \tilde{R}_i \end{pmatrix} \subset \mathcal{P}^S, \\ \tilde{R}_i &= \text{diag}\{\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_m\} > 0, \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i = 1 \end{aligned} \tag{30}$$

此外不确定系统 (1) 亦是采用凸面体描述, 即  $A(\theta) \in \mathcal{A}$ , 则有如下推论.

**推论 1.** 若存在正定对称矩阵  $X_s, Y_s, -Q_i, \tilde{R}_i, \bar{Q}_i, \bar{R}_i$ , 正标量  $\alpha, \beta$  以及  $M_i, \bar{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f, \hat{D}_f$ , 使得基于线性矩阵不等式 (31) ~ (33) 表述的凸优化问题有可行解存在, 则伴有传感器故障的凸面体不确定系统 (8), 满足第 1 节中给出的两个控制任务.

在式 (31) ~ (33) 中, 选择合适的标量  $\beta > 0$ , 使其满足条件  $\bar{Q}_i + \bar{R}_i < 2I$ . 另外  $\bar{A}_f = UA_fV^T + UB_fCY_s, M_i = SR_i^{-1}, \tilde{R}_i = R_i^{-1}, \tilde{F}_j = F_jR_i^{-1} (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, 2^m)$ , 滤波器增益阵由式 (34) 给出.

**证明.** 对不确定系统 (1) 和分离算子采用凸面体描述, 并考虑罚变量  $\alpha$ , 可直接由不等式 (26) 写出线性矩阵不等式 (32). 另外再根据  $P_i \in \mathcal{P}^{SC}$  可得到式 (35).

$$\begin{aligned} & \min \gamma \tag{31} \\ & \begin{pmatrix} A_i Y_s + Y_s A_i^T & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \bar{A}_f + A_i^T & X_s A_i + A_i^T X_s & * & * & * & * & * & * & * \\ B^T & B^T X_s + D^T \hat{B}_f^T & -I & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \hat{B}_f^T & 0 & -I & * & * & * & * & * \\ 0 & \hat{B}_f^T & 0 & 0 & Q_i & * & * & * & * \\ LY_s - \hat{C}_f & L - \hat{D}_f C & -\hat{D}_f D & -\hat{D}_f & -\hat{D}_f & -\gamma^2 I & * & * & * \\ CY_s & C & D & 0 & -M_i^T & 0 & -\alpha \tilde{R}_i & * & * \\ 0 & X_s A_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \bar{Q}_i & * \\ Y_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \bar{R}_i \end{pmatrix} < 0 \tag{32} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_j \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_i & M_i \\ M_i^T & \alpha \tilde{R}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_j \\ I \end{pmatrix} > 0 \tag{33}$$

$$\begin{aligned} UV^T &= I - X_s Y_s, D_f = \hat{D}_f \\ C_f &= (\hat{C}_f - D_f C Y_s) V^{-T}, B_f = U^{-1} \hat{B}_f \\ A_f &= U^{-1} (\bar{A}_f - U B_f C Y_s) V^{-T} \end{aligned} \tag{34}$$

$$(*)^T \begin{pmatrix} Q_i & SR_i^{-1} \\ R_i^{-1} S^T & \alpha R_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_j \\ R_i \end{pmatrix} > 0 \tag{35}$$

由于  $R_i$  非奇异, 则有

$$\text{Im} \begin{pmatrix} F_j \\ R_i \end{pmatrix} = \text{Im} \begin{pmatrix} F_j R_i^{-1} \\ I \end{pmatrix} = \text{Im} \begin{pmatrix} \tilde{F}_j \\ I \end{pmatrix} \quad (36)$$

因此不等式 (33) 与式 (35) 是等价的, 而式 (34) 可直接由式 (27) 推出.  $\square$

仿照文献 [7] 中关于滤波器设计的定义, 将基于推论 1 的滤波器设计称之为鲁棒可靠滤波器设计, 而把基于不等式 (23) 的设计称之为标准滤波器设计.

### 3 仿真实例

本节将前面给出的鲁棒可靠滤波器设计方法应用到姿态估计中. 考虑某航天器姿态估计状态方程<sup>[16]</sup>(见本页下方式 (37)), 其中  $\theta$ ,  $b_p$ ,  $d_p$ ,  $b_h$ ,  $\theta_h$ ,  $\theta_{sh}$ ,  $g_2$  分别表示航天器的俯仰角、俯仰陀螺常值漂移、陀螺指数相关随机漂移、红外地平仪常值偏差、俯仰红外地平仪测量值、由双矢量定姿法得到的俯仰角和俯仰陀螺测量值. 而  $\beta$  为一个不确定参数.

实际可接受的干扰抑制水平为  $\gamma = 2$ , 用标准滤波器设计方法得到的  $\gamma$  值为 1.1549, 而用本文给出的鲁棒可靠滤波器设计方法得到的  $\gamma$  值为 1.7803, 其中  $\alpha = 1.8 \times 10^{-3}$ , 鲁棒可靠滤波器增益阵为

$$A_f = \begin{pmatrix} -1.2699 & -1.4080 & -0.7582 & -0.0872 \\ -0.1541 & -2.4146 & -0.6238 & -0.2728 \\ -0.6533 & -0.9339 & -1.9116 & 0.5055 \\ 0.2805 & 0.0697 & 0.0173 & -0.9735 \end{pmatrix}$$

$$B_f = \begin{pmatrix} -6.8 \times 10^{-7} & -2.21 \times 10^{-6} \\ -7.7 \times 10^{-7} & -5.3 \times 10^{-7} \\ 1.8 \times 10^{-6} & 2.87 \times 10^{-6} \\ 0.13 \times 10^{-6} & 2.27 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$C_f = \begin{pmatrix} 0.5222 & -0.5817 & 0.4832 & -2.1455 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{b}_p \\ \dot{d}_p \\ \dot{b}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3\beta & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -0.9992 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ b_p \\ d_p \\ b_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} g_2$$

$$\begin{pmatrix} \theta_h \\ \theta_{sh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ b_p \\ d_p \\ b_h \end{pmatrix}, \quad |\beta| \leq 1 \quad (37)$$

$$D_f = \begin{pmatrix} 2.484 \times 10^{-6} & 5.254 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (38)$$

下面分别采用标准滤波器 (Nominal filter) 设计、文献 [7] 中的鲁棒可靠滤波器 (Robust reliable filter 1) 设计和本文给出的鲁棒可靠滤波器 (Robust reliable filter 2) 设计对系统 (37) 进行滤波器设计. 图 1 表示在传感器多通道内同时发生故障时, 闭环系统的真实干扰抑制水平  $\gamma$  值的比较图; 而图 2 表示在传感器某一通道内发生故障时, 闭环系统的真实干扰抑制水平  $\gamma$  值的比较图.

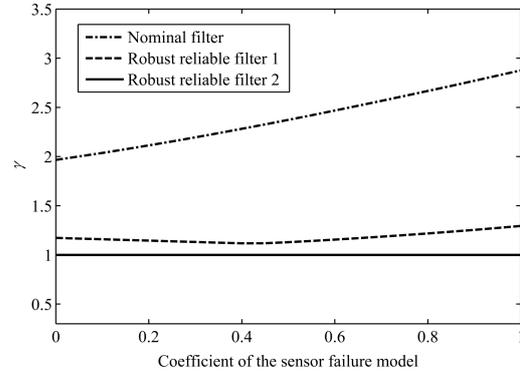


图 1 多故障下实际干扰抑制水平  $\gamma$  值

Fig. 1 The performance in multi-fault case

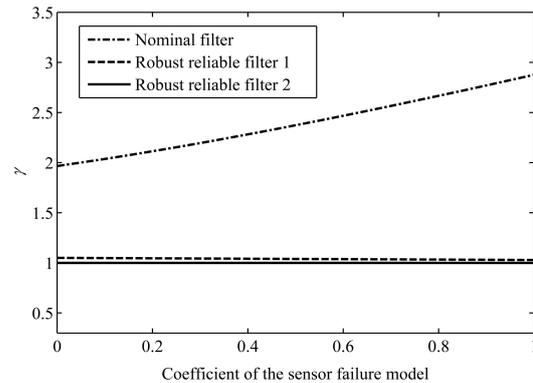


图 2 单故障下实际干扰抑制水平  $\gamma$  值

Fig. 2 The performance in single-fault case

从图 1 中可以看出,在传感器多通道内同时发生故障时,采用标准滤波器及文献 [7] 中的可靠滤波器设计方法在不同故障模态参数  $f_i$  下得到的  $\gamma$  值均有不同程度的变化,说明它们对传感器故障的发生都比较敏感;而基于本文的鲁棒可靠滤波器得到的  $\gamma$  值几乎没有变化,即对故障的发生几乎不敏感.图 2 表明当传感器某一通道内发生故障时,分别由本文和文献 [7] 设计得到的可靠滤波器对故障几乎不敏感,但标准滤波器对故障依然比较敏感.另外在上述两种故障发生的模式下,本文得到的干扰抑制水平  $\gamma$  值较文献 [7] 都低.仿真实例表明在故障发生时,本文给出的鲁棒可靠滤波器不仅能够较好地满足原来设计的性能指标,而且几乎不受故障发生的影响.与以往方法相比较,本文提出的基于依参数分离算子的鲁棒可靠滤波器对于传感器故障具有更强的鲁棒性和更好的设计性能.

#### 4 结论

本文根据不确定系统鲁棒镇定下的拓扑解释,利用二次型分离算子将系统参数集和故障扰动集在形式上解耦;同时为进一步降低设计保守性以及扩大 LMI 数值寻优空间,文中采用了依参数的分离算子.通过参数解耦和依参数分离算子,获得了对故障不敏感的鲁棒可靠滤波器,并且在多通道内同时发生故障时依然能够很好地维持原来给定的性能指标.此外,文中给出的滤波器实现是借助于凸优化问题的数值计算,使得可靠滤波器设计便于实现.仿真实例表明了所提出的可靠滤波器设计方法的有效性.

#### References

- 1 Shimemura E, Fujita M. A design method for linear state feedback systems possessing integrity based on a solution of a Riccati-type equation. *International Journal of Control*, 1985, **42**(4): 887–899
- 2 Ni Mao-Lin. Design of control systems possessing integrity and good dynamical characteristics. *Control and Decision*, 1990, **5**(4): 48–51  
(倪茂林. 具有完整性和良好动态特性的系统设计. *控制与决策*, 1990, **5**(4): 48–51)
- 3 Ni Mao-Lin, Wu Hong-Xin. The design of optimal control systems possessing integrity. *Control Theory and Applications*, 1992, **9**(3): 245–249  
(倪茂林, 吴宏鑫. 具有完整性的最优控制系统设计. *控制理论与应用*, 1992, **9**(3): 245–249)
- 4 Jiang Bin. Active fault tolerant control for discrete-time systems with flight application. *Control Engineering of China*, 2006, **13**(6): 596–600  
(姜斌. 离散时间系统的主动容错控制及飞控应用. *控制工程*, 2006, **13**(6): 596–600)
- 5 Liao F, Wang F Z, Yang G H. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(1): 76–89
- 6 Liu J, Wang J L, Yang G H. Reliable guaranteed variance filtering against sensor failures. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, **51**(5): 1403–1411
- 7 Wang F Z, Zhang Q L, Yao B. LMI-based reliable  $H_\infty$  filtering with sensor failures. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2006, **2**(4): 737–748

- 8 Yu Li. *Robust Control – Methods for Linear Matrix Inequalities*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002  
(俞立. 鲁棒控制 — 线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2002)
- 9 Goh K C, Safonov M G. Robust analysis, sectors, and quadratic functionals. In: *Proceedings of the 34th Conference on Decision Control*. New Orleans, USA: 1995. 1988–1993
- 10 The Math Works. LMI control toolbox for use with matlab: user's guide [Online], available: <http://www.mathworks.com>, November 7, 2005
- 11 Geromel J C, Korogui R H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(12): 1984–1989
- 12 Geromel J C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(1): 168–175
- 13 Scherer C W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 2001, **37**(3): 361–375
- 14 Zhou K M, Doyle J C, Glover K, Doyle J C. *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996
- 15 Iwasaki T, Hara S. Well-posedness of feedback systems: insights into exact robustness analysis and approximate computations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(5): 619–630
- 16 Xing Y. Fault Detection and Isolation of the Satellite Closed-loop Attitude Control System [Ph. D. dissertation], Beijing Institute of Control Engineering, China Academy of Space Technology, 2003



欧阳高翔 中国空间技术研究院北京控制工程研究所博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制, 容错控制. 本文通信作者.  
E-mail: oygx210@163.com

(OUYANG Gao-Xiang Ph. D. candidate at Beijing Institute of Control Engineering, China Academy of Space Technology. His research interest covers robust control and fault tolerant control. Corresponding author of this paper.)



倪茂林 中国空间技术研究院北京控制工程研究所高级工程师. 主要研究方向为鲁棒控制, 航天控制.

E-mail: nimaolin@cast.cn  
(NI Mao-Lin Senior engineer at Beijing Institute of Control Engineering, China Academy of Space Technology. His research interest covers robust control and aerospace control.)



孙承启 中国空间技术研究院北京控制工程研究所研究员. 主要研究方向为制导、导航与控制.

E-mail: sunchq@bice.org.cn  
(SUN Cheng-Qi Professor at Beijing Institute of Control Engineering, China Academy of Space Technology. His research interest covers guidance, navigation and control.)