一类网络控制系统的 H_2 方法

王 武[1] 詹耀清[1] 杨富文[1]

摘 要 由于网络传输带宽的限制, 在网络传输中可能造成数据的丢失. 对于同时具有测量数据和控制数据丢失的一类网络控制系统, 研究 H_2 输出反馈控制问题. 数据的丢失采用满足 Bernoulli 分布的二进制随机变量进行表述. 利用矩阵不等式方法给出了 H_2 动态输出反馈控制器存在的充分条件, 所设计的控制器使得闭环系统是均方意义下指数稳定并具有给定的 H_2 性能. 采用 SLPMM (Sequentially linear programming matrix method) 给出相应的控制器求解算法. 最后用数值仿真验证了所提出算法的可行性.

关键词 网络控制系统, H_2 控制, 动态输出反馈, 数据丢失, SLPMM (Sequentially linear programming matrix method)
中图分类号 TP13

An H_2 Approach to Networked Control System

WANG Wu[1] ZHAN Yao-Qing[1] YANG Fu-Wen[1]

Abstract Packet-based transmission of data over a network with limited bandwidth would result in lost data. The H_2 output feedback control problem for a class of networked control system with both measurement data and control data missing simultaneously is considered in this paper. The packet loss is modeled as a Bernoulli distributed white sequence with a known conditional probability distribution. A sufficient condition for the existence of a dynamic output feedback controller is present via matrix inequalities, such that the closed-loop system is exponentially mean-square stable and a prescribed H_2 performance is guaranteed. The sequentially linear programming matrix method (SLPMM) is used to solve the matrix inequalities. Numerical example is provided to demonstrate the feasibility of the proposed condition and the controller design procedure.

Key words Networked control system, H_2 control, dynamic output feedback, missing data, SLPMM (sequentially linear programming matrix method)

随着网络技术的发展, 被控系统、传感器、控制器和执行器通过网络连接构成网络控制系统. 这类系统在工业自动化, 无人驾驶车辆以及家用自动化系统中开始得到应用. 由于网络共享一个传输通道, 数据传输速率受到传输介质的限制, 数据包在传输中不可避免出现丢失, 特别是在无线网络中. 而在实际的控制中, 数据的准确性对系统的控制性能起决定性作用. 因此具有数据丢失的网络控制系统的控制和滤波问题成为学者们研究的热点问题之一. 目前学者主要集中在对测量数据丢失的控制与滤波的研究[1−8]. Chen 等[1] 采用神经网络来估计丢失的测量数据, 克服数据丢失时刻无法跟踪的控制问题. Albertos 等[2] 和 Pintelon 等[3] 采用辨识

收稿日期 2006-12-13 收修改稿日期 2007-05-17
Received December 13, 2006; in revised form May 17, 2007
国家自然科学基金项目 (60474049, 60604027), 福建省自然科学基金项目 (A0510009, 2007J0018) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60474049, 60604027), and Natural Science Foundation of Fujian Province of China (A0510009, 2007J0018)
1. 福州大学电气工程与自动化学院 福州 350108
1. College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00219

模型来预测丢失的测量数据, 并采用这些数据进行控制. 文献 [4−6] 采用满足 Bernoulli 分布的序列来描述测量数据的丢失, 预先假设测量数据丢失的概率, 根据这个丢失概率进行滤波器的设计. 文献 [7] 采用不完全矩阵来描述丢失的数据, 并进行模型的验证和滤波器的设计. 还有一种是把具有测量数据丢失当成一种随机马尔可夫跳跃, 采用马尔可夫理论来研究控制与滤波[8]. 但是同时考虑测量数据和控制数据丢失的控制器设计方法的研究较少[9]. 文献 [9] 采用了 Bernoulli 随机变量来描述测量数据和控制数据丢失, 通过构造一个卡尔曼滤波器实现了线性二次高斯 (LQG) 最优控制. 本文设计 H_2 控制器时, 不需要构造滤波器, 这样适应性更强.

本文采用 Bernoulli 随机变量来描述数据丢失, 对同时具有测量数据和控制数据丢失的网络控制系统, 利用矩阵不等式方法给出了动态输出反馈控制器存在的充分条件, 所设计的控制器使得闭环系统是均方意义下指数稳定并具有给定的 H_2 性能, 并应用 SLPMM 给出相应的控制器求解算法.

符号说明: 对于矩阵 A, $\rho(A)$, $\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A), \mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{st}(A)$ 分别表示矩阵 A 的谱半径, 最大奇异值, 最小奇异值, 迹和栈运算.

1 问题描述

考虑如下的离散系统

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= A\boldsymbol{x}(k)+B_1\boldsymbol{w}(k)+B_2\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{z}(k) &= C_1\boldsymbol{x}(k)+D_{12}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k) &= C_2\boldsymbol{x}(k)+D_{21}\boldsymbol{w}(k)\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\boldsymbol{w}(k)\in\mathbf{R}^r$ 为零均值、单位协方差的高斯白噪声信号, $\boldsymbol{z}(k)\in\mathbf{R}^q$ 为系统的被控输出, $\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^m$ 为执行器接收到的控制信号, $\boldsymbol{y}(k)\in\mathbf{R}^p$ 为传感器的测量信号. A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12} 和 D_{21} 为已知的系统矩阵.

所设计的动态输出反馈控制器具有如下的形式

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) &= A_K\hat{\boldsymbol{x}}(k)+B_K\boldsymbol{y}^F(k)\\ \boldsymbol{u}^F(k) &= C_K\hat{\boldsymbol{x}}(k)\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)\in\mathbf{R}^n$ 为控制器的状态, $\boldsymbol{u}^F(k)\in\mathbf{R}^m$ 为控制器的输出信号, $\boldsymbol{y}^F(k)\in\mathbf{R}^p$ 为控制器的输入信号, A_K, B_K 和 C_K 为待设计的控制器参数.

被控系统 (1) 和控制器 (2) 是通过网络连接起来的, 也就是传感器的测量信号通过网络成为控制器的输入信号, 控制器的输出信号通过网络成为执行器的控制信号, 假设它们具有如下的关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(k) &= \alpha(k)\boldsymbol{u}^F(k)\\ \boldsymbol{y}^F(k) &= \beta(k)\boldsymbol{y}(k)\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\alpha(k),\beta(k)\in\mathbf{R}$ 是 Bernoulli 随机变量, 分别用来描述控制数据和测量数据的丢失. 当 $\alpha(k)=1$ 时, 执行器接收到完整的控制信号, 即 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}^F(k)$; 当 $\alpha(k)=0$ 时, 控制信号丢失, 执行器输入的控制量为零, 即 $\boldsymbol{u}(k)=0$. 同样, 当 $\beta(k)=1$ 时, 控制器接收到完整的传感器测量得到的数据, 即 $\boldsymbol{y}^F(k)=\boldsymbol{y}(k)$; 当 $\beta(k)=0$ 时, 系统测量数据丢失, 控制器没有接收到数据, 即 $\boldsymbol{y}^F(k)=0$.

假设 $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\boldsymbol{x}(k)$ 和 $\boldsymbol{w}(k)$ 是相互独立的, 并假设 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$ 的概率为

$$\begin{aligned}&P\{\alpha(k)=1\}=\mathrm{E}\{\alpha(k)\}=\bar{\alpha}\\ &P\{\alpha(k)=0\}=1-\mathrm{E}\{\alpha(k)\}=1-\bar{\alpha}\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&P\{\beta(k)=1\}=\mathrm{E}\{\beta(k)\}=\bar{\beta}\\ &P\{\beta(k)=0\}=1-\mathrm{E}\{\beta(k)\}=1-\bar{\beta}\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\bar{\beta}$ 和 $\bar{\alpha}$ 是已知正数.

由式 (1)∼(3) 可得闭环系统为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{cl}(k+1) &= A_{cl}\boldsymbol{x}_{cl}(k)+(B_{cl0}+(\beta(k)-\bar{\beta})B_{cl1})\boldsymbol{w}(k)\\ \boldsymbol{z}(k) &= (C_{cl0}+(\alpha(k)-\bar{\alpha})C_{cl1})\boldsymbol{x}_{cl}(k)\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $A_{cl}=A_{cl0}+(\alpha(k)-\bar{\alpha})A_{cl1}+(\beta(k)-\bar{\beta})A_{cl2}$, $\boldsymbol{x}_{cl}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(k)\end{bmatrix}$, $A_{cl0}=\begin{bmatrix}A & \bar{\alpha}B_2C_K\\ \bar{\beta}B_KC_2 & A_K\end{bmatrix}$, $A_{cl1}=\begin{bmatrix}0 & B_2C_K\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A_{cl2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ B_KC_2 & 0\end{bmatrix}$, $B_{cl0}=\begin{bmatrix}B_1\\ \bar{\beta}B_KD_{21}\end{bmatrix}$, $B_{cl1}=\begin{bmatrix}0\\ B_KD_{21}\end{bmatrix}$, $C_{cl0}=\begin{bmatrix}C_1 & \bar{\alpha}D_{12}C_K\end{bmatrix}$, $C_{cl1}=\begin{bmatrix}0 & D_{12}C_K\end{bmatrix}$.

定义 1[5]**.** 对动态过程 $\boldsymbol{x}_{cl}(k)$, 存在 $\kappa\geq1$, $0<\tau<1$ 使得

$$\mathrm{E}\left\{\|\boldsymbol{x}_{cl}(k)\|^2\right\}\leq\kappa\tau^k\mathrm{E}\left\{\|\boldsymbol{x}_{cl}(0)\|^2\right\},\forall x_{cl}(0)\neq0\tag{7}$$

那么系统被称为是均方指数稳定的.

本文研究的问题是设计控制器 (2), 对于所有容许的测量数据和控制数据丢失, 使得:

1) 当外部扰动 $\boldsymbol{w}(k)=0$ 时, 闭环系统 (6) 是均方指数稳定的;

2) 闭环系统 (6) 具有 H_2 性能, 即

$$J=\lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\{\|\boldsymbol{z}(k)\|^2\}<\gamma\tag{8}$$

对相互独立的随机变量 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$, 有下列式子成立:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{\alpha-\bar{\alpha}\}=0,\ \mathrm{E}\{\beta-\bar{\beta}\}=0,\ \mathrm{E}\{(\alpha-\bar{\alpha})(\beta-\bar{\beta})\}=0,\\ &\mathrm{E}\{(\alpha-\bar{\alpha})^2\}=\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})=a,\mathrm{E}\{(\beta-\bar{\beta})^2\}=\bar{\beta}(1-\bar{\beta})=b\end{aligned}$$

2 $\boldsymbol{H_2}$ 性能分析

为了给出 H_2 性能, 需要下面的引理.

引理 1[10]**.** $V(\boldsymbol{x}_{cl}(k))=\boldsymbol{x}_{cl}^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{x}_{cl}(k)$ 为 Lyapunov 函数. 如果存在 $\mu>0$, $\nu>0$ 和 $0<\psi<1$ 使得

$$\mu\|\boldsymbol{x}_{cl}(k)\|^2\leq V(\boldsymbol{x}_{cl}(k))\leq\nu\|\boldsymbol{x}_{cl}(k)\|^2\tag{9}$$

$$\mathrm{E}\{V(\boldsymbol{x}_{cl}(k+1))|\boldsymbol{x}_{cl}(k)\}-V(\boldsymbol{x}_{cl}(k))\leq-\psi V(\boldsymbol{x}_{cl}(k))\tag{10}$$

那么有

$$\mathrm{E}\{\|\boldsymbol{x}_{cl}(k)\|^2\}\leq\frac{\nu}{\mu}(1-\psi)^k\mathrm{E}\{\|\boldsymbol{x}_{cl}(0)\|^2\}\tag{11}$$

引理 2. 对于系统

$$\boldsymbol{x}_{cl}(k+1)=(A_{cl0}+(\alpha(k)-\bar{\alpha})A_{cl1}+(\beta(k)-\bar{\beta})A_{cl2})\boldsymbol{x}_{cl}(k) \tag{12}$$

下列条件等价:

1)

$$\rho(\psi_1)=\rho(\psi_2)<1 \tag{13}$$

其中

$$\psi_1=A_{cl0}\otimes A_{cl0}+aA_{cl1}\otimes A_{cl1}+bA_{cl2}\otimes A_{cl2} \tag{14}$$

$$\psi_2=A_{cl0}^{\mathrm{T}}\otimes A_{cl0}^{\mathrm{T}}+aA_{cl1}^{\mathrm{T}}\otimes A_{cl1}^{\mathrm{T}}+bA_{cl2}^{\mathrm{T}}\otimes A_{cl2}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积.

2) 存在正定对称阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$, 使得

$$A_{cl0}^{\mathrm{T}}PA_{cl0}+aA_{cl1}^{\mathrm{T}}PA_{cl1}+bA_{cl2}^{\mathrm{T}}PA_{cl2}-P<0 \tag{16}$$

3) 存在正定对称阵 $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$, 使得

$$A_{cl0}QA_{cl0}^{\mathrm{T}}+aA_{cl1}QA_{cl1}^{\mathrm{T}}+bA_{cl2}QA_{cl2}^{\mathrm{T}}-Q<0 \tag{17}$$

4) 系统 (12) 是均方指数稳定的.

证明. 采用文献 [11] 定理 1 的证明思路, 并应用引理 1 和定义 1 即可完成证明. 限于篇幅, 在此省略详细证明. □

H_2 性能定义为 $J=\lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\{\|\boldsymbol{z}(k)\|^2\}$. 定义 $Q_k=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_{cl}(k)\boldsymbol{x}_{cl}^{\mathrm{T}}(k)\}$, 那么

$$\begin{aligned}Q_{k+1}\ =\ &A_{cl0}Q_kA_{cl0}^{\mathrm{T}}+aA_{cl1}Q_kA_{cl1}^{\mathrm{T}}+\\&bA_{cl2}Q_kA_{cl2}^{\mathrm{T}}+B_{cl0}B_{cl0}^{\mathrm{T}}+bB_{cl1}B_{cl1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{18}$$

写成栈算子的描述为

$$\mathrm{st}(Q_{k+1})=\psi_2\mathrm{st}(Q_k)+\mathrm{st}(B_{cl0}B_{cl0}^{\mathrm{T}}+bB_{cl1}B_{cl1}^{\mathrm{T}}) \tag{19}$$

若系统均方指数稳定, 由引理 2 有 $\rho(\psi_2)<1$ 且 $Q=\lim_{k\to\infty}Q_k$, 那么式 (18) 为

$$\begin{aligned}Q\ =\ &A_{cl0}QA_{cl0}^{\mathrm{T}}+aA_{cl1}QA_{cl1}^{\mathrm{T}}+bA_{cl2}QA_{cl2}^{\mathrm{T}}+\\&B_{cl0}B_{cl0}^{\mathrm{T}}+bB_{cl1}B_{cl1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{20}$$

因此 H_2 性能 $J=\lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\{\|z(k)\|^2\}=\mathrm{tr}(C_{cl0}QC_{cl0}^{\mathrm{T}}+aC_{cl1}QC_{cl1}^{\mathrm{T}})$.

另外,

$$\begin{aligned}P_k\ =\ &A_{cl0}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl0}+aA_{cl1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl1}+\\&bA_{cl2}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl2}+C_{cl0}^{\mathrm{T}}C_{cl0}+aC_{cl1}^{\mathrm{T}}C_{cl1}\end{aligned} \tag{21}$$

栈算子的描述为

$$\mathrm{st}(P_k)=\psi_1\mathrm{st}(P_{k+1})+\mathrm{st}(C_{cl0}^{\mathrm{T}}C_{cl0}+aC_{cl1}^{\mathrm{T}}C_{cl1}) \tag{22}$$

同样, 若系统均方指数稳定, 由引理 2 有 $\rho(\psi_1)<1$ 且 $P=\lim_{k\to\infty}P_k$, 那么式 (21) 为

$$\begin{aligned}P\ =\ &A_{cl0}^{\mathrm{T}}PA_{cl0}+aA_{cl1}^{\mathrm{T}}PA_{cl1}+bA_{cl2}^{\mathrm{T}}PA_{cl2}+\\&C_{cl0}^{\mathrm{T}}C_{cl0}+aC_{cl1}^{\mathrm{T}}C_{cl1}\end{aligned} \tag{23}$$

由

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{tr}\{Q_{k+1}P_{k+1}-Q_kP_k\}=0 \tag{24}$$

有

$$\mathrm{tr}(C_{cl0}QC_{cl0}^{\mathrm{T}}+aC_{cl1}QC_{cl1}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(B_{cl0}^{\mathrm{T}}PB_{cl0}+bB_{cl1}^{\mathrm{T}}PB_{cl1}) \tag{25}$$

总结以上分析, 有下面的定理.

定理 1. 如果系统 (6) 是均方指数稳定的, 那么 H_2 性能可以描述为

$$J=\mathrm{tr}(B_{cl0}^{\mathrm{T}}PB_{cl0}+bB_{cl1}^{\mathrm{T}}PB_{cl1}) \tag{26}$$

其中 $P=P^{\mathrm{T}}>0$ 为式 (23) 的解.

或

$$J=\mathrm{tr}(C_{cl0}QC_{cl0}^{\mathrm{T}}+aC_{cl1}QC_{cl1}^{\mathrm{T}}) \tag{27}$$

其中 $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$ 为式 (20) 的解.

下面采用线性矩阵不等式来刻画系统的 H_2 性能.

定理 2. 如果系统 (6) 是均方指数稳定的, 那么 H_2 性能可以描述为

$$\begin{aligned}J\ =\ &\mathrm{tr}(B_{cl0}^{\mathrm{T}}PB_{cl0}+bB_{cl1}^{\mathrm{T}}PB_{cl1})<\\&\mathrm{tr}(B_{cl0}^{\mathrm{T}}\hat{P}B_{cl0}+bB_{cl1}^{\mathrm{T}}\hat{P}B_{cl1})\end{aligned} \tag{28}$$

其中 $\hat{P}=\hat{P}^{\mathrm{T}}>0$, 为以下不等式的解

$$\begin{aligned}&-\hat{P}+A_{cl0}^{\mathrm{T}}\hat{P}A_{cl0}+aA_{cl1}^{\mathrm{T}}\hat{P}A_{cl1}+bA_{cl2}^{\mathrm{T}}\hat{P}A_{cl2}+\\&C_{cl0}^{\mathrm{T}}C_{cl0}+aC_{cl1}^{\mathrm{T}}C_{cl1}<0\end{aligned} \tag{29}$$

或

$$\begin{aligned}J\ =\ &\mathrm{tr}(C_{cl0}QC_{cl0}^{\mathrm{T}}+aC_{cl1}QC_{cl1}^{\mathrm{T}})<\\&\mathrm{tr}(C_{cl0}\hat{Q}C_{cl0}^{\mathrm{T}}+aC_{cl1}\hat{Q}C_{cl1}^{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\hat{Q}=\hat{Q}^{\mathrm{T}}>0$, 为以下不等式的解

$$\begin{aligned}&-\hat{Q}+A_{cl0}\hat{Q}A_{cl0}^{\mathrm{T}}+aA_{cl1}\hat{Q}A_{cl1}^{\mathrm{T}}+bA_{cl2}\hat{Q}A_{cl2}^{\mathrm{T}}+\\&B_{cl0}B_{cl0}^{\mathrm{T}}+bB_{cl1}B_{cl1}^{\mathrm{T}}<0\end{aligned} \tag{31}$$

证明. 限于篇幅, 在此省略. □

注 1. 在定理 2 中, 条件从等式变为不等式, 更易于求解, 但是 H_2 性能包含控制器参数和待求矩阵 $\hat{P}$(或 $\hat{Q}$), 无法求得 H_2 性能的上界, 因此需要引入新正定对称阵 Z 来简化计算, 那么式 (28) 可写为

$$B_{cl0}^{\mathrm{T}}\hat{P}B_{cl0}+bB_{cl1}^{\mathrm{T}}\hat{P}B_{cl1}<Z \tag{32}$$

$$J<\mathrm{tr}(Z) \tag{33}$$

式 (30) 可写为

$$C_{cl0}\hat{Q}C_{cl0}^{\mathrm{T}}+aC_{cl1}\hat{Q}C_{cl1}^{\mathrm{T}}<Z \tag{34}$$

$$J<\mathrm{tr}(Z) \tag{35}$$

那么就有下面的推论.

推论 1. 若下列条件之一成立, 那么系统 (6) 是均方指数稳定的, 且满足 H_2 性能约束 (8).

1) 如果存在正定对称阵 $\hat{P}$、Z, 使得

$$\begin{bmatrix}-\hat{P} & * & * & * & * & *\\ \hat{P}A_{cl0} & -\hat{P} & * & * & * & *\\ a\hat{P}A_{cl1} & 0 & -a\hat{P} & * & * & *\\ b\hat{P}A_{cl2} & 0 & 0 & -b\hat{P} & * & *\\ C_{cl0} & 0 & 0 & 0 & -I & *\\ aC_{cl1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI\end{bmatrix}<0 \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ \hat{P}B_{cl0} & -\hat{P} & * \\ b\hat{P}B_{cl1} & 0 & -b\hat{P} \end{bmatrix} < 0 \tag{37}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{38}$$

2) 如果存在正定对称阵 $\hat{Q}$、Z, 使得

$$\begin{bmatrix} -\hat{Q} & * & * & * & * & * \\ \hat{Q}A_{cl0}^{\mathrm{T}} & -\hat{Q} & * & * & * & * \\ a\hat{Q}A_{cl1}^{\mathrm{T}} & 0 & -a\hat{Q} & * & * & * \\ b\hat{Q}A_{cl2}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -b\hat{Q} & * & * \\ B_{cl0}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ bB_{cl1}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -bI \end{bmatrix} < 0 \tag{39}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ \hat{Q}C_{cl0}^{\mathrm{T}} & -\hat{Q} & * \\ a\hat{Q}C_{cl1}^{\mathrm{T}} & 0 & -a\hat{Q} \end{bmatrix} < 0 \tag{40}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{41}$$

下面给出使得系统 (6) 均方指数稳定且满足 H_2 性能约束 (8) 的另一种充分条件, 该条件和推论 1 的条件是等价的, 证明的方法可参见文献 [6] 定理 2 的证明.

定理 3. 若下列条件之一成立, 那么系统 (6) 是均方指数稳定的, 且满足 H_2 性能约束 (8).

1) 如果存在正定对称阵 $\hat{P}$、Z, 矩阵 G 使得

$$\begin{bmatrix} -\hat{P} & * & * & * & * & * \\ G^{\mathrm{T}}A_{cl0} & \Xi & * & * & * & * \\ aG^{\mathrm{T}}A_{cl1} & 0 & a\Xi & * & * & * \\ bG^{\mathrm{T}}A_{cl2} & 0 & 0 & b\Xi & * & * \\ C_{cl0} & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ aC_{cl1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0 \tag{42}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ G^{\mathrm{T}}B_{cl0} & \Xi & * \\ bG^{\mathrm{T}}B_{cl1} & 0 & b\Xi \end{bmatrix} < 0 \tag{43}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{44}$$

其中 $\Xi = \hat{P} - G - G^{\mathrm{T}}$.

2) 如果存在正定对称阵 $\hat{P}$、Z, 矩阵 G 使得

$$\begin{bmatrix} \hat{P} - G - G^{\mathrm{T}} & * & * & * & * & * \\ A_{cl0}^{\mathrm{T}}G & -\hat{P} & * & * & * & * \\ aA_{cl1}^{\mathrm{T}}G & 0 & -a\hat{P} & * & * & * \\ bA_{cl2}^{\mathrm{T}}G & 0 & 0 & -b\hat{P} & * & * \\ B_{cl0}^{\mathrm{T}}G & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ bB_{cl1}^{\mathrm{T}}G & 0 & 0 & 0 & 0 & -bI \end{bmatrix} < 0 \tag{45}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ C_{cl0}^{\mathrm{T}} & -\hat{P} & * \\ aC_{cl1}^{\mathrm{T}} & 0 & -a\hat{P} \end{bmatrix} < 0 \tag{46}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{47}$$

注 2. 式 (36) 和 (42), 式 (37) 和 (43), 式 (39) 和 (45), 式 (40) 和 (46) 是等价的. 它们的不同在于式 (36), (37), (39) 和 (40) 中系统矩阵和 Lyapunov 阵存在耦合, 而式 (42), (43), (45) 和 (46) 中系统矩阵和 Lyapunov 阵不存在耦合而是同一个自由矩阵 G 相乘, 这在确定系统中, 推论 1 和定理 3 的保守性是一样的, 但是定理 3 在解决凸多面体不确定时能够减少保守性[12]. 作者研究发现直接采用推论 1 和矩阵变换技术[13] 是无法得到控制器的设计方法的, 因此在控制器设计中将采用定理 3 来推导控制器的设计方法.

3 控制器设计

本节利用定理 3 给出控制器存在的充分条件, 证明方法可参见文献 [14].

定理 4. 给定常数 $\gamma > 0$. 如果存在矩阵 $\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \tilde{H}_2 & \tilde{H}_3 \end{bmatrix} > 0$, $\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \bar{H}_2 & \bar{H}_3 \end{bmatrix} > 0$, $\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \end{bmatrix} > 0$, $\hat{A}_K$, $\hat{B}_K$, $\hat{C}_K$, X, S 和 Y, 使得式 (48)~(52) 成立.

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * & * & * \\ B_1 & \hat{R}_1 & * & * & * \\ B_1 + \bar{\beta}\hat{B}_K D_{21} & \hat{R}_{21} & \hat{R}_{31} & * & * \\ bB_1 & 0 & 0 & b\hat{R}_1 & * \\ b\hat{B}_K D_{21} & 0 & 0 & b\hat{R}_{21} & b\hat{R}_{31} \end{bmatrix} < 0 \tag{49}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & * & * & * \\ \tilde{H}_2 & \tilde{H}_3 & * & * \\ Y^{\mathrm{T}} & 0 & \hat{H}_1 & * \\ 0 & X^{\mathrm{T}} & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{50}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{51}$$

$$\tilde{H}\bar{H} = I \tag{52}$$

其中 $\Upsilon = A + \bar{\beta}\hat{B}_K C_2 + \bar{\alpha}B_2\hat{C}_K + \hat{A}_K$, $\hat{R}_1 = \hat{H}_1 - Y - Y^{\mathrm{T}}$, $\hat{R}_{21} = \hat{H}_2 - X^{\mathrm{T}} - S - Y$, $\hat{R}_{31} = \hat{H}_3 - X - X^{\mathrm{T}}$. 那么系统 (6) 是均方指数稳定的且满足 H_2 性能约束 (8). 进而, 控制器参数可由下式求取

$$A_K = YS^{-1}\hat{A}_K, B_K = YS^{-1}\hat{B}_K, C_K = \hat{C}_K \tag{53}$$

定理 5. 给定常数 $\gamma > 0$. 如果存在矩阵 $\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \tilde{H}_2 & \tilde{H}_3 \end{bmatrix} > 0$, $\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \bar{H}_2 & \bar{H}_3 \end{bmatrix} > 0$, $\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \end{bmatrix} > 0$, $\hat{A}_K$, $\hat{B}_K$, $\hat{C}_K$, X, S 和 Y, 使得式 (54)~(58) 成立.

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * & * & * \\ C_1^{\mathrm{T}} + \bar{\alpha}\hat{C}_K^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} & -\bar{H}_1 & * & * & * \\ C_1^{\mathrm{T}} & -\bar{H}_2 & -\bar{H}_3 & * & * \\ a\hat{C}_K^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -a\bar{H}_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & -a\bar{H}_2 & -a\bar{H}_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{54}$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{H}_1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ -\bar{H}_2 & -\bar{H}_3 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ A+\bar{\alpha}B_2\hat{C}_K & A & \hat{R}_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ \Upsilon & A+\bar{\beta}\hat{B}_K C_2 & \hat{R}_{21} & \hat{R}_{31} & * & * & * & * & * & * \\ aB_2\hat{C}_K & 0 & 0 & 0 & a\hat{R}_1 & * & * & * & * & * \\ aB_2\hat{C}_K & 0 & 0 & 0 & a\hat{R}_{21} & a\hat{R}_{31} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\hat{R}_1 & * & * & * \\ b\hat{B}_K C_2 & b\hat{B}_K C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\hat{R}_{21} & b\hat{R}_{31} & * & * \\ C_1+\bar{\alpha}D_{12}\hat{C}_K & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ aD_{12}\hat{C}_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0 \tag{48}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \hat{R}_{21} & \hat{R}_{31} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ A^{\mathrm{T}}+\bar{\alpha}\hat{C}_K^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & \Upsilon^{\mathrm{T}} & -\bar{H}_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ A^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}}+\bar{\beta}C_2^{\mathrm{T}}\hat{B}_K^{\mathrm{T}} & -\bar{H}_2 & -\bar{H}_3 & * & * & * & * & * & * \\ a\hat{C}_K^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & a\hat{C}_K^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -a\bar{H}_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a\bar{H}_2 & -a\bar{H}_3 & * & * & * & * \\ 0 & bC_2^{\mathrm{T}}\hat{B}_K^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b\bar{H}_1 & * & * & * \\ 0 & bC_2^{\mathrm{T}}\hat{B}_K^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b\bar{H}_2 & -b\bar{H}_3 & * & * \\ B_1^{\mathrm{T}} & B_1^{\mathrm{T}}+\bar{\beta}D_{21}^{\mathrm{T}}\hat{B}_K^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & bD_{21}^{\mathrm{T}}\hat{B}_K^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -bI \end{bmatrix} < 0 \tag{54}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & * & * & * \\ \tilde{H}_2 & \tilde{H}_3 & * & * \\ Y^{\mathrm{T}} & 0 & \hat{H}_1 & * \\ 0 & X^{\mathrm{T}} & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{56}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{57}$$

$$\tilde{H}\bar{H} = I \tag{58}$$

其中 $\Upsilon = A+\bar{\beta}\hat{B}_K C_2+\bar{\alpha}B_2\hat{C}_K+\hat{A}_K$, $\hat{R}_1=\hat{H}_1-Y-Y^{\mathrm{T}}$, $\hat{R}_{21}=\hat{H}_2-X^{\mathrm{T}}-S-Y$, $\hat{R}_{31}=\hat{H}_3-X-X^{\mathrm{T}}$. 那么系统 (6) 是均方指数稳定的且满足 H_2 性能约束 (8). 进而, 控制器参数可由式 (53) 求取.

注 3. 式 (52) 和 (58) 是等式约束, 可以转化为下述条件: 如果 $\tilde{H}>0$, $\bar{H}>0$, 且

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} & I \\ I & \bar{H} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{59}$$

则 $\mathrm{tr}(\tilde{H}\bar{H}) \geq 2n$, 且 $\mathrm{tr}(\tilde{H}\bar{H}) = 2n$ 当且仅当 $\tilde{H}\bar{H}=I$. 这样就可以应用 SLPMM (Sequential linear programming matrix method)[15] 来进行求解, 据此可得到下列算法:

算法 1.

第 1 步. 给定最大迭代次数 N, 误差精度 ϵ;

第 2 步. 寻找满足式 (48)~(50), (59)(或式 (54)~(56), (59)) 的一组可行解, 并令 $\tilde{H}^{(k)}=\tilde{H}, \bar{H}^{(k)}=\bar{H}, k=0$;

第 3 步. 寻求最优解 $\tilde{H}$, $\bar{H}$, $\hat{H}$, $\hat{A}_K$, $\hat{B}_K$, $\hat{C}_K$, X, S 和 Y, 使得具有半正定约束的目标函数最小

$$\begin{aligned} &\min\ \mathrm{tr}\,(\tilde{H}\bar{H}^k+\tilde{H}^k\bar{H}+Z) \\ &\text{s.t.}\ (48)\sim(50), (59) \\ &\text{or} \\ &\text{s.t.}\ (54)\sim(56), (59) \end{aligned} \tag{60}$$

第 4 步. 如果

$$|\mathrm{tr}(\tilde{H}\bar{H}^{(k)}+\tilde{H}^{(k)}\bar{H})-4n| \leq \epsilon$$

那么输出可行解, 迭代结束;

第 5 步. 如果 $k>N$, 迭代结束;

第 6 步. 计算 $\rho^* \in [0,1]$ 满足

$$\min_{\rho\in[0,1]} \{\mathrm{tr}((\tilde{H}^{(k)}+\rho(\tilde{H}-\tilde{H}^{(k)}))(\bar{H}^{(k)}+\rho(\bar{H}-\bar{H}^{(k)})))\}$$

第 7 步. 计算下一步的迭代初值

$$\tilde{H}^{(k)}=\tilde{H}^{(k)}+\rho^*(\tilde{H}-\tilde{H}^{(k)}),\quad \bar{H}^{(k)}=\bar{H}^{(k)}+\rho^*(\bar{H}-\bar{H}^{(k)}))$$

且 $k=k+1$, 返回第 3 步.

4 数值例子

考虑一不间断电源系统, 其离散化后系统的参数如下[10]:

$$A=\begin{bmatrix} 0.9226 & -0.6330 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix} 23.738 & 20.287 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12}=0,\quad D_{21}=0.$$

假设测量数据丢失的概率 $P\{\beta(k)=0\}=0.1$ 和控制数据丢失的概率 $P\{\alpha(k)=0\}=0.1$, 那么根据注 3 所给算法 1 解优化问题 (60), 求解过程中采用 YALMIP[16] 工具箱来求解, 其中的求解器选用的是 Lmilab 求解器, 可得 H_2 上界为 0.2896 时的控制器为:

$$A_K=\left[\begin{array}{ccc} -0.2013 & -0.1955 & -0.0078 \\ 0.5400 & -0.1125 & 0.0057 \\ 0.2596 & 0.5013 & 0.0162 \end{array}\right],$$

$$B_K=\left[\begin{array}{c} 0.0092 \\ 0.0142 \\ 0.0029 \end{array}\right],\ C_K=\left[\begin{array}{ccc} -1.0564 & 0.8341 & 0.0037 \end{array}\right].$$

5 结论

本文研究了同时具有测量数据和控制数据丢失的网络控制系统的 H_2 输出反馈控制问题, 采用满足 Bernoulli 分布的随机变量来描述数据的随机丢失, 利用矩阵不等式方法给出了动态输出反馈控制问题可解的充分条件, 并利用 SLPMM 给出了相应的控制器求解算法.

References

1 Chen Y M, Huang H C. Multisensor data fusion for manoeuvring target tracking. *International Journal of Systems Science*, 2001, **32**(2): 205−214

2 Albertos P, Sanchis R, Sala A. Output prediction under scarce data operation: control applications. *Automatica*, 1999, **35**(10): 1671−1681

3 Pintelon R, Schoukens J. Frequency domain system identification with missing data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(2): 364−369

4 Nahi N E. Optimal recursive estimation with uncertain observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, **15**(4): 457−462

5 Wang Z D, Yang F W, Ho D W C, Liu X H. Robust H_∞ filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(7): 2579−2587

6 Wang Wu, Yang Fu-Wen. H_∞ filtering design for discrete-time systems with missing measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 107−111
(王武, 杨富文. 具有测量数据部分丢失的离散系统的 H_∞ 滤波器设计. 自动化学报, 2006, **32**(1): 107−111)

7 Savkin A V, Petersen I R, Moheimani S O R. Model validation and state estimation for uncertain continuous-time systems with missing discrete-continuous data. *Computers and Electrical Engineering*, 1999, **25**(1): 29−43

8 Seiler P, Sengupta R. An H_∞ approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 356−364

9 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetii M, Poolla K, Sastry S. An LQG optimal linear controller for control systems with packet losses. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and 2005 European Control Conference. Seville, Spain: IEEE, 2005. 458−463

10 Yang F W, Wang Z D, Hung Y S, Gani M. H_∞ control for networked systems with random communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 511−518

11 Yaz Y I, Yaz E E. On LMI formulations of some problems arising in nonlinear stochastic system analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(4): 813−816

12 Gao H J, Lam J, Xie L H, Wang C H. New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(8): 3183−3192

13 Scherer C, Gahient P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(7): 896−911

14 Wang Wu, Lin Qiong-Bin, Yang Fu-Wen. H_∞ output feedback control for networked control system with data missing. *Information and Control*, 2007, **36**(3): 285−292
(王武, 林琼斌, 杨富文. 具有数据丢失的网络控制系统的 H_∞ 输出反馈控制. 信息与控制, 2007, **36**(3): 285−292)

15 Leibfritz F. An LMI-based algorithm for designing suboptimal static H_2/H_∞ output feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, **39**(6): 1711−1735

16 Lofberg J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in Matlab. In: Proceedings of 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, Taiwan: IEEE, 2004. 284−289

王 武 福州大学电气工程与自动化学院副教授, 博士. 主要研究方向为鲁棒控制与滤波, 非脆弱控制, 可靠控制. 本文通信作者. E-mail: wangwu@fzu.edu.cn.
(**WANG Wu** Associate professor at Fuzhou University. He received his Ph. D. degree from Fuzhou University. His research interest covers robust control and filtering, non-fragile control, and reliable control. Corresponding author of this paper.)

詹耀清 福州大学电气工程与自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为网络化控制系统设计. E-mail: zyq5203@163.com
(**ZHAN Yao-Qing** Master student at Fuzhou University. His research interest covers controller design for networked control system.)

杨富文 福州大学电气工程与自动化学院教授, 博士. 主要研究方向为鲁棒控制, 信号处理, 迭代学习控制, 非脆弱控制, 工业实时控制和电力电子技术. E-mail: fwyang@fzu.edu.cn
(**YANG Fu-Wen** Professor at Fuzhou University. He received his Ph. D. degree from Huazhong University of Science and Technology. His research interest covers robust control, signal processing, iterative learning control, non-fragile control, industrial real-time control, and power electronics.)