# 具有优先权的 M/G/1 重试可修排队系统

朱翼隽[1]　周宗好[1]　冯艳刚[1]

**摘　要**　在服务台忙的情况下,到达服务台的顾客以概率$q$进入无限位置的优先队列而以概率$p$进入无限位置的重试轨道(orbit),并且按照先到先服务(FCFS)规则排队,假定只有队首的顾客允许重试,同时考虑服务台可修的因素,证明了系统稳态解存在的充要条件.利用补充变量法求得稳态时两个队列与系统的平均队长、顾客等待时间、服务台的各种状态概率以及可靠性指标.

**关键词**　马氏链,稳态分布,可修,优先权队列,重试轨道

**中图分类号**　TP110.74

## M/G/1 Retrial Queue System with Priority and Repair

ZHU Yi-Juan[1]　ZHOU Zong-Hao[1]　FENG Yan-Gang[1]

**Abstract**　Arriving customers who find the server busy join the infinite priority queue with probability $q$ and join the infinite retrial group (orbit) with complementary probability $p$ in accordance with an FCFS discipline. The necessary and sufficient condition for the stability of the system is obtained, assuming that only the customer at the head of the orbit is allowed to retry for service and considering the factor of server breakdowns. The steady-state distributions of the numbers of customers in the priority queue, the orbit, and the system are obtained, along with average waiting times with the method of VMP. The main reliability indices of server, the probability that the server is idle, the service and the repair are also derived.

**Key words**　Markov chain, steady-state distribution, repairable, priority queue, orbit

重试排队系统的特征就是当顾客到达服务台发现服务台忙时,则必须离开服务区域一段时间后再次要求服务.在经典的重试策略的排队系统中,每个重试顾客重试时间间隔相互独立,且服从负指数分布.但是, 1986年Fayolle[1]调查了M/M/1的电话交换机模型发现:在重试组中只有队首的顾客允许重试,该重试组被Farahmand[2]称作先到先服务重试轨道(FCFS orbit),这种重试策略在通信网络和计算机网络有着广泛的应用, Choi在文献[3−4] 中分别讨论了其在通信网络ALOHA和CSMA/CD协议中的应用.

但是,上面的文献均假设服务台是无故障的,这显然与实际不符,例如,在给计算机输入指令或者通信系统在传输数据时,系统发生故障而需修理.早在1979年Shogan[5]与Neuts等[6]就分别研究了单服务台和多服务台可修排队系统,但均仅限于一些排队指标的研究,直到1982年曹晋华等[7]从可靠性的角度全面地分析了一些可靠性指标.此后,关于服务台可修排队系统的研究中,不但讨论排队指标而且也从可靠性角度对其分析.最近, 岳德权等[8−9]从收益的角度出发,把修理工可以进行多重休假和服务员不可靠的排队系统归结为可修排队系统进行研究,得到了许多有用的可靠性指标,拓宽了可修排队系统的研究领域.由于随机故障在具有重试性能的通信网络和计算机系统中是不可避免的, 因此, Wang等[10−11]研究了重试时间间隔服从负指数分布和一般分布的重试可修排队系统,并且得到了全面的可靠性指标.

在实际生活的许多方面都存在一些含有优先权服务的问题,比如在邮寄包裹的时候,加急件和特快件比普通信件享有优先处理的权利;在计算机、电信领域, 为了满足某种需要,有些信息必须比其他信息得到更为迅速有效的处理,这些信息相对于其他一般信息来说,就具有优先权等等.因此,优先权排队系统被广泛地研究, Choi[12]总结了五种不同背景的具有优先权的重试排队模型,胡根生等[13]研究了优先权机制在通信网络中的应用,此外, Moreno[14]还求得了具有优先权的重试排队系统许多排队指标,但均没有考虑可修的因素,服务台的随机故障是不可避免的,而且故障的修理会影响系统的排队指标,同时可靠性指标也是服务台性能和服务质量的重要指标,因此不可忽略.

本文研究了具有FCFS orbit、非强占型优先权的M/G/1可修排队系统,它在通信与计算机系统中有着重要的应用,例如,在电话交换机系统中,当一个呼入或者呼出电话到达时服务台空闲,则立即占据

收稿日期 2006-12-04　收修改稿日期 2007-09-12
Received December 4, 2006; in revised form September 12, 2007
国家自然科学基金(70571030, 10571076)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (70571030, 10571076)
1.江苏大学理学院 镇江 212013
1. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00195

服务台接受服务;若服务台在忙或者修理时,则呼出电话进入缓冲器按到达的先后顺序排队等待,而呼入电话受阻则进入重试区域等待重试, 当服务台空闲时缓冲器里呼出电话优先被服务.考虑到交换机的随机故障, 该模型可以归结为具有优先权的重试可修排队系统,本文给出了遍历性条件的证明,并且利用补充变量法求得该模型的各项排队指标和可靠性指标,利用这些指标可以优化系统.

## 1 模型描述

1) 顾客到达过程服从参数为$\lambda$ 的poisson流,假定系统无等待位置,顾客到达时服务台空闲,则立即占据服务台,否则以概率$q$进入优先权队列,而以概率$p=1-q$进入重试轨道;假定两个队列的容量都为无穷,按FCFS规则排队.

2) 在重试轨道中只有队首的顾客允许重试,重试时间间隔服从参数为$\sigma$的负指数分布.

3) 顾客的服务时间服从一般分布函数$A(x)$, $a(x)$、$\widetilde{A}(x)$、$\alpha_1$、$\alpha_2$ 分别表示其密度函数、拉普拉斯司梯阶变换(LST)、一阶矩、二阶矩.

4) 系统只有在服务时间里才发生故障,失效率为$\mu$,且修复如新,顾客已经服务过的时间有效;修理时间服从一般分布$B(x)$, $b(x)$、$\widetilde{B}(x)$、$\beta_1$、$\beta_2$分别表示其密度函数、拉普拉斯司梯阶变换(LST)、一阶矩、二阶矩.本文考虑“广义服务时间”为:顾客从接受服务开始到服务结束的时间,它包括服务期间的修理时间.

5) 假定顾客的到达过程、重试时间间隔、服务时间和服务台修理时间相互独立,当一个服务结束时,如果优先权队列有顾客则立即服务优先权队列的顾客,否则新到达的顾客与重试轨道中的顾客按先到先服务竞争接受服务.

6) 系统任意时刻的状态可由马尔可夫过程$\{C(t),\ N_1(t),\ N_2(t),\ \xi_1(t),\ \xi_2(t)\}$表示,其中$C(t)$表示服务台所处的状态(0、1、2分别表示在$t$时刻服务台处于空闲、服务、修理状态), $N_1(t)$和$N_2(t)$分别表示在$t$时刻优先权队列与重试轨道中的顾客数;当$C(t)=1$时, $\xi_1(t)$表示在时刻$t$逝去的服务时间;当$C(t)=2$时, $\xi_2(t)$表示在时刻$t$逝去的修理时间.根据上述假设,马尔可夫过程的状态空间为$S=\{0,1,2\}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times[0,\infty)\times[0,\infty)$, 令$\alpha(x)$, $\beta(x)$ 分别表示在$x$时刻服务、修理的风险率函数,即有

$$\alpha(x)=\frac{a(x)}{1-A(x)}\qquad \beta(x)=\frac{b(x)}{1-B(x)}$$

## 2 稳态条件分析及证明

设$\tau_d$表示第$d$个顾客离开系统的时刻, $N_{1,d}=N_1(\tau_d+0)$与$N_{2,d}=N_2(\tau_d+0)$分别表示在$\tau_d$前优先权队列与重试轨道中的顾客数,则$\{x_d=N_{1,d}+N_{2,d}, d\in\mathbf{N}\}$为状态空间$\mathbf{N}$上的嵌入马氏链,因此有

$$N_{1,\,d}=\begin{cases} N_{1,\,d-1}-1+v_{1,\,d} & \text{当 } N_{1,\,d-1}\geq 1\\ v_{1,\,d} & \text{当 } N_{1,\,d-1}=0\end{cases}\tag{1}$$

$$N_{2,\,d}=\begin{cases} N_{2,\,d-1}+v_{2,\,d} & \text{当 } N_{1,\,d-1}\geq 1\\ N_{2,\,d-1}-B_d+v_{2,\,d} & \begin{cases}\text{当}N_{1,\,d-1}=0\\ \text{且}N_{2,\,d-1}\geq 1\end{cases}\\ v_{2,\,d} & \begin{cases}\text{当}N_{1,\,d-1}=0\\ \text{且}N_{2,\,d-1}=0\end{cases}\end{cases}\tag{2}$$

这里: $B_d=1$当且仅当第$d$个被服务的顾客来自重试轨道;否则$B_d=0$; $v_{1,\,d}$、$v_{2,\,d}$ 分别表示在第$d$个“广义服务时间”里到达优先权队列与重试轨道中的顾客数.

设$G_n$表示第$n$个顾客的“广义服务时间”,则$G_n$是一列独立同分布的随机变量[7]且分布函数为

$$D(t)=P\{G_n\leq t\}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}B^{(n)}(t-u)\mathrm{e}^{-\mu u}\frac{\mu u}{n!}\mathrm{d}A(u)$$

它的Laplace-Stieltjes变换为

$$\widetilde{D}(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}D(t)=\widetilde{A}(s+\mu-\mu\widetilde{B}(s))$$
$$\mathrm{Re}(s)>0$$

且它的数学期望为

$$\mathrm{E}(G_n)=\frac{-\mathrm{d}\widetilde{D}(s)}{\mathrm{d}s}|_{s=0}=\alpha_1(1+\mu\beta_1)$$

因此$v_{1,\,d}$、$v_{2,\,d}$的数学期望分别为

$$\mathrm{E}(v_{1,\,d})=\frac{\mathrm{d}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda qx)^j}{j!}\mathrm{e}^{\lambda qx}\mathrm{d}D(x)z^j)}{\mathrm{d}z}|_{z=1}=\rho q\tag{3}$$

$$\mathrm{E}(v_{2,\,d})=\frac{\mathrm{d}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda px)^j}{j!}\mathrm{e}^{\lambda px}\mathrm{d}D(x)z^j)}{\mathrm{d}z}|_{z=1}=\rho p\tag{4}$$

其中$\rho=\lambda(1+\mu\beta_1)\alpha_1$,设

$$k_{m,n}=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda qx)^m}{m!}\frac{(\lambda px)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}D(x)$$

为在一个广义服务时间里到达的优先权顾客数与重试轨道中的顾客数的联合分布函数,容易得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}k_{m,n}z_1^m z_2^n=\widetilde{D}(\lambda-\lambda qz_1-\lambda pz_2)=$$

$$\widetilde{A}(\lambda+\mu-\lambda qz_1-\lambda pz_2-\mu\widetilde{B}(\lambda-\lambda qz_1-\lambda pz_2)) \quad (5)$$

本文后面记:
$*=\lambda+\mu-\lambda qz_1-\lambda pz_2-\mu\widetilde{B}(\lambda-\lambda qz_1-\lambda pz_2)$

**定理 1.** 以$\{x_d,d\in\mathbf{N}\}$表示第$d$个顾客服务完成离开系统时系统中的顾客数,则$\{x_d,d\in\mathbf{N}\}$是遍历的,当且仅当不等式$\rho<\sigma/(\lambda p+\sigma)$成立.

**证明**. 显然$\{x_d,d\in\mathbf{N}\}$为一个不可约、非周期的马氏链,由Foster准则[15]:一个不可约、非周期的马尔可夫链是遍历的,当且仅当存在一个非负函数$f(j),j\in\mathbf{N}$及$\varepsilon>0$,使得

$$x_j=\mathrm{E}[f(x_d)-f(x_{d-1})|x_{d-1}=j]$$

对所有的自然数$\mathbf{N}$有限,除有限个自然数外几乎所有的$j\in\mathbf{N}$都有$x_j\le-\varepsilon$.

令$f(m+n)=\theta m+n$,这里$\theta$是一个待定的正参数, $m$为优先权队列中的顾客数, $n$为重试轨道中的顾客数,同时考虑到式(3)和(4),那么有

$$x_{m+n}=\mathrm{E}[f(x_d)-f(x_{d-1})|x_{d-1}=m+n]=$$

$$\begin{cases}\theta\rho q+\rho p & \text{当 } m=0 \text{ 且 } n=0\\ \theta\rho q+\rho p-\dfrac{\sigma}{\lambda+\sigma} & \text{当 } m=0 \text{ 且 } n\ge1\\ \rho p-\theta(1-\rho q) & \text{当 } m\ge1 \text{ 且 } n\ge0\end{cases}$$

当下列条件被满足,则马尔可夫链$\{x_d,d\in\mathbf{N}\}$是正常返的.

$$\theta\rho q+\rho p-\frac{\sigma}{\lambda+\sigma}<0 \qquad \rho p-\theta(1-\rho q)<0$$

那么$\theta\in[\frac{\rho p}{1-\rho q},\frac{\sigma-(\lambda+\sigma)\rho p}{(\lambda+\sigma)\rho q}]$,这样的$\theta$存在的充要条件是

$$\frac{\rho p}{1-\rho q}<\frac{\sigma-(\lambda+\sigma)\rho p}{(\lambda+\sigma)\rho q} \qquad \text{即 } \rho<\frac{\sigma}{\lambda p+\sigma} \quad (6)$$

故若不等式$\rho<\sigma/(\lambda p+\sigma)$成立,由Foster准则知,嵌入马氏链$\{x_d,d\in\mathbf{N}\}$为遍历链.

记$\pi_{i,j}=\lim_{d\to\infty}P[N_{1,d}=i,N_{2,d}=j]$为马氏链$\{x_d,d\in\mathbf{N}\}$的平稳分布,那么其一步转移概率为

$$\begin{aligned}&P_{(0,0)(i,j)}=k_{i,j}\\&P_{(0,n)(i,j)}=(1-\frac{\sigma}{\lambda+\sigma})k_{i,j-n}+\frac{\sigma}{\lambda+\sigma}k_{i,j-n+1}\\&\qquad n=1,2,\cdots,j\\&P_{(0,j+1)(i,j)}=\frac{\sigma}{\lambda+\sigma}k_{i,0}\\&P_{(m,n)(i,j)}=k_{i-m+1,j-n}\\&\qquad m=1,2,\cdots i+1,\ \ n=0,1,\cdots,j\end{aligned}$$

运用Kolmogorov方程有

$$\pi_{i,j}=$$

$$\pi_{0,0}k_{i,j}+(1-\delta_{0j})(1-\frac{\sigma}{\lambda+\sigma})\sum_{n=1}^{j}\pi_{0,n}k_{i,j-n}+$$

$$\frac{\sigma}{\lambda+\sigma}\sum_{n=1}^{j+1}\pi_{0,n}k_{i,j-n+1}+\sum_{m=1}^{i+1}\sum_{n=0}^{j}\pi_{m,n}k_{i-m+1,j-n}$$

$$i\ge0 \quad j\ge0 \quad (7)$$

记

$$\Phi(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{i,j}z_1^i z_2^j \qquad \Phi(z_2)=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0,j}z_2^j$$

把式(7)两边同时乘以$z_1^i z_2^j$,并把$i,j$从0到$\infty$依次相加求和,同时考虑到式(5),则Kolmogorov方程变为

$$\frac{z_1-\widetilde{A}(*)}{\widetilde{A}(*)}\Phi(z_1,z_2)=$$

$$\frac{(\lambda z_2+\sigma)z_1-(\lambda+\sigma)z_2}{(\lambda+\sigma)z_2}\Phi(z_2)-(1-z_1)\pi_{0,0} \quad (8)$$

令

$$f(z_1,z_2)=z_1-\widetilde{A}(*) \quad (9)$$

固定$z_2$且$|z_2|<1$,那么$f(z_1,z_2)$是关于$z_1$的函数;设$|z_1|=1$,则有: $\mathrm{Re}(*)>0$ 即$|\widetilde{A}(*)|<1$,所以有$|z_1-(z_1-\widetilde{A}(*))|=|\widetilde{A}(*)|<1=|z_1|$.

根据Rouche定理知方程$f(z_1,z_2)=0$在单位圆内存在唯一解$z_1=g(z_2)$, 那么在单位圆内方程$f(z_1,z_2)=0$可变为

$$f(g(z_2),z_2)=g(z_2)-\widetilde{A}(\lambda+\mu-\lambda qg(z_2)-\lambda pz_2-\mu\widetilde{B}(\lambda-\lambda qg(z_2)-\lambda pz_2))=0$$

容易算出

$$g(1)=1 \quad (10)$$

$$g'(1)=\frac{\rho p}{1-\rho q} \quad (11)$$

$$g''(1)=\frac{\lambda^2p^2[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]}{(1-\rho q)^3} \quad (12)$$

把$z_1 = g(z_2)$代入式(8),得

$$\Phi(z_2) = \frac{(\lambda+\sigma)z_2(1-g(z_2))}{(\lambda z_2+\sigma)z_1-(\lambda+\sigma)z_2}\pi_{0,0} \tag{13}$$

把式(13)代入式(8),得

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{z_1-g(z_2)}{z_1-\widetilde{A}(*)}\frac{\sigma(1-z_2)\widetilde{A}(*)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2}\pi_{0,0}$$

运用正则性条件$\Phi(1,1) = 1$,可得

$$\pi_{0,0} = 1 - \frac{\lambda p+\sigma}{\sigma}\rho$$

显然可得$\rho < \sigma/(\lambda p+\sigma)$也是马尔可夫链$\{x_d, d \in \mathbf{N}\}$正常返的必要条件. □

根据前面的模型描述知:该系统可以归结为$M/\widetilde{G}/1$系统,其中$\widetilde{G}$为广义服务时间,由于系统的到达过程为poisson流,由Burke定理[16]知,马尔可夫过程$\{C(t), N_1(t), N_2(t), \xi_1(t), \xi_2(t)\}$ 的稳态概率分布存在当且仅当$\rho < \sigma/(\lambda p+\sigma)$成立.

## 3 模型求解及相关指标

若系统满足不等式$\rho < \sigma/(\lambda p+\sigma)$时,令

$$P_{0,j}^{(0)} = \lim_{t\to\infty} P[C(t) = 0, N_1(t) = 0, N_2(t) = j] \quad t \geq 0, j \geq 0$$

$$P_{i,j}^{(1)}(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} P[C(t) = 1, N_1(t) = i, N_2(t) = j, x \leq \xi_1(t) \leq x+\mathrm{d}x] \quad t \geq 0, i \geq 0, j \geq 0, x \geq 0$$

$$P_{i,j}^{(2)}(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{t\to\infty} P[C(t) = 2, N_1(t) = i, N_2(t) = j, \xi_1(t) = x, y \leq \xi_2(t) \leq y+\mathrm{d}y] \quad t \geq 0, i \geq 0, j \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$$

由补充变量法可得到下列微分方程组

$$\lambda P_{0,j}^{(0)} + (1-\delta_{0j})\sigma P_{0,j}^{(0)} = \int_0^\infty P_{0,j}^{(1)}(x)\alpha(x)\mathrm{d}x \quad j \geq 0 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{i,j}^{(1)}(x) = -(\lambda+\alpha(x)+\mu)P_{i,j}^{(1)}(x) + (1-\delta_{0i})\lambda q P_{i-1,j}^{(1)}(x) + (1-\delta_{0j})\lambda p P_{i,j-1}^{(1)}(x) + \int_0^\infty P_{i,j}^{(2)}(x,y)\beta(y)\mathrm{d}y \quad i \geq 0, j \geq 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}P_{i,j}^{(2)}(x,y) = -(\lambda+\beta(y))P_{i,j}^{(2)}(x,y) + (1-\delta_{0i})\lambda q P_{i-1,j}^{(2)}(x,y) + (1-\delta_{0j})\lambda p P_{i,j-1}^{(2)}(x,y) \quad i \geq 0, j \geq 0 \tag{16}$$

边界条件为

$$P_{0,j}^{(1)}(0) = \delta_{0i}\lambda P_{0,j}^{(0)} + \delta_{0i}\sigma P_{0,j+1}^{(0)} + \int_0^\infty P_{i+1,j}^{(1)}(x)\alpha(x)\mathrm{d}x \quad i \geq 0, j \geq 0 \tag{17}$$

$$P_{i,j}^{(2)}(x,0) = \mu P_{i,j}^{(1)}(x) \quad i \geq 0, j \geq 0 \tag{18}$$

正则性条件为

$$\sum_{j=0}^\infty P_{0,j}^{(0)} + \sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty P_{i,j}^{(1)}(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty P_{i,j}^{(2)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \tag{19}$$

令

$$P_0(z_2) = \sum_{j=1}^\infty P_{0,j}^{(0)} z_2^j$$

$$P_1(x, z_1, z_2) = \sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty P_{i,j}^{(1)}(x) z_1^i z_2^j$$

$$P_2(x, y, z_1, z_2) = \sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty P_{i,j}^{(2)}(x,y) z_1^i z_2^j$$

利用上面的式(14)~(19),讨论系统的稳态分布.

**定理 2.** 若$\rho < \sigma/(\lambda p+\sigma)$成立,则有

$$P_0(z_2) = \frac{\sigma(g(z_2)-z_1)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2}P_{0,0}^{(0)} \tag{20}$$

$$P_1(x, z_1, z_2) = \frac{\lambda\sigma(1-z_2)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2} \times \frac{z_1-g(z_2)}{z_1-\widetilde{A}(*)}[1-A(x)]\mathrm{e}^{-(*)x}P_{0,0}^{(0)} \tag{21}$$

$$P_2(x, y, z_1, z_2) = \frac{\lambda\sigma(1-z_2)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2} \times \frac{\mu(z_1-g(z_2))}{z_1-\widetilde{A}(*)}[1-A(x)]\mathrm{e}^{-(*)x} \times [1-B(y)]\mathrm{e}^{-(\lambda-\lambda q z_1-\lambda p z_2))y}P_{0,0}^{(0)} \tag{22}$$

其中

$$P_{0,0}^{(0)} = 1 - \frac{\lambda p+\sigma}{\sigma}\rho \tag{23}$$

**证 明**. 把微分方程(14)∼(18)两边同时乘以$z_1^i z_2^j$,并把$i,j$从0到∞依次相加求和,得微分方程(24)∼(28).

$$(\lambda+\sigma)P_0(z_2)-\sigma P_{0,0}^{(0)}=\int_0^\infty P_1(x,0,z_2)\alpha(x)\mathrm{d}x \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_1(x,z_1,z_2)=-(\lambda+\alpha(x)+\mu-\lambda qz_1-\lambda pz_2)\times P_1(x,z_1,z_2)+\int_0^\infty P_2(x,y,z_1,z_2)\beta(y)\mathrm{d}y \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_1(x,y,z_1,z_2)=-(\lambda+\beta(y)-\lambda qz_1-\lambda pz_2)\times P_2(x,y,z_1,z_2) \tag{26}$$

$$P_1(0,z_1,z_2)=(\lambda+\sigma z_2^{-1})P_0(z_2)-\sigma z_2^{-1}P_{0,0}^{(0)}+z_1^{-1}\int_0^\infty[P_1(x,z_1,z_2)-P_1(x,0,z_2)]\alpha(x)\mathrm{d}x \tag{27}$$

$$P_2(x,0,z_1,z_2)=\mu P_1(x,z_1,z_2) \tag{28}$$

由式(26)得

$$P_2(x,y,z_1,z_2)=P_2(x,0,z_1,z_2)[1-B(y)]\times \mathrm{e}^{-(\lambda-\lambda qz_1-\lambda pz_2)y} \tag{29}$$

把式(29)代入式(25),同时考虑式(28),得

$$P_1(x,z_1,z_2)=P_1(0,z_1,z_2)[1-A(x)]\mathrm{e}^{-(*)x} \tag{30}$$

把式(24)、(30)代入式(27)得

$$[z_1-\widetilde{A}(*)]P_1(0,z_1,z_2)=[(\lambda+\sigma z_2^{-1})z_1-(\lambda+\sigma)]\times P_0(z_2)-(\sigma z_2^{-1}z_1-\sigma)P_{0,0}^{(0)} \tag{31}$$

由前面分析知,方程$f(z_1,z_2)=z_1-\widetilde{A}(*)$有解$z_1=g(z_2)$,把$z_1=g(z_2)$代入式(31)可得式(20),再把式(20)代入式(31)得

$$P_1(0,z_1,z_2)=\frac{z_1-g(z_2)}{z_1-\widetilde{A}(*)}\times \frac{\lambda\sigma(1-z_2)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2}P_{0,0}^{(0)} \tag{32}$$

再把式(30)、(32)代入式(25)得

$$P_2(x,0,z_1,z_2)=\frac{\lambda\sigma(1-z_2)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2}\times \frac{\mu(z_1-g(z_2))}{z_1-\widetilde{A}(*)}[1-A(x)]\mathrm{e}^{-(*)x}P_{0,0}^{(0)} \tag{33}$$

最后把式(33)、(32)代入式(29)、(30)即可得式(21)、(22).

下面求$P_{0,0}^{(0)}$,令

$$P_1(z_1,z_2)=\int_0^\infty P_1(x,z_1,z_2)\mathrm{d}x$$

$$P_2(z_1,z_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty P_2(x,y,z_1,z_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

把式(21)、(22)中$x$, $y$都从0到∞积分分别可得到

$$P_1(z_1,z_2)=\frac{1-\widetilde{A}(*)}{*}\frac{z_1-g(z_2)}{z_1-\widetilde{A}(*)}\times \frac{\lambda\sigma(1-z_2)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2}P_{0,0}^{(0)} \tag{34}$$

$$P_2(z_1,z_2)=\frac{\sigma(1-z_2)}{(\lambda z_2+\sigma)g(z_2)-(\lambda+\sigma)z_2}\frac{1-\widetilde{A}(*)}{*}\times \frac{z_1-g(z_2)}{z_1-\widetilde{A}(*)}\frac{\mu(1-\widetilde{A}(\lambda-\lambda qz_1-\lambda pz_2))}{1-qz_1-pz_2}P_{0,0}^{(0)} \tag{35}$$

在式(20)、(34)、(35)中令$z_1=1$, $z_2=1$,运用L'Hospital法则和正则性条件: $P_0(1)+P_1(1,1)+P_2(1,1)=1$,并考虑到式(10)∼(12)经整理得式(23). □

其中, $P_0(z_2)$表示服务台空闲时,重试轨道中的顾客数的概率母函数; $P_1(z_1,z_2)$表示服务台进行服务时,优先权队列与重试轨道中的顾客数的联合概率母函数; $P_2(z_1,z_2)$表示服务台进行修理时,优先权队列与重试轨道中的顾客数的联合概率母函数.

有下列结论.

**推论 1.** 服务台处于空闲、服务、修理状态的概率分别为

$$I=P_0(1)=1-\rho,\quad U=P_1(1,1)=\lambda\alpha_1$$

$$R=P_2(1,1)=\lambda\mu\beta_1\alpha_1$$

**推论 2.** 系统中优先权队列的顾客数、重试轨道中的顾客数和系统中的顾客数的概率母函数分别是:

$$P(z)=1-\rho+\frac{1-\rho q}{q}\times \frac{1-\widetilde{A}(\lambda q(1-z)-\mu\widetilde{B}(1-\lambda q(1-z)))}{\widetilde{A}(\lambda q(1-z)-\mu\widetilde{B}(1-\lambda q(1-z)))-z} \tag{36}$$

$$Q(z)=\frac{\sigma(1-\rho)-\lambda\rho p}{p}\times \frac{1-qg(z)-pz}{(\lambda z+\sigma)g(z)-(\lambda+\sigma)z} \tag{37}$$

$$R(z)=\frac{\sigma(1-\rho)-\lambda\rho p}{p}\frac{\sigma(z-g(z))}{(\lambda z+\sigma)g(z)-(\lambda+\sigma)z}\times$$

$$\frac{(1-z)\widetilde{A}(\lambda+\mu-\lambda z-\mu\widetilde{B}(\lambda(1-z)))}{z-\widetilde{A}(\lambda+\mu-\lambda z-\mu\widetilde{B}(\lambda(1-z)))} \tag{38}$$

进一步可得优先权队列的平均队长、重试轨道中队列的平均队长和系统的平均队长分别为

$$\mathrm{E}[N_1]=\frac{\lambda^2 q[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]}{2(1-\rho q)} \tag{39}$$

$$\mathrm{E}[N_2]=\frac{\lambda^2 p(\lambda p+\sigma)[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]+2\lambda\rho p(1-\rho q)}{2(1-\rho q)[\sigma(1-\rho)-\lambda\rho p]} \tag{40}$$

$$\mathrm{E}[N]=\rho+\frac{\lambda^2[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]}{2(1-\rho)}+\frac{\lambda p}{\sigma-(\lambda p+\sigma)\rho}[\rho+\frac{\lambda^2 p[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]}{2(1-\rho q)(1-\rho)} \tag{41}$$

**证明.** 由于$P(z)=P_0(1)+P_1(z,1)+P_2(z,1)$,由定理2得式(36), 然后对式(36)关于$z$求导,再用洛比达法则即可得到式(39);又$Q(z)=P_0(z)+P_1(1,z)+P_2(1,z)$,由定理2得式(37), 然后对式(37)关于$z$求导,再用洛比达法则即可得到式(40);又由Pollaczek-Khinchin公式[14]知: $R(z)=P_0(z)+zP_1(z,z)+zP_2(z,z)$,由定理2得式(38), 然后对式(38)关于$z$求导,再用洛比达法则即可得到式(41). □

**推论 3.** 优先权队列、重试轨道和系统中的顾客平均等待时间分别为

$$W_1=\frac{\mathrm{E}[N_1]}{\lambda q}=\frac{\lambda[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]}{2(1-\rho q)} \tag{42}$$

$$W_2=\frac{\mathrm{E}[N_2]}{\lambda p}=\frac{\lambda(\lambda p+\sigma)[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]+2\rho(1-\rho q)}{2(1-\rho q)[\sigma(1-\rho)-\lambda\rho p]} \tag{43}$$

$$W=\frac{\mathrm{E}[N]}{\lambda}=(1+\mu\beta_1)\alpha_1+\frac{\lambda[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)^2\alpha_2]}{2(1-\rho)}+\frac{p}{\sigma-(\lambda p+\sigma)\rho}\times[\rho+\frac{\lambda^2 p[\mu\beta_2\alpha_1+(1+\mu\beta_1)\alpha_2]}{2(1-\rho q)(1-\rho)}] \tag{44}$$

## 4 可靠性指标

**定理 3.** 系统的稳态可用度为$A=1-\rho+\lambda\alpha_1$.
**证明.** 由系统可用度的定义[17]及推论1得

$$A=\lim_{\substack{z_1\to1\\z_2\to1}}[\int_0^\infty P_0(x,z_2)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_1(x,z_1,z_2)\mathrm{d}x]=\lim_{\substack{z_1\to1\\z_2\to1}}[P_0(z_2)+P_1(z_1,z_2)]=1-\rho+\lambda\alpha_1$$

□

**定理 4.** 系统的稳态故障频度为$W_f=\mu\lambda\alpha_1$.
**证明.** 由系统的故障频度定义[17]知

$$W_f=\lim_{\substack{z_1\to1\\z_2\to1}}[\int_0^\infty \mu P_1(x,z_1,z_2)\mathrm{d}x]=\lim_{\substack{z_1\to1\\z_2\to1}}\mu P_1(z_1z_2)\mathrm{d}x=\mu\lambda\alpha_1$$

□

**定理 5.** 系统的稳态更新频度为$M_r=\mu\lambda^2\beta_1\alpha_1$.
**证明.** 由系统的稳态更新频度的定义[17]知

$$M_r=\lim_{\substack{z_1\to1\\z_2\to1}}[\int_0^\infty\int_0^\infty P_2(x,y,z_1,z_2)\beta(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y] \tag{45}$$

把式(22)代入式(45)并运用L′Hospital法则可求得

$$M_r=\mu\lambda^2\beta_1\alpha_1$$

□

**定理 6.** 系统在稳态下,令$P_k=P\{$在广义服务时间$G_n$内服务台恰好失效$k$次$\}$,则

$$P_k=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu x}\frac{(\mu x)^k}{k!}\mathrm{d}D(x)$$

而平均失效次数为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}k\cdot P_k=\mu(1+\mu\beta_1)\alpha_1$.

## 5 特例

如果系统没有故障,则$\mu=0$,由式(36)知,系统稳态时的优先权队列的概率母函数为

$$P(z)=1-\lambda\alpha_1+\frac{1-\lambda q\alpha_1}{q}\frac{1-\widetilde{A}(\lambda q(1-z))}{\widetilde{A}(\lambda q(1-z))-z}$$

服务台为空闲的概率$P_0(1)=1-\lambda\alpha_1$,等排队指标与Moreno[18]中的结果完全吻合.

## References

1 Fayolle G. A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In: Proceedings of the International Seminar on Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1986. 245−253

2 Farahmand K. Single line queue with repeated demands. *Queueing Systems*, 1990, **6**(1): 223−228

3 Choi B D, Choi K B, Lee Y W. M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity. *Queueing Systems*, 1995, **19**(1-2): 215−229

4 Choi B D, Shin Y W, Ahn W C. Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems*, 1992, **11**(4): 335−356

5 Shogan A W. A single server queue with arrival rate dependent on server breakdowns. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1979, **26**(3): 487−497

6 Neuts M F, Lucantoni D M. A Markovian queue with *N* servers subject to breakdowns and repairs. *Management Science*, 1979, **25**(9): 849−861

7 Cao Jin-Hua, Cheng Kan. Reliability analysis of M/G/1 queueing system repairable server station. *Acta Mathematica Application Sinica*, 1982, **5**(2): 113−127
(曹晋华, 程侃. 服务台可修的M/G/1排队系统分析. 应用数学学报, 1982, **5**(2): 113−127)

8 Yue De-Quan, Zhu Jian-Ling, Qin Ya-Ling, Li Chun-Yan. Gaver′s parallel system attended by a cold standby unit and a repairman with multiple vacations. *Systems Engineering Theory and Practice*, 2006, **6**(6): 59−68
(岳德权, 朱建玲, 秦雅玲, 李春艳. 修理工可多重休假的带有一个冷贮备部件的Gaver并联系统. 系统工程理论与实践, 2006, **26**(6): 59−68)

9 Qin Ya-Ling, Li Chun-Yan, Zhu Jian-Ling, Yue De-Quan. Reliability analysis of an M/G/1 queueing system with N-policy and server breakdowns. *Journal of Yanshan University*, 2006, **30**(5): 388-391
(秦雅玲, 李春燕, 朱建玲, 岳德权. 服务员不可靠的N-策略M/G/1排队系统的可靠性分析. 燕山大学学报, 2006, **30**(5): 388−391)

10 Wang J T, Cao J H, Li Q L. Reliablity analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs. *Queueing Systems*, 2001, **38**(4): 363−380

11 Wang J T. Reliability analysis of M/G/1 queues with general retrial times and server breakdowns. *Progress in Natural Science*, 2006, **16**(5): 464−473

12 Choi B D, Chang Y. Single server retrial queues with priority calls. *Mathematical and Computer Modelling*. 1999, **30**(3): 7−32

13 Hu Gen-Sheng, Zhu Yi-Juan, Chen Yang, Qu Jun-Bo. Application of N-policy M/G/1 queue with priorities in communication network. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*, 2003, **24**(4): 82−85
(胡根生, 朱翼隽, 陈洋, 屈军波. 优先权的N策略M/G/1排队在通信网中的应用. 江苏大学学报(自然科学版), 2003, **24**(4): 82−85)

14 Moreno P. An M/G/1 retrial queue with recurrent customers and general retrial times. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **159**(3): 651−666

15 Sennot L I, Humblet P A, Tweedie R L. Mean drift and the non-ergodicity of Markov chains. *Operations Research*, 1983, **31**(4): 783−789

16 Cooper R B. *Introduction to Queueing Theory (Second Edition)*. New York: North-Holland, 1981. 187−188

17 Shi Ding-Hua. *Density Evolution Method of Stochastic Model*. Beijing: Science Press, 1999. 83−112
(史定华. 随机模型的密度演化方法. 北京: 科学出版社, 1999. 83−112)

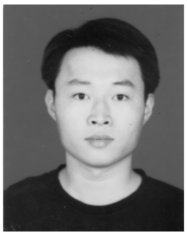
18 Atencia I, Moreno P. A single-server retrial queue with general retrial times and Bornoulli schedule. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **162**(2): 855−880



**朱翼隽** 江苏大学理学院教授.主要研究方向为随机网络与排队论.
E-mail: yjzhu@ujs.edu.cn
(**ZHU Yi-Juan** Professor in Faculty of Science at Jiangsu University. His research interest covers stochastic network and queueing theory.)



**周宗好** 江苏大学理学院硕士研究生.主要研究方向为排队论.本文通信作者.
E-mail: zhzhou2005@163.com
(**ZHOU Zong-Hao** Master student in Faculty of Science at Jiangsu University. His research interest is queueing theory. Corresponding author of this paper.)


**冯艳刚** 江苏大学理学院硕士研究生.主要研究方向为排队论.
E-mail: fyg811208@yahoo.com.cn
(**FENG Yan-Gang** Master student in Faculty of Science at Jiangsu University. His research interest is queueing theory.)