

# 基于 UD 分解的自适应扩展集员估计方法

周波<sup>1,2</sup> 韩建达<sup>1</sup>

**摘要** 用于非线性椭球估计的扩展集员算法在实际应用中存在着数值稳定性差、计算复杂度高以及滤波器参数难以选择等问题. 本文提出了一种基于 UD 分解的自适应扩展集员估计算法, 用于解决非线性系统时变状态和参数的联合估计和定界问题. 新算法将 UD 分解与序列更新和选择更新策略结合起来, 改进了传统扩展集员算法的数值稳定性和实时性能; 同时, 对滤波器参数进行自适应选择以进一步降低计算复杂度并达到次优估计结果. 仿真实验表明了该算法的有效性和鲁棒性.

**关键词** 集员估计, UD 分解滤波, 自适应滤波, 非线性状态, 参数定界  
**中图分类号** TP13

## A UD Factorization-based Adaptive Extended Set-membership Filter

ZHOU Bo<sup>1,2</sup> HAN Jian-Da<sup>1</sup>

**Abstract** The extended set-membership filter for nonlinear ellipsoidal estimation suffers from numerical instability, computation complexity, as well as the difficulty in filter parameter selection. In this paper, a UD factorization-based adaptive set-membership filter is developed and applied to nonlinear joint estimation of both time-varying states and parameters. As a result of using the proposed UD factorization combined with a new sequential and selective measurement update strategy, the numerical stability and real-time applicability of conventional ESMF are substantially improved. Furthermore, an adaptive selection scheme of the filter parameters is derived to reduce the computation complexity and achieve sub-optimal estimation. Simulation results have shown the efficiency and robustness of the proposed method.

**Key words** Set-membership estimation, UD factorization-based filter, adaptive filter, nonlinear state, parameter bounding

传统的随机概率估计方法一般要求对过程噪声和测量噪声具有一定的先验知识, 或者假设其满足一定的分布条件, 因而限制了此类估计算法的应用. 与之相比, 集员估计方法 (Set-membership filter, SMF) 仅仅要求噪声分布未知但有界, 这一点在实际系统中通常能够得到保证<sup>[1-2]</sup>. 除此之外, 在集员估计框架下得到的状态估计是一个可行解集合, 而不是常规估计方法所得到的单个估计值. 从控制的角度来说, 它提供了鲁棒控制和最优控制等理论所要求的状态边界, 可更好地实现估计方法与控制策略的结合.

考虑到可行状态集合的形状一般无法确定, 甚至可能是非凸的, 集员估计方法在形式上大多采用椭球定界算法. Schweppe<sup>[3]</sup> 和 Bertsekas<sup>[4]</sup> 首先提出可以利用外定界椭球集合来包含系统的真实状态, 但没有考虑椭球的最优化问题. 在此基础上, Fogel 和 Huang<sup>[5]</sup> 给出了最优定界椭球算法

(Optimal bounded ellipsoid, OBE), 得到了最小体积和最小迹椭球集合. Maksarov<sup>[6]</sup>、Kurzhanski<sup>[7]</sup> 和 Chernousko<sup>[8]</sup> 等进一步发展了针对状态和参数估算的椭球技术. 此外, 针对特定的应用情况, Lin<sup>[9]</sup> 等发展了一种自动估算边界的椭球算法, Polyak<sup>[10]</sup> 等推导了用于具有模型不确定性的系统的椭球算法, 进一步扩展了集员算法的应用领域.

上述各种算法均只能应用于线性系统. Scholte 和 Campell 将椭球定界算法由线性系统推广至非线性系统, 提出了一种扩展集员估计算法 (Extended SMF, ESMF)<sup>[11]</sup>, 其主要思想与扩展 Kalman 滤波方法<sup>[12]</sup> 类似: 首先对非线性系统进行线性化处理, 并采用区间分析技术估计线性化近似后的高阶项误差范围, 将其用椭球外包后与噪声椭球集相结合组成虚拟噪声椭球集, 然后对得到的线性化系统实施线性 OBE 算法, 从而得到最终的估计结果.

然而, 由于 ESMF 的复杂形式以及计算机字长的限制, 导致该算法存在着数值稳定性较差、计算复杂度高以及滤波器参数难以选择等缺陷. 本文提出了一种基于 UD 分解的自适应扩展集员估计方法, 将算法中的各包络矩阵采取 UD 分解的形式进行表示和更新, 同时, 结合观测量的序列更新和选择更新策略, 不仅加强了算法的稳定性, 而且降低了算法的计算复杂度. 另外, 提出了一种自适应的滤波器参数选择方法, 使得计算复杂度进一步降低, 并得到次优

收稿日期 2006-09-26 收修改稿日期 2007-06-08  
Received September 26, 2006; in revised form June 8, 2007  
国家高科技研究发展计划 (863 计划) (2006AA04Z215) 资助  
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2006AA04Z215)  
1. 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学重点实验室 沈阳 110016  
2. 中国科学院研究生院 北京 100039  
1. Robotics Laboratory, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016 2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00150

的结果.

## 1 扩展集员估计算法

考虑一个离散非线性状态空间模型如下

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  为状态矢量,  $\mathbf{y}_{k+1} \in \mathbf{R}^m$  为观测矢量;  $\mathbf{f}(\cdot)$  和  $\mathbf{h}(\cdot)$  分别为二阶可微的非线性过程和观测方程;  $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathbf{R}^m$  分别为过程噪声和测量噪声, 且满足

$$\mathbf{w}_k \in E(\mathbf{0}, Q_k), \mathbf{v}_{k+1} \in E(\mathbf{0}, R_{k+1}) \quad (3)$$

其中记号  $E(\mathbf{a}, P)$  表示如下定义的椭球集

$$E(\mathbf{a}, P) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T P^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 1\} \quad (4)$$

上式中,  $\mathbf{a}$  表示椭球集的中心;  $P$  为椭球的包络矩阵, 且满足对称正定性.

设系统的初始状态估计椭球集为  $\mathbf{x}_0 \in E(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0)$ , 其中  $\hat{\mathbf{x}}_0$  和  $P_0$  分别表示初始估计椭球的中心和包络矩阵. 定义  $k$  时刻估计得到的系统状态椭球集为  $\mathbf{x}_k \in E(\hat{\mathbf{x}}_k, P_k)$ , 则  $k+1$  ( $k=0, 1, \dots$ ) 时刻 ESMF 算法的迭代过程为<sup>[11]</sup>

1) 计算  $k$  时刻每个状态分量的不确定性区间

$$X_k^i = \left[ \hat{x}_k^i - \sqrt{P_k^{i,i}} \quad \hat{x}_k^i + \sqrt{P_k^{i,i}} \right] \quad (5)$$

其中  $i=1, 2, \dots, n$ , 记号  $P_k^{i,j}$  表示  $P_k$  的  $(i, j)$  元素.

2) 用区间分析技术获得线性化产生的 Lagrange 余子的最大区间. 以单状态系统为例, 对非线性状态方程在当前估计点作泰勒展开, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} = & \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k) + (\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) + \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}(X_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, 记号  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$  为  $\mathbf{f}$  相对于  $\mathbf{x}$  的梯度. 则 Lagrange 余子的取值区间为

$$X_{R_2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k, X_k) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}(X_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (7)$$

对多维状态系统, 有

$$X_{R_2} = \frac{1}{2} \text{diag}(X_k^T, \dots, X_k^T) \begin{pmatrix} Hes_1 \\ \vdots \\ Hes_n \end{pmatrix} X_k \quad (8)$$

其中  $Hes_i, i=1, 2, \dots, n$  为  $\mathbf{f}(\cdot)$  的 Hessian 矩阵.

3) 计算线性化误差的边界, 并用椭球将线性化误差外包

$$[\bar{Q}_k]_{R_k}^{i,i} = 2(X_{R_2})^2, [\bar{Q}_k]_{R_k}^{i,j} = 0 \quad (i \neq j) \quad (9)$$

从而得到线性化误差的外包椭球为  $E(\mathbf{0}, \bar{Q}_k)$ .

4) 计算最终的虚拟过程误差椭球  $\hat{\mathbf{w}}_k \in E(\mathbf{0}, \hat{Q}_k)$

$$\hat{\mathbf{w}}_k \in E(\mathbf{0}, \hat{Q}_k) \supset E(\mathbf{0}, Q_k) \oplus E(\mathbf{0}, \bar{Q}_k) \quad (10)$$

其中,  $\hat{\mathbf{w}}_k$  是由线性化误差和过程噪声相加得到的, 因此涉及到两椭球的直和运算, 可得

$$\hat{Q}_k = \frac{\bar{Q}_k}{1 - \beta_{Q_k}} + \frac{Q_k}{\beta_{Q_k}}, \quad \beta_{Q_k} \in (0, 1) \quad (11)$$

对观测方程进行相似处理, 得到虚拟观测噪声椭球  $\hat{\mathbf{v}}_{k+1} \in E(\mathbf{0}, \hat{R}_{k+1})$ .

5) 使用线性 SMF 滤波的预测步骤来计算预测状态椭球边界. 这是线性化预测椭球  $E(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k), A_k P_k A_k^T)$  和虚拟过程噪声椭球  $E(\mathbf{0}, \hat{Q}_k)$  的直和过程

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (12)$$

$$P_{k+1,k} = \Phi_k \frac{P_k}{1 - \beta_k} \Phi_k^T + \frac{\hat{Q}_k}{\beta_k}, \quad \beta_k \in (0, 1) \quad (13)$$

其中,  $\Phi_k = \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) |_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k}$  为过程模型的 Jacobian 矩阵.

6) 使用线性 SMF 更新步骤计算更新状态椭球边界  $E_{k+1} = E(\hat{\mathbf{x}}_k, P_{k+1})$ . 其实质是将预测状态椭球  $E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, P_{k+1,k})$  和观测集  $S_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} | (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \hat{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) \leq 1\}$  作交集.

$$W_k = H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T + \frac{\hat{R}_{k+1}}{\rho_k}, \quad \rho_k \in (0, 1) \quad (14)$$

$$K = \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} + K [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})] \quad (16)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} \quad (17)$$

$$P_{k+1} = \delta_k \bar{P}_{k+1} \quad (18)$$

其中

$$\delta_k = 1 - [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})] \quad (19)$$

而  $H_{k+1} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) |_{\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}}$  为观测模型的 Jacobian 矩阵.

上述算法中值得注意的有两点: 1) 三个滤波器参数  $\beta_{Q_k}, \beta_k, \rho_k$  的选取. 由于两个椭球集直和或交集的外包椭球不是唯一的, 因此可通过选择适当的滤波器参数来获得某指标下最优的椭球; 2) 当  $\delta_k \leq 0$  时, 椭球边界无意义, 这说明对初始状态和噪声的边界估计不准确, 因此该参数值可用来指示算法的健康性.

## 2 基于 UD 分解的扩展集员估计算法

上面给出的 ESMF 算法在实际应用中会遇到很多困难. 其最主要的缺陷是由于计算机字长限制所导致的数值不稳定问题. 此外, 参数  $\beta_{Q_k}, \beta_k, \rho_k$  的存在将加剧数值的不稳定. 数值不稳定主要表现在两个方面: 1) 椭球包络矩阵  $P_k$  不再为对称正定矩阵, 或者对角元素出现负值; 2) 式 (14) 中计算增益的中间矩阵  $W_k$  奇异或接近奇异, 其逆不存在或者逆计算导致巨大的误差. 为了解决这两个问题, 本文将矩阵 UD 分解的理论<sup>[13]</sup> 引入到 ESMF 算法中, 推导出该算法的 UD 分解形式, 来保证  $P_k$  的正定性; 同时, 对矢量观测更新采取序列更新的策略, 即一次只更新一个观测分量, 从而将  $W_k$  的矩阵逆计算转化为标量的倒数计算, 解决  $W_k$  的奇异或近似奇异问题.

**引理 1.** 对称正定矩阵  $P$  可被分解为  $P = UDU^T$ , 其中  $U$  为单位上三角矩阵,  $D$  为对角矩阵, 称之为 UD 分解, 或修正 Cholesky 分解<sup>[14]</sup>.

根据引理 1, 将各椭球的包络矩阵作 UD 分解, 并在迭代的每一步以包络矩阵的 UD 分解因子代替原包络矩阵进行更新, 从而将原算法转化为其 UD 分解形式, 即构成 UD 分解 ESMF 算法. 具体算法推导如下:

设  $k$  时刻估计的  $P_k$  对称正定, 其 UD 分解形式为  $P_k = U_k D_k U_k^T$ , 其中  $U_k$  为单位上三角阵,  $D_k$  为对角阵. 假设过程噪声分量和观测噪声分量均互不相关, 即  $Q_k$  和  $R_{k+1}$  为对角阵, 易推导出虚拟噪声  $\hat{Q}_k$  和  $\hat{R}_{k+1}$  也为对角阵.

对算法的预测步骤, 定义

$$S_{k+1,k} = \begin{bmatrix} \Phi_k U_k & I \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\tilde{D}_{k+1,k} = \text{diag} \left\{ D_k / (1 - \beta_k), \hat{Q}_k / \beta_k \right\} \quad (21)$$

由式 (12) 和 (13) 得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (22)$$

$$P_{k+1,k} = U_{k+1,k} D_{k+1,k} U_{k+1,k}^T = S_{k+1,k} \tilde{D}_{k+1,k} S_{k+1,k}^T \quad (23)$$

根据修正加权 Gram-Schmidt 正交变换可计算出  $U_{k+1,k}$  和  $D_{k+1,k}$ <sup>[13]</sup>.

对于更新步骤, 采用测量矢量序列处理的办法, 即每次处理一个分量, 经过  $m$  次迭代得到最终的结果. 定义  $H_{k+1} = [H_{k+1(1)}^T \cdots H_{k+1(m)}^T]^T$ , 即  $H_{k+1(i)}, i = 1, 2, \dots, m$  为  $H_{k+1}$  各行,  $\hat{R}_{k+1(i)}, i = 1, 2, \dots, m$  为虚拟观测噪声  $\hat{R}_{k+1}$  的对角元素,  $\mathbf{y}_{k+1} = [y_{k+1(1)} \cdots y_{k+1(m)}]^T$  为观测向量,  $\mathbf{h}(\cdot) = [h_1(\cdot) \cdots h_m(\cdot)]^T$  为观测方程.

设对于观测变量序列迭代的初始条件为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^0 = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, \quad \bar{U}_{k+1,k}^0 = U_{k+1,k}, \quad \bar{D}_{k+1,k}^0 = D_{k+1,k} \quad (24)$$

并将初始的  $\delta_k^0$  设为 1, 假设第  $i-1$  个观测得到的  $\bar{P}_{k+1}$  的 UD 分解结果为  $\bar{U}_{k+1}^{i-1}$  和  $\bar{D}_{k+1}^{i-1}$ , 则对第  $i$  个观测 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 令

$$s = \bar{D}_{k+1}^{i-1} (\bar{U}_{k+1}^{i-1})^T H_{k+1(i)}^T / (1 - \rho_{k(i)}) \quad (25)$$

$$c = H_{k+1(i)} \bar{U}_{k+1}^{i-1} s + \hat{R}_{k+1(i)} / \rho_{k(i)} \quad (26)$$

由式 (14) ~ (19) 得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{i-1} + \frac{1}{c} \bar{U}_{k+1}^{i-1} \frac{\bar{D}_{k+1}^{i-1}}{1 - \rho_{k(i)}} (\bar{U}_{k+1}^{i-1})^T \times H_{k+1(i)}^i \left( y_{k+1(i)} - h_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{i-1}) \right) \quad (27)$$

$$\bar{P}_{k+1}^i = \bar{U}_{k+1}^{i-1} \left( \frac{\bar{D}_{k+1}^{i-1}}{1 - \rho_{k(i)}} - \frac{1}{c} s s^T \right) (\bar{U}_{k+1}^{i-1})^T \quad (28)$$

$$\delta_k^i = \delta_k^{i-1} - \frac{1}{c} \left( y_{k+1(i)} - h_i(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{i-1}) \right)^2 \quad (29)$$

由式 (28) 得到  $\bar{P}_{k+1}^i$  的 UD 分解因子  $\bar{U}_{k+1}^i$  和  $\bar{D}_{k+1}^i$  为

$$\bar{U}_{k+1}^i = \bar{U}_{k+1}^{i-1} \tilde{U}, \quad \bar{D}_{k+1}^i = \tilde{D} \quad (30)$$

其中  $\tilde{U}$  和  $\tilde{D}$  为  $\bar{D}_{k+1}^{i-1} / (1 - \rho_{k(i)}) - s s^T / c$  的 UD 分解因子.

经过  $m$  步迭代, 得最终更新结果为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^m \quad (31)$$

$$U_{k+1} = \bar{U}_{k+1}^m, \quad D_{k+1} = \delta_k^m \bar{D}_{k+1}^m \quad (32)$$

当  $Q_k$  为非对角阵时, 需要对虚拟噪声进行 UD 分解  $\hat{Q}_k = U_Q D_Q U_Q^T$ , 将式 (20) 和 (21) 替换为

$$S_{k+1,k} = \begin{bmatrix} \Phi_k U_k & U_Q \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\tilde{D}_{k+1,k} = \text{diag} \{ D_k / (1 - \beta_k), D_Q / \beta_k \} \quad (34)$$

当  $R_{k+1}$  不为对角阵时, 设其 UD 分解为  $R_{k+1} = U_R D_R U_R^T$ , 可对观测方程进行变换

$$\mathbf{z}_{k+1} = U_R^{-1} \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}_a(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{a,k+1} \quad (35)$$

其中,  $\mathbf{v}_{a,k+1} \in E(\mathbf{0}, D_R)$ ,  $\mathbf{h}_a(\cdot)$  为取代  $\mathbf{h}(\cdot)$  的非线性方程.

综上所述, 得基于 UD 分解的 ESMF 算法步骤如下:

- 1) ~ 4) 与原始 ESMF 相应步骤相同.
- 5) 用式 (20) ~ (23) 取代式 (12) 和 (13).
- 6) 对每个观测分量, 用式 (24) ~ (30) 取代式 (14) ~ (19).

将上述基于 UD 分解的 ESMF 算法与原始算法进行比较可看出, 在迭代的每一步中, 包络矩阵被其 UD 分解因子表示所取代, 从而保证了包络矩阵的对称正定性. 同时, 由于采用序列更新, 使得迭代中更新部分的矩阵运算转化为标量计算, 进一步提高了算法的稳定性. 从计算复杂度方面来考虑, UD 分解算法具有和传统算法相当的计算量<sup>[13]</sup>, 而序列更新可更进一步降低时间复杂度, 尤其是在观测维数较大的情况下. 以中间矩阵  $W_k$  求逆操作为例, 无序列更新下算法的复杂度为  $O(m^3)$ , 通过序列更新, 转化为标量的求倒数运算, 其算法复杂度为  $O(m)$ . 其他的矩阵运算也均转化为了相应的标量计算.

为了进一步减少算法的计算负担, 考虑到集员估计中对于初始噪声的边界普遍采用保守的过估计方法, 因此每步迭代的观测更新并不总是必要的, 可采取选择更新的策略, 即: 在适当的情况下, 可以只进行预测步骤, 而省略观测更新.

由 ESMF 算法的推导过程可知, 观测更新的实质是预测状态椭圆集和观测集作交集

$$E_{k+1} = E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, P_{k+1}) = E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, P_{k+1,k}) \cap S_{\mathbf{y}} \quad (36)$$

因此可得

$$E_{k+1} = E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, P_{k+1}) \subset E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, P_{k+1,k}) \quad (37)$$

特别地, 当

$$E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, P_{k+1,k}) \subset S_{\mathbf{y}} \quad (38)$$

可得到

$$E_{k+1} = E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, P_{k+1,k}) \quad (39)$$

满足式 (39) 的条件表明本次迭代的观测更新步骤可以省略. 然而, 由于式 (39) 条件严格, 在实际应用中难于得到检验. 考虑到减少观测更新可以减少执行的计算时间, 因此可选择更为宽松的条件<sup>[15-16]</sup>. 本文提出一种更容易实现的检验准则

$$(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}))^T \hat{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})) \leq \eta \quad (40)$$

参数  $\eta \in (0, 1]$  需要根据初始假设情况进行仔细选择, 以保证滤波器的性能.  $\eta$  较大将会增加选择更

新的几率, 但同时带来了较大的边界估计误差. 因此, 需要在节省更新时间和保证边界估计精度上寻求平衡. 例如稍后的仿真实验显示, 当噪声过估量较小, 如小于设定噪声强度的 5% 时, 可选择  $\eta = 1$ , 也就是说, 当每次迭代得到的预测状态椭圆集中心位于  $S_{\mathbf{y}}$  中时, 可以省略观测更新, 从而既降低了计算负担又保证了边界估计性能.

### 3 滤波器参数的自适应选择

本节将详细讨论三个滤波器参数  $\beta_{Q_k}$ ,  $\beta_k$ ,  $\rho_k$  的选取问题, 并提出一种自适应的优化选择策略来改进算法的性能.

前两个参数  $\beta_{Q_k}$ ,  $\beta_k$  的选择涉及到两个椭圆直和的外包椭圆的最优化问题. 不失一般性, 设两个椭圆  $E(\mathbf{a}_1, P_1)$  和  $E(\mathbf{a}_2, P_2)$  直和的外包椭圆为  $E(\mathbf{a}, P)$ , 则  $\mathbf{a}$  和  $P$  可选择为

$$\mathbf{a} = \beta \mathbf{a}_1 + (1 - \beta) \mathbf{a}_2, \quad P = \frac{P_1}{1 - \beta} + \frac{P_2}{\beta} \quad (41)$$

优化的目的是选取适当的  $\beta \in (0, 1)$  使得外包椭圆满足一定的最优准则, 如最小化外包椭圆体积  $\det(P)$  (等价的  $\ln \det(P)$ ) 或者最小化外包椭圆的迹  $\text{tr}(P)$ <sup>[17]</sup>. 后者往往求解形式更简单, 性能更鲁棒. 这里采取最小化迹的原则, 即

$$\beta = \arg \min_{\beta \in (0, 1)} \text{tr}(P) \quad (42)$$

从而得到最优  $\beta$  的选取算法为

$$\beta = \frac{\sqrt{\text{tr}(P_2)}}{\sqrt{\text{tr}(P_1)} + \sqrt{\text{tr}(P_2)}} \quad (43)$$

参数  $\beta_{Q_k}$ ,  $\beta_k$  将根据式 (43) 进行选择. 对于  $\beta_{Q_k}$  需要计算两个椭圆  $E(\mathbf{0}, Q_k)$  和  $E(\mathbf{0}, \hat{Q}_k)$  的直和. 而对于  $\beta_k$ , 需要计算直和的两个椭圆为  $E(\mathbf{0}, \hat{Q}_k)$  和  $E(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k), A_k P_k A_k^T)$ .

对于参数  $\rho_k$  的选择, 给出观测矢量更新条件下  $P_{k+1}$  的计算公式为

$$P_{k+1} = \delta_k \left( I_{n \times n} - \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \right) \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} \quad (44)$$

其中

$$\delta_k = 1 - [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})] \quad (45)$$

在每步迭代中, 由于  $S_{\mathbf{y}}$  形式的复杂性 (由此导致  $P_{k+1}$  的复杂性), 无论是采用最小化椭圆体积  $\det(P)$  (等价的  $\ln \det(P)$ ) 还是最小化椭圆迹  $\text{tr}(P)$  原则, 都将使得  $\rho_k$  的优化选择十分困难甚至无法得到解析解, 采用数值计算的方法求解则计算

复杂度较高. 这里考虑一种次优的准则, 即采用最小化性能指标  $\delta_k$  上界的形式来自适应选择  $\rho_k$

$$\rho_k = \arg \min_{\rho_k \in (0,1)} \sup(\delta_k) \quad (46)$$

**引理 2.** 通过最小化  $\delta_k$  上界原则求得最优参数值  $\rho_k$  来进行观测更新, 可使得下列不等式

$$\det(P_{k+1}) \leq c_1(\delta_k)^n, \quad \text{tr}(P_{k+1}) \leq c_2\delta_k \quad (47)$$

对于某常数  $c_1, c_2$  成立<sup>[15]</sup>.

引理 2 表明, 可以通过最小化  $\delta_k$  上界来求取参数  $\rho_k$ , 虽然不能保证每步得到的估计椭球体积或者迹最小, 但可以保证其体积或者迹的上界最小, 同时避免了直接求解体积或迹最小化带来的复杂微分方程求解困难或采用数值计算方法求解的繁冗的计算负担, 是一种次优而有效的方法.

**定理 1.** 由引理 2 的最小化  $\delta_k$  原则, 可求得参数值  $\rho_k$  的自适应次优选择公式为

$$\rho_k = \rho_k^* = \frac{\sqrt{r_m}}{\sqrt{p_m} + \sqrt{r_m}} \in (0, 1) \quad (48)$$

其中  $p_m$  和  $r_m$  分别为矩阵  $H_{k+1}P_{k+1,k}H_{k+1}^T$  和  $\hat{R}_{k+1}$  的最大奇异值. 针对观测序列更新的情况, 可进一步简化为

$$\rho_{k(i)} = \rho_{k(i)}^* = \frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}} \quad (49)$$

其中,  $d_1, d_2$  分别定义为

$$d_1 = H_{k+1(i)}\bar{U}_{k+1}^{i-1}\bar{D}_{k+1}^{i-1}(\bar{U}_{k+1}^{i-1})^T H_{k+1(i)}^T \quad (50)$$

$$d_2 = \hat{R}_{k+1(i)} \quad (51)$$

**证明.** 根据式 (45), 性能指标  $\delta_k$  的上界可表示为

$$\bar{\delta}_k = 1 - \frac{\|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})\|^2}{\frac{p_m}{1-\rho_k} + \frac{r_m}{\rho_k}} \quad (52)$$

其中  $p_m$  和  $r_m$  分别为矩阵  $H_{k+1}P_{k+1,k}H_{k+1}^T$  和  $\hat{R}_{k+1}$  的最大奇异值, 从而可求得  $\delta_k$  的最小上界为

$$\bar{\delta}_{k,\min} = 1 - \frac{\|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})\|^2}{(\sqrt{p_m} + \sqrt{r_m})^2} \quad (53)$$

此时

$$\rho_k = \rho_k^* = \frac{\sqrt{r_m}}{\sqrt{p_m} + \sqrt{r_m}} \in (0, 1) \quad (54)$$

式 (54) 即为每步迭代中采用的  $\rho_k$  自适应选择公式. 对于观测量序列更新的基于 UD 分解的

ESMF 算法, 情形将得到简化, 只需在每个观测分量更新时最小化  $c$  即可, 由

$$c = H_{k+1(i)}\bar{U}_{k+1}^{i-1}\mathbf{s} + \hat{R}_{k+1(i)}/\rho_{k(i)} = \frac{d_1}{1-\rho_{k(i)}} + \frac{d_2}{\rho_{k(i)}} \quad (55)$$

其中,  $d_1, d_2$  均为正常数, 从而最小化  $c$  得到

$$c_{\min} = \left(\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}\right)^2 \quad (56)$$

此时

$$\rho_{k(i)} = \rho_{k(i)}^* = \frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}} \in (0, 1) \quad (57)$$

上式将在观测序列更新时自适应计算  $\rho_{k(i)}$  以取代式 (54).  $\square$

将上述第 2 节和第 3 节内容相结合即可得到最终的基于 UD 分解的自适应扩展集员估计算法 (Adaptive ESMF, AESMF).

#### 4 仿真实验

将本文提出的基于 UD 分解的自适应扩展集员估计算法 (AESMF) 应用于带双向滑动的履带式移动机器人运动位姿状态和时变滑动参数的联合估计研究, 如图 1 所示.

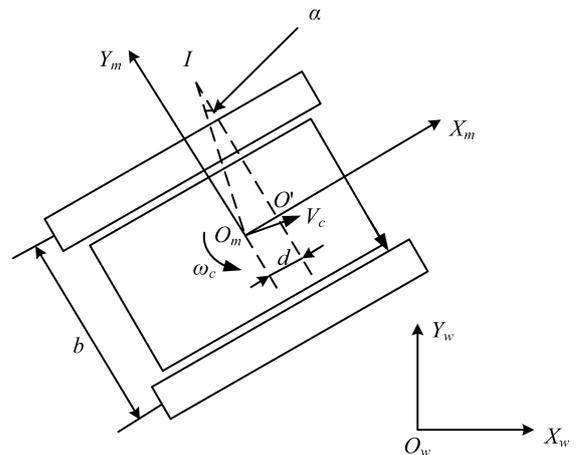


图 1 履带式移动机器人平面运动示意图  
Fig. 1 Planar motion of tracked vehicle

为了描述履带式机器人的运动, 定义全局惯性坐标系  $O_w X_w Y_w$  和一个附着在车身上的相对坐标系  $O_m X_m Y_m$ , 后者的原点位于车的重心上. 车身的运动由两部分合成, 即平动速度  $\mathbf{v}_c = (v_x, v_y)^T$  和转动速度  $\omega_c = d\psi/dt$ . 其中  $v_x$  和  $v_y$  表示  $\mathbf{v}_c$  在相对坐标系两坐标轴上的投影,  $\psi$  为车体的偏航角. 由于侧向滑动的存在,  $v_y$  一般情况下不为零, 这样车身瞬间的旋转中心  $I$  会偏离其重心一定距离  $d$ . 设  $I$  在  $O_m X_m$  上投影为  $O'$ , 定义线段  $O_m I$  和  $O' I$

之间的夹角为  $\alpha$ , 从而侧滑参数可表示为侧滑因子  $\sigma = \tan \alpha$ . 而左右轮行进方向上的滑动因子可表示为

$$\frac{i_L = (r\omega_L - v_x)}{(r\omega_L)} \quad (58)$$

$$\frac{i_R = (r\omega_R - v_x)}{(r\omega_R)} \quad (59)$$

其中,  $r$  为履带驱动轮半径;  $\omega_L, \omega_R$  分别表示左右驱动轮的角速度, 可被视为输入变量. 由此可建立离散过程模型如式 (60) (见本页下方).

式 (60) 中,  $b$  为左右履带之间的距离,  $\Delta T$  为采样时间.

仿真中假定  $X, Y, \psi$  为观测量, 从而观测模型为

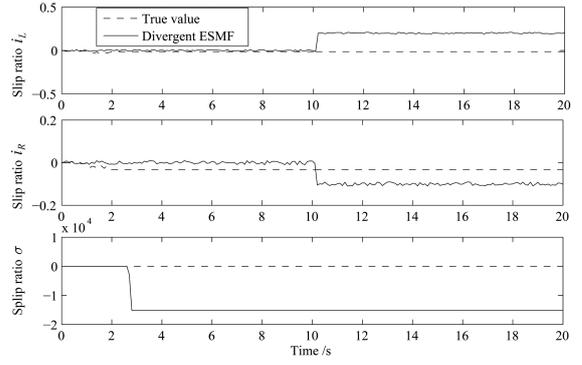
$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (61)$$

仿真的目的是同时估计状态  $X, Y, \psi$  和三个滑动参数  $i_L, i_R, \sigma$ , 这是一个非线性联合估计问题. 由于时变滑动参数的变化规律在现实中未知, 故可建模为

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{w}_{p,k} \quad (62)$$

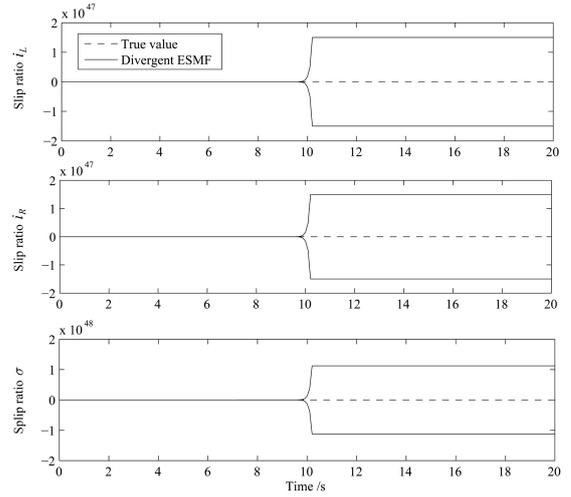
其中,  $\mathbf{p}_k \in \mathbf{R}^p$  为参数矢量,  $\mathbf{w}_{p,k} \in \mathbf{R}^p$  为可加性过程驱动噪声.

模型包含的常数取值如下: 两履带中心距离为  $b = 0.65$  m, 驱动轮半径为  $r = 0.35$  m, 总的仿真时间为 20 s, 采样间隔为  $\Delta T = 100$  ms. 为简单起见, 仿真中采用的输入量  $\omega_L, \omega_R$  取值为常值  $\omega_L = \omega_R = 1.5$  rad/s. 仿真中, 对于过程噪声  $\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{p,k}$  和观测噪声  $\mathbf{v}_{k+1}$ , 考虑 5% 均匀分布有界噪声, 由此得到观测数据. 状态和参数的初始椭球分别假定为过程噪声  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{w}_{p,k}$  的边界椭球. 在每一步估计中, 把估算出的椭球  $E_k$  中心  $\hat{\mathbf{x}}_k$  作为  $k$  时刻估算值. 为了反映参数跟踪的性能, 以及算法在出现突变情况下的稳定性, 除了参数的一般性变化外, 我们将在  $t = 10$  s 时刻给参数一个大的阶跃变化. 仿真中将对原始 ESMF 和本文提出的 AESMF 算法从稳定性、估计性能和计算复杂度三个方面进行比较.



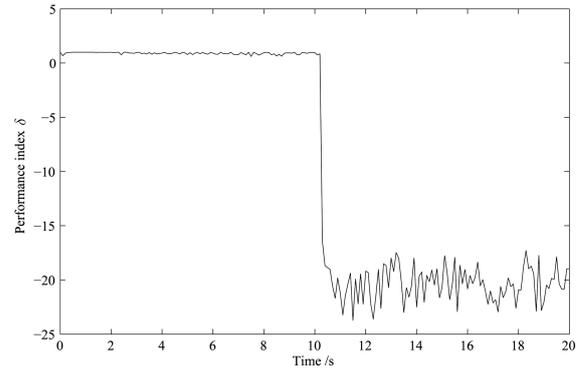
(a) 参数估计

(a) Estimation of parameters



(b) 参数边界估计

(b) Estimation of parameter bounds



(c) 性能指标

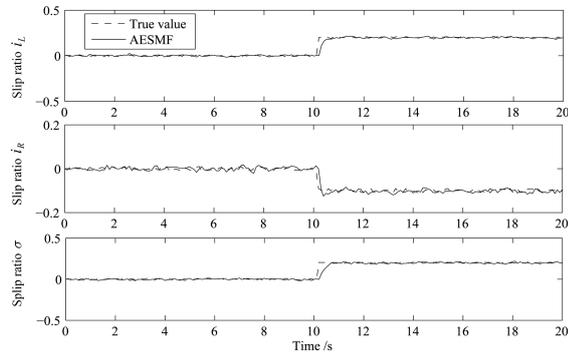
(c) Performance index

图 2 不稳定的 ESMF 估计结果

Fig. 2 Estimation results of divergent ESMF

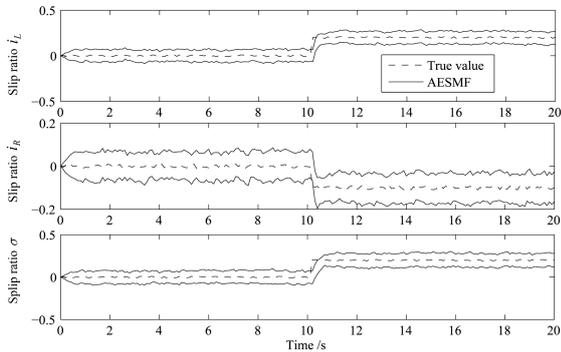
$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ \psi_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k + (r\omega_{L,k}(1 - i_{L,k}) + r\omega_{R,k}(1 - i_{R,k}))\Delta T(\cos \psi_k + \sigma_k \sin \psi_k)/2 \\ Y_k + (r\omega_{L,k}(1 - i_{L,k}) + r\omega_{R,k}(1 - i_{R,k}))\Delta T(\sin \psi_k - \sigma_k \cos \psi_k)/2 \\ \psi_k + (-r\omega_{L,k}(1 - i_{L,k}) + r\omega_{R,k}(1 - i_{R,k}))\Delta T/b \end{pmatrix} + \mathbf{w}_k \quad (60)$$

图 2 和图 3 描述了 AESMF 在稳定性方面的改进. 其中图 2 为 ESMF 发散的情况, 图 3 为 AESMF 在相同条件下的估计结果. 图中虚线表示真实的状态和参数, 实线表示 ESMF 和 AESMF 的估计结果. 各子图分别比较了两种滤波器的参数估计、参数边界估计和性能指标情况.



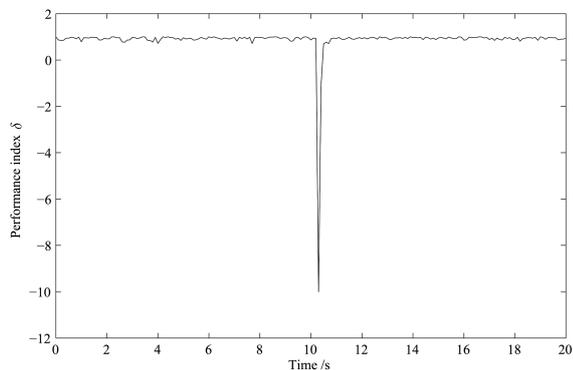
(a) 参数估计

(a) Estimation of parameters



(b) 参数边界估计

(b) Estimation of parameter bounds



(c) 性能指标

(c) Performance index

图 3 AESMF 估计结果

Fig. 3 Estimation results of AESMF

图 2(a) 表明, 当  $t = 2\text{s}$  时, ESMF 的参数估计发散. 这主要是因为中间矩阵  $W_k$  接近奇异, 其求逆出现很大的误差, 导致了算法发散. 此外, 从多

次仿真结果来看, 矩阵  $P_k$  变得不满足非负定, 或者其对角元素出现负值也会导致相同的发散情况. 从图 2(c) 中可知此时的性能指标依然保持为正数, 说明系统中参数的变化并未违背初始的椭球边界假设, 因此图 2(b) 中边界估计在  $t = 2\text{s}$  时并未发散. 图 3(a) 显示 AESMF 在  $t = 2\text{s}$  时仍然保持稳定, 表明 AESMF 成功地解决了原始 ESMF 的数值不稳定缺陷.

但是当参数发生超出初始边界估计的突然变化, 例如  $10\text{s}$  时刻加入大的参数阶跃变化 (如图 2(c) 所示), 原始 ESMF 算法的性能指标在此时刻变为负值, 并且一直持续下去, 其参数边界急剧膨胀至  $10^{47}$  (如图 2(b) 所示), 滤波器完全不能正常工作 (即使在此时刻后参数变化重新满足初始边界假设). 然而, 采用 UD 分解机制的 AESMF 算法则可以很好地克服这一缺点, 如图 3(c) 所示, 虽然在  $10\text{s}$  时刻附近  $\delta_k \leq 0$ , 然而只需经过一段时间调整之后, 性能指标又重新回到正值, 同时滤波器也能够正确地跟踪参数的变化 (如图 3(a)), 其边界估计也恢复正常 (如图 3(b)), 并未出现急剧膨胀的现象, 避免了滤波器的发散.

除了稳定性外, AESMF 算法相对于调试稳定的 ESMF 算法在其他性能上也有所改进. 下面从状态和参数估计情况、不确定性边界的估计情况以及计算复杂度方面进行比较. 图 4 (见下页) 描述了 AESMF 在状态和参数的值估计、边界估计和性能指标上相对于调试稳定的 ESMF 的改进情况. 其中虚线表示真实的状态和参数, 点划线表示 ESMF 的估计结果, 实线表示 AESMF 的估计结果.

出于估计精确性比较的目的, 为了描述各滤波器估算结果的有效性, 在此定义最小二乘原则下的状态估算和参数估算精度如式 (63) 和 (64).

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_x} (\mathbf{x}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t))^2} \quad (63)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i(t) - \hat{\mathbf{p}}_i(t))^2} \quad (64)$$

式中  $\mathbf{x}_i(t)$  和  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  分别表示真实的和估计的状态,  $N_x$  表示状态的维数,  $\mathbf{p}_i(t)$  和  $\hat{\mathbf{p}}_i(t)$  分别表示真实和估计的参数,  $N_p$  表示参数的维数.

ESMF 和 AESMF 两种滤波算法的性能比较结果具体见表 1 所示.

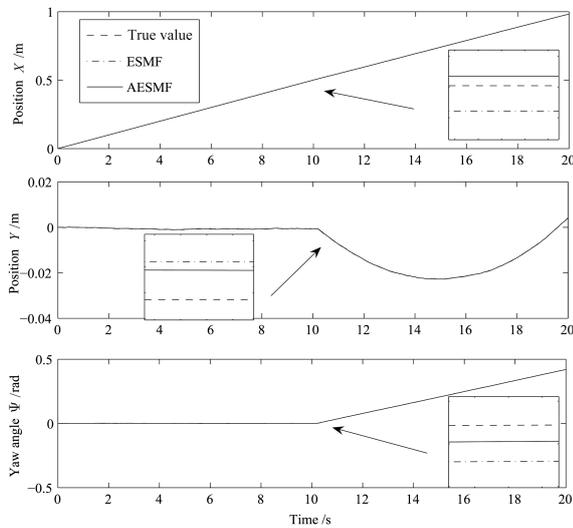
图 4(a), 4(b) 和表 1 表明, 对于稳定的 ESMF, 两种滤波器在状态和参数的估计精度上是非常接近的, 这表明采用 UD 分解、序列更新和选择更新以及自适应参数选择机制的 AESMF 算法并未降

低 ESMF 算法的估计精度. 另一方面, 图 4(c) 显示 AESMF 的边界估计结果要小于 ESMF 的边界估计结果, 表明 AESMF 估计的椭圆要小于 ESMF 估计的椭圆, 这是 AESMF 的滤波器参数采用自适应选择机制带来的改进.

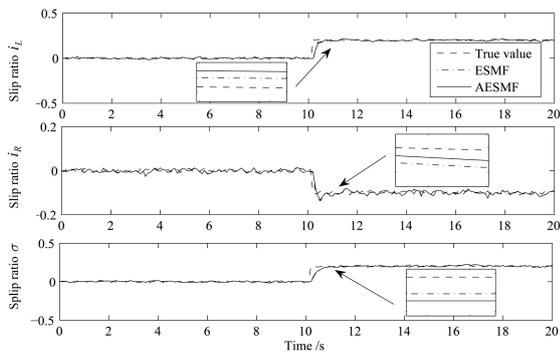
就计算复杂度而言, 仿真实验运行在 Pentium-IV PC 机上的 Matlab 6.5 环境下, 经过 20 次运行后求平均耗费 CPU 时间. 其中, AESMF 耗费的计算时间为 33.48 ms, 而 ESMF 耗费的计算时间为 42.71 ms. 因此从计算复杂度上看 AESMF 要比 ESMF 快 21.6%, 这要归功于 AESMF 采用的序列更新和选择更新方法.

表 1 ESMF 和 AESMF 性能比较  
Table 1 Comparison between ESMF and AESMF

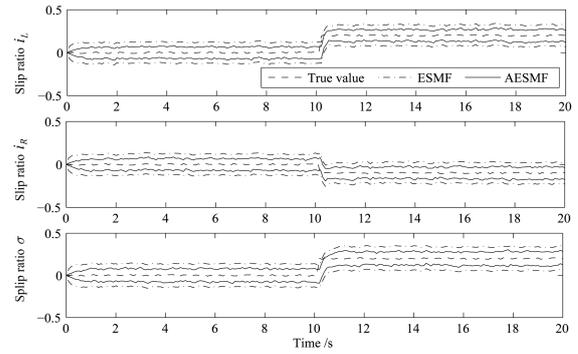
滤波器	状态估计精度 $V_1$	参数估计精度 $V_2$	计算时间 $t$ (ms)
ESMF	1.001E-4	0.031674	42.71
AESMF	9.7953E-5	0.030627	33.48



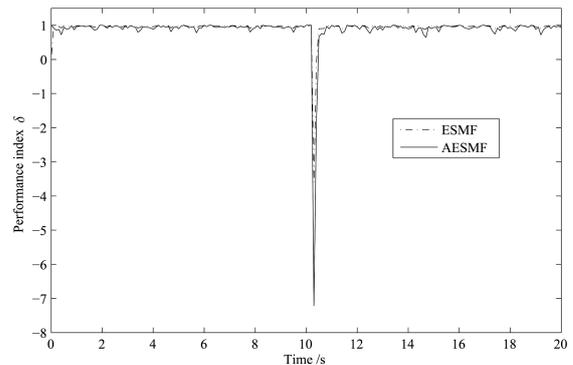
(a) 状态估计比较  
(a) Comparison of states



(b) 参数估计比较  
(b) Comparison of parameters



(c) 参数边界估计比较  
(c) Comparison of parameter bounds



(d) 性能指标比较  
(d) Comparison on of parameter index

图 4 ESMF 和 AESMF 比较

Fig. 4 Comparison between ESMF and AESMF

## 5 结论

本文提出了一种基于 UD 分解的自适应扩展集员估计方法, 并将其应用于解决非线性系统状态和参数的联合估计问题. 新的 AESMF 算法通过将原始 ESMF 方法与 UD 分解机制、序列更新和选择更新策略以及滤波器参数自适应选择策略等方法的结合, 改进了数值稳定性, 降低了计算复杂度, 并实现了次优边界估计性能. 通过带滑动的履带式移动机器人状态和参数联合估计问题的仿真实验, 对 AESMF 算法和原始 ESMF 算法进行了比较, 比较结果表明 AESMF 成功地解决了 ESMF 的数值不稳定问题, 实现了次优估计, 并在不降低估计精度的情况下改进了算法的实时性.

## References

- Shamma J S, Tu K Y. Approximate set-valued observers for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(5): 648–658
- Garulli A, Vicino A. Set membership localization of mobile robots via angle measurements. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, **17**(4): 450–463

- 3 Scheppe F. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, **13**(1): 22–28
- 4 Bersekas D, Rhodes I. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(2): 117–128
- 5 Fogel E, Huang Y F. On the value of information in system identification-bounded noise case. *Automatica*, 1982, **18**(2): 229–238
- 6 Maksarov D G, Norton J P. State bounding with ellipsoidal set description of uncertainty. *International Journal of Control*, 1996, **65**(5): 847–866
- 7 Kurzhanski A B, Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: internal approximation. *Systems and Control Letters*, 2000, **41**(3): 201–211
- 8 Chernousko F L. Ellipsoidal state estimation for dynamical systems. *Nonlinear Analysis*, 2005, **63**(5): 872–879
- 9 Lin T M, Nayeri M, Deller J R. A consistently convergent OBE algorithm with automatic estimation of error bounds. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1998, **12**(4): 305–324
- 10 Polyak B T, Nazin S A, Durieu C, Walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 2004, **40**(7): 1171–1179
- 11 Scholte E, Campell M E. A nonlinear set-membership filter for on-line applications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13**(15): 1337–1358
- 12 Cui N Z, Hong L, Layne J R. A comparison of nonlinear filtering approaches with an application to ground target tracking. *Signal Processing*, 2005, **85**(8): 1469–1492
- 13 Thornton C L, Bierman G J. UDU covariance factorization for Kalman filter. *Control and Dynamic Systems*, 1980, **17**: 177–248
- 14 Mohinder S G, Angus P A. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab*. New York: Wiley, 2001. 216–252
- 15 Kapoor S, Gollamudi S, Nagaraj S, Huang Y F. Tracking of time-varying parameters using optimal bounding ellipsoid algorithms. In: Proceedings of the 34th Allerton Conference on Communication, Control and Computing. Monticello, Illinois: IEEE, 1996. 1206–1216
- 16 Maksarov D G, Norton J P. Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, **16**(6): 411–434
- 17 Durieu C, Polyak B T, Walter E. Trace versus determinant in ellipsoidal outer-bounding with application to state estimation. In: Proceedings of the 13th IFAC World Congress. San Francisco, California: 1996. 43–48



**周波** 中国科学院沈阳自动化研究所博士研究生。2003 年获得中国科技大学自动化系学士学位。主要研究方向为机器人控制, 自主规划, 非线性辨识方法研究。本文通信作者。

E-mail: zhoubo@sia.cn

(**ZHOU Bo** Ph.D. candidate at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree from University of Science and Technology of China in 2003. His research interest covers robot control, autonomous planning methods, and nonlinear identification. Corresponding author of this paper.)



**韩建达** 博士、中国科学院机器人学重点实验室研究员。主要研究方向为基于传感器的机器人鲁棒控制系统设计, 多机器人系统, 智能控制系统设计。

E-mail: jdhan@sia.cn

(**HAN Jian-Da** Ph.D., professor at Robotics Laboratory, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers sensor based robot robust control system design, multi-robot system, and intelligent control system design.)